Université Paris Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2 — 2015-2016

Partiel du 24 mars 2016
Durée 2h00
Documents et calculatrice non autorisés.

Questions de cours.

(a) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

(b) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application, x_0 un point de I et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Enoncer la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre n en x_0 et les conditions de dérivabilité sur f sous lesquelles cette formule est valide.

(c) Pour $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, déduire de la question précédente le développement limité de la fonction f à l'ordre $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ en $x_0 = 0$.

(d) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose que f possède un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m < n$, f possède également un développement limité d'ordre m en 0 dont on précisera la partie régulière.

Exercice 1

(a) Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de la fonction :

$$f(x) := \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

(b) Rappeler (sans démonstration) les développements limités des fonctions $x \to \sqrt{1+x}$ et $x \to \cos(x)$ à l'ordre 2 en 0 et en déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x) := \dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos(x)}$ en 0.

(c) Montrer que la fonction $f(x) := (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

(d) Donner un équivalent simple de $u_n := \dfrac{\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)}{\ln(n+2) - \ln(n+1)}$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution :

(a) *On écrit un DL à l'ordre* 3 *de* $\sin(x)$ *en* 0 *:*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x) \to 0$ *si* $x \to 0$. *Alors*

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \epsilon(x).$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{6}.$$

(b) *On rappelle que les DL à l'ordre* 2 *de* $\sqrt{1+x}$ *et* $\cos(x)$ *:*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x), \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x) \to 0$ *si* $x \to 0$. *On effectue la division par les puissances croissantes à l'ordre 2 du polynôme* $A(x) := 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ *par le polynôme* $B(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, *avec* $Q(0) \neq 0$. *On trouve*

$$A(x) = B(x)(1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}) + x^3\left(\frac{1}{4} + \frac{3x}{16}\right).$$

Comme $\cos(0) = 1 \neq 0$, *on sait par le cours que le rapport* $\sqrt{1+x}/\cos(x)$ *possède un DL à l'ordre 2 en* 0 *de partie régulière donnée par le quotient* $Q(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$ *de la division par les puissances croissantes de* A *par* B *à l'ordre* 2 *: on a donc*

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\cos(x)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) \to 0$ *si* $x \to 0$.

(c) *On pose, pour* $X > 0$,

$$g(X) = Xf(\frac{1}{X}) = X(\frac{1}{X} + 1)\exp(X) = (1+X)\exp(X).$$

On doit calculer un DL à l'ordre 2 de g *en* 0. *Pour cela, on rappelle le DL à l'ordre 2 de* $\exp$ *en* 0 *:*

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + X^2\epsilon(X),$$

où $\epsilon(X) \to 0$ *lorsque* $X \to 0$. *Par produit des développements limités,*

$$(1+X)\exp(X) = (1+X)(1 + X + \frac{X^2}{2}) + X^2\epsilon(X).$$

D'où, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à 2 (qui sont les seuls significatifs),

$$g(X) = 1 + 2X + \frac{3X^2}{2} + X^2\epsilon(X).$$

On revient à la fonction f :

$$f(x) = xg(1/x) = x(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(1/x)),$$

où $\epsilon(1/x) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$ *(puisqu'alors* $1/x \to 0$*). D'où*

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon(1/x)),$$

On en déduit que f *a pour asymptote en* $+\infty$ *la droite* $y = x + 2$ *et est au-dessus de son asymptote puisque*

$$f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2} + \epsilon(1/x))\right) \geq 0$$

pour $x > 0$ *assez grand.*

(d) *On note que*

$$\ln(n^2 + 2) = \ln\left(n^2(1 + \frac{2}{n})\right) = \ln(n^2) + \ln(1 + \frac{2}{n^2}).$$

Par développement limité à l'ordre 1 *de* $\ln(1 + u)$*, on a*

$$\ln(1 + \frac{2}{n}) = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^2}\epsilon(\frac{2}{n^2}),$$

où $\epsilon(u) \to 0$ *lorsque* $u \to 0$*. De même,*

$$\ln(n^2 + 1) = \ln(n^2) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(\frac{1}{n^2}).$$

D'où

$$\begin{aligned}\ln(n^2 + 2) - \ln(n^2 + 1) &= \ln(n^2) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^2}\epsilon(\frac{2}{n^2}) - \ln(n^2) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln(n^2 + 2) - \ln(n^2 + 1) \sim \frac{1}{n^2} \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

On raisonne de même pour le dénominateur : on a

$$\ln(n + 2) = \ln\left(n(1 + \frac{2}{n})\right) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{2}{n}) = \ln(n) + \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\epsilon(\frac{2}{n}),$$

où $\epsilon(u) \to 0$ *lorsque* $u \to 0$*. De même,*

$$\ln(n + 1) = \ln(n) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n}).$$

D'où

$$\begin{aligned}\ln(n+2)-\ln(n+1) &= \ln(n)+\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\epsilon(\frac{2}{n})-\ln(n)+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n})\\ &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(n+2)-\ln(n+1)\sim\frac{1}{n}\text{ lorsque } n\to+\infty.$$

Comme les équivalents se divisent, on peut conclure que

$$u_n := \frac{\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)}{\ln(n+2)-\ln(n+1)}\sim\frac{1/n^2}{1/n}=\frac{1}{n}\text{ lorsque } n\to+\infty.$$

Donc $u_n\sim 1/n$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 2

(a) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I\to\mathbb{R}$ une application et $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. On suppose que f possède un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière le polynôme $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Montrer que la fonction $g(x) := \frac{f(x)-f(0)}{x}$ possède un développement limité en 0 d'ordre $n-1$ de partie régulière $Q(x) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}x^k$.

(b) En appliquant le résultat de la question précédente, donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\quad h(x) := \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{1/3}$.

Solution :

(a) Comme f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière le polynôme $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\epsilon(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$. Notons que $f(0)=a_0$. Donc

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}(f(x)-a_0)=\frac{1}{x}\left(a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k x^k + x^n\epsilon(x)-a_0\right).$$

Or

$$\frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k + x^n\epsilon(x)\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1}+x^{n-1}\epsilon(x)=\sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}x^l + x^{n-1}\epsilon(x)$$

(où on a ré-indicé la dernière somme en posant $l = k-1$). On peut alors conclure que

$$g(x) = \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} x^l + x^{n-1}\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Donc g possède un développement limité en 0 d'ordre $n-1$ de partie régulière $Q(x) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k$.

(b) *Comme le DL de e^x en 0 à l'ordre 3 est*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x),$$

la question précédente permet d'affirmer que $u(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ admet un DL en 0 d'ordre 2 de partie régulière

$$\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}.$$

Donc le DL à l'ordre 2 en u en 0 est

$$u(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x),$$

où $\epsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.