Université de Paris-Dauphine
Année universitaire 2011-2012
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel du 16/11/2011
Durée 2 heure

Les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention contraire, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Les exercices sont indépendants.

Questions de cours

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Que signifie "E est complet" ?
2. Enoncer le théorème de Riesz.
3. Enoncer le théorème de projection sur un ensemble convexe.
4. A partir de ce théorème de projection, (re)démontrer que, si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors la projection Π_F sur F existe et est une application linéaire continue de norme 1.

Cf. cours

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \qquad \forall f \in E .$$

On définit l'application linéaire $\Phi : E \to E$ par

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in E .$$

1. Montrer que Φ est continue sur E avec $|||\Phi||| \leq 1$.
2. Montrer que $|||\Phi||| = 1$.
3. Existe-t-il $f \in E\backslash\{0\}$ tel que $\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1$?
4. Montrer que l'application
$$N(f) = \|\Phi(f)\|_1 \qquad \forall f \in E$$
définit une norme sur E.
5. Montrer que la norme N n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Solution :

1. *Soit $f \in E$. Alors, par inégalité triangulaire, on a*
$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)\ dt \right|\ dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\ dt\ dx \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|\ dt\ dx = \|f\|_1 .$$
Donc l'application linéaire Φ est continue et de norme $|||\Phi||| \leq 1$.

2. *Pour montrer que* $|||\Phi||| = 1$*, précisons le calcul ci-dessus. Soit* $f \in E$*, avec* $f \geq 0$*. On a alors, par intégration par parties,*

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 \int_0^x f(t)\ dt\ dx = \left[-(1-x)\int_0^x f(t)\ dt\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)f(x)\ dx = \int_0^1 (1-x)f(x)\ dx$$

Soit (f_n) *la suite de fonctions (habituelle)*

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Alors $\|f_n\| = 1/2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, et*

$$\|\Phi(f_n)\|_1 = \int_0^{1/n} (1-x)(n-n^2x)\ dx = \left[nx - (n+n^2)\frac{x^2}{2} + n^2\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/n} = 1 - \frac{1+n}{2n} + \frac{1}{3n} \to \frac{1}{2}\ .$$

Alors

$$|||\Phi||| \geq \frac{\|\Phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} \qquad \text{où} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\|\Phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = 1\ .$$

Ceci prouve que $|||\Phi||| \geq 1$*, et donc, d'après la question précédente, que* $|||\Phi||| = 1$*.*

3. *On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe* $f \in E\backslash\{0\}$ *tel que* $\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1$*. Alors, d'après les calculs des questions 1 et 2, on a*

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \|f\|_1 = \|\Phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\ \ dt\ dx = \int_0^1 (1-x)|f(x)|\ dx\ .$$

En soustrayant le terme droit de l'inégalité à celui de gauche, on obtient

$$\int_0^1 x|f(x)|\ dx \leq 0\ ,$$

ce qui est impossible, puisque la fonction $x \to x|f(x)|$ *est continue, positive et non identiquement nulle sur* $[0, 1]$ *(car* f *n'est pas la fonction nulle).*

4. *L'application* N *est bien définie, positive sur* E*. De plus, par linéarité de* Φ*, elle vérifie, pour tout* $f, g \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

$$N(\lambda f) = \|\Phi(\lambda f)\|_1 = \|\lambda\Phi(f)\|_1 = |\lambda|\ \|\Phi(f)\|_1 = |\lambda|\ N(f)$$

et

$$N(f+g) = \|\Phi(f+g)\|_1 = \|\Phi(f) + \Phi(g)\|_1 \leq \|\Phi(f)\|_1 + \|\Phi(g)\|_1 = N(f) + N(g)\ .$$

Reste donc à montrer que, si $N(f) = 0$*, alors* $f = 0$*. Si* $N(f) = 0$*, alors* $\int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\ dt\right|\ dx = 0$*. Or l'application* $x \to \left|\int_0^x f(t)\ dt\right|$ *est continue, positive sur* $[0, 1]$*. Comme son intégrale est nulle, cela signifie que cette application est nulle sur* $[0, 1]$ *:* $\left|\int_0^x f(t)\ dt\right| = 0$ *pour tout* $x \in [0, 1]$*, c'est-à-dire que* $\int_0^x f(t)\ dt = 0$ *pour tout. En dérivant, on obtient alors que* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in [0, 1]$*.*

5. *Nous avons vu plus haut que* $N(f) \leq \|f\|_1$ *(car* $|||\Phi||| = 1$*). Raisonnons par l'absurde en supposant que* N *et* $\|\cdot\|_1$ *sont équivalentes. Alors il existerait une constante* $C > 0$ *telle que* $\|f\|_1 \leq CN(f)$ *pour tout* $f \in E$*. Au vu des calculs de la question (2), on considère la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1 - 1/n] \\ n^2(x - 1 + 1/n) & \text{si } x \in [1 - 1/n, 1] \end{cases}$$

Alors $\|f_n\|_1 = 1/2$ *et*

$$N(f) = \|\Phi(f)\|_1 = \int_{1-1/n}^{1} (1-x)n^2(x-1+1/n)\ dx := I_n$$

où, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[(1-x)\frac{n^2(x-1+1/n)^2}{2}\right]_{1-1/n}^{1} + \int_{1-1/n}^{1} \tfrac{1}{2}n^2(x-1+1/n)^2\ dx \\ &= \left[\ \tfrac{1}{6}n^2(x-1+1/n)^3\right]_{1-1/n}^{1} = \tfrac{1}{6n} \end{aligned}$$

Donc on a $\frac{1}{2} = \|f_n\|_1 \leq CN(f_n) = \frac{C}{6n}$, *ce qui est impossible dès que* $n > C/3$. *Par conséquent, les normes* N *et* $\|\cdot\|_1$ *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 2: Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa norme associée notée $\|\cdot\|$. La projection sur un sous-ensemble convexe fermé non vide C de H est notée Π_C. Soient a et b deux applications linéaires continues de H dans H telles que

$$\|a(x)\| \ \leq\ \|b(x)\| \qquad \forall x \in H\ .$$

L'objet de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $c : H \to H$ telle que $a = c \circ b$ et $|||c||| \leq 1$. Pour cela on note $Im(b) = b(H)$ l'image de H par b et on pose $F = \overline{Im(b)}$.

1. Pour $x \in Im(b)$, on pose $c_1(x) = a(y)$ où $y \in H$ est n'importe quel élément de H tel que $x = b(y)$. Montrer que $c_1 : Im(b) \to H$ est bien défini (c'est-à-dire que $c_1(x)$ est indépendante du choix de y).

2. Montrer que $c_1 : Im(b) \to H$ est une application linéaire continue, avec $|||c_1||| \leq 1$ (l'espace vectoriel $Im(b)$ est muni de la norme de H).

3. Soit $x \in F$ et (x_n) une suite d'éléments de $Im(b)$ qui converge vers x de H. Montrer que la suite $(c_1(x_n))$ possède une limite.

4. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $c_2 : F \to H$ telle que $c_2 = c_1$ sur $Im(b)$ et telle que $|||c_2||| \leq 1$ (où l'espace vectoriel F est muni de la norme $\|\cdot\|$).

5. On définit finalement $c : H \to H$ par

$$c(x) = c_2\left(\Pi_F(x)\right) \qquad \forall x \in H\ .$$

   Montrer que c est une application linéaire continue telle que

$$a = c \circ b, \qquad |||c||| \leq 1\ .$$

Solution :

1. *Soient* y_1 *et* y_2 *tels que* $x = b(y_1) = b(y_2)$. *Notons que, par linéarité de* b, $b(y_2 - y_1) = 0$, *ce qui entraîne que*

$$\|a(y_2 - y_1)\| \leq \|b(y_2 - y_1)\| = 0\ .$$

   Donc $a(y_2 - y_1) = 0$, *ce qui prouve par linéarité de* a *que* $a(y_1) = a(y_2)$. *La définition de* c_1 *est bien indépendante du choix de* y.

2. *Si* $x_1, x_2 \in Im(b)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *il existe* $y_1, y_2 \in H$ *tels que* $x_1 = b(y_1)$ *et* $x_2 = b(y_2)$. *Alors, par linéarité de* b, $\lambda x_1 + x_2 = b(\lambda y_1 + y_2)$ *et donc, par linéarité de* a,

$$c_1(\lambda x_1 + x_2) = a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda a(y_1) + a(y_2) = \lambda c_1(x_1) + c_1(x_2)$$

Par conséquent c_1 *est linéaire. Evaluons sa norme. Soit* $x \in Im(b)$ *et* $y \in H$ *tel que* $x = b(y)$. *Alors*

$$\|c_1(x)\| = \|a(y)\| \leq \|b(y)\| = \|x\| \ .$$

Donc c_1 *est continue avec* $|||c_1||| \leq 1$.

3. *Soit* $x \in F$ *et* (x_n) *une suite d'éléments de* $Im(b)$ *qui converge vers* x *de* H. *Alors la suite* (x_n) *est de Cauchy puisqu'elle converge. Comme*

$$\|c_1(x_n) - c_1(x_m)\| \leq \|x_n - x_m\|$$

on en déduit que la suite $(c_1(x_n))$ *est également de Cauchy. Or* H *est complet. Donc* $(c_1(x_n))$ *possède une limite dans* H.

4. *Pour* $x \in F$, *définissons* $c_2(x)$ *comme la limite de n'importe quelle suite* $(c_2(x_n))$ *où* (x_n) *est une suite dans* $Im(b)$ *qui converge vers* x *(il en existe puisque* $F = \overline{Im(b)}$*). Notons que la limite ne dépend pas de la suite choisie. En effet, si* (x_n^1) *et* (x_n^2) *convergent toutes les deux vers* x, *alors la suite* (x_n) *définie par* $x_n = x^1_{n/2}$ *si* n *pair,* $x_n = x^2_{(n-1)/2}$ *converge aussi vers* x. *Donc* $(c_1(x_n))$ *possède une limite, qui doit alors être la limite commune de* $(c_1(x_n^1))$ *et* $(c_1(x_n^2))$.

   La linéarité de c_2 *est une conséquence directe de la définition. De plus,* $c_2(x) = c_1(x)$ *si* $x \in Im(b)$ *(prendre comme suite* (x_n) *la suite constante égale à* x*). Pour finir, montrons la continuité. Si* $x \in F$ *et* (x_n) *est une suite de* $Im(b)$ *qui converge vers* x, *alors*

$$\|c_2(x)\| = \lim \|c_1(x_n))\| \leq \lim \|x_n\| = \|x\|$$

puisque la norme est continue. Donc c_2 *est continue et* $|||c_2||| \leq 1$.

5. *Notons que* c *est linéaire puisque* c_2 *et* Π_F *le sont (rappelons que lorsque* F *est un espace vectoriel fermé,* Π_F *est linéaire). De plus, pour tout* $x \in H$, $b(x) \in Im(b)$ *et donc* $c(b(x)) = c_1(b(x)) = a(x)$ *par définition de* c *et de* c_2. *Reste à montrer que* c *est continue avec* $|||c||| \leq 1$. *En effet comme* Π_F *est la projection sur un sous-espace vectoriel fermé, l'application* Π_F *est linéaire continue et de norme* 1 *(rappelons que, pour tout* $x \in H$, $\Pi_F(x)$ *est caractérisé par*

$$\langle x - \Pi_F(x), y \rangle = 0 \qquad \forall x \in F \ .$$

Donc, en prenant $y = \Pi_F(x)$ *on obtient par Cauchy-Schwarz*

$$\|\Pi_F(x)\|^2 = \langle \Pi_F(x), \Pi_F(x) \rangle = \langle x, \Pi_F(x) \rangle \leq \|x\| \ \|\Pi_F(x)\| \ .$$

Donc $\|\Pi_F(x)\| \leq \|x\|$ *pour tout* $x \in H$, *ce qui prouve que* $|||\Pi_F||| \leq 1$.*) Alors* c *est continue comme composée de deux applications continues et*

$$|||c||| \leq |||c_2||| \ |||\Pi_F||| \leq 1 \ .$$

Exercice 3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé séparable (on rappelle que E est séparable s'il existe une suite (x_n) d'éléments de E qui est dense dans E). Soit F un sous-espace vectoriel non vide de E.

1. Montrer que F est séparable (toujours pour la norme $\|\cdot\|$).
   Indication : si (x_n) est une suite d'éléments de E dense dans E, on pourra considérer la suite (y_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est un élément de F tel que

$$\|y_n - x_n\| \leq \inf_{z\in F} \|z - x_n\| + \frac{1}{n+1}$$

2. On suppose que F est dense dans E et que E est séparable. Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de F qui est dense dans E.

Solution :

1. *Soit (x_n) une suite d'éléments de E dense dans E, et (y_n) une suite d'éléments de F telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|y_n - x_n\| \leq \inf_{z\in F} \|z - x_n\| + \frac{1}{n+1}$$

   Montrons que (y_n) est dense dans F. Fixons $y \in F$, $\epsilon > 0$ et $m \geq 3/\epsilon$. Alors, comme la suite (x_n) est dense dans E, la suite $(x_n)_{n\geq m}$ l'est également. Par conséquent il existe $n \geq m$ tel que $\|y - x_n\| \leq \epsilon/3$. Mais alors

$$\inf_{z\in F} \|z - x_n\| \leq \|y - x_n\| \leq \epsilon/3 \ ,$$

   ce qui prouve que

$$\|y_n - x_n\| \leq \inf_{z\in F} \|z - x_n\| + \frac{1}{n+1} \leq 2\epsilon/3 \ .$$

   Par inégalité triangulaire, on a

$$\|y_n - y\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - y\| \leq 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \ .$$

   La suite (y_n) est bien une suite d'éléments de F qui est dense dans F.

2. *On suppose que F est dense dans E et que E est séparable. D'après la question précédente, il existe une suite (y_n) d'éléments de F qui est dense dans F. Montrons que cette suite est également dense dans E. Fixons $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Comme F est dense dans E, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| \leq \epsilon/2$. Or (y_n) est dense dans F donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_n - y\| \leq \epsilon/2$. Par inégalité triangulaire, on a*

$$\|y_n - x\| \leq \|y_n - y\| + \|y - x\| \leq \epsilon \ .$$

   La suite (y_n) est donc une suite d'éléments de F qui est dense E.

Barême : (sur 23 points)

- Questions de cours : 5 points
- Exercice 1 : 6 points
- Exercice 2 : 8 points
- Exercice 3 : 4 points