Université de Paris-Dauphine
Année universitaire 2011-2012
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel du 16/11/2011
Durée 2 heure

Les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention contraire, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Les exercices sont indépendants.

Questions de cours

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Que signifie "E est complet" ?
2. Enoncer le théorème de Riesz.
3. Enoncer le théorème de projection sur un ensemble convexe.
4. A partir de ce théorème de projection, (re)démontrer que, si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, alors la projection Π_F sur F existe et est une application linéaire continue de norme 1.

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \qquad \forall f \in E\ .$$

On définit l'application linéaire $\Phi : E \to E$ par

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in E\ .$$

1. Montrer que Φ est continue sur E avec $|||\Phi||| \leq 1$.
2. Montrer que $|||\Phi||| = 1$.
3. Existe-t-il $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \|f\|_1$?
4. Montrer que l'application
$$N(f) = \|\Phi(f)\|_1 \qquad \forall f \in E$$
définit une norme sur E.
5. Montrer que la norme N n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2: Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa norme associée notée $\|\cdot\|$. La projection sur un sous-ensemble convexe fermé non vide C de H est notée Π_C. Soient a et b deux applications linéaires continues de H dans H telles que

$$\|a(x)\| \ \leq\ \|b(x)\| \qquad \forall x \in H\ .$$

L'objet de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $c : H \to H$ telle que $a = c \circ b$ et $|||c||| \leq 1$. Pour cela on note $Im(b) = b(H)$ l'image de H par b et on pose $F = \overline{Im(b)}$.

1. Pour $x \in Im(b)$, on pose $c_1(x) = a(y)$ où $y \in H$ est n'importe quel élément de H tel que $x = b(y)$. Montrer que $c_1 : Im(b) \to H$ est bien défini (c'est-à-dire que $c_1(x)$ est indépendante du choix de y).
2. Montrer que $c_1 : Im(b) \to H$ est une application linéaire continue, avec $|||c_1||| \leq 1$ (l'espace vectoriel $Im(b)$ est muni de la norme de H).
3. Soit $x \in F$ et (x_n) une suite d'éléments de $Im(b)$ qui converge vers x de H. Montrer que la suite $(c_1(x_n))$ possède une limite.
4. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $c_2 : F \to H$ telle que $c_2 = c_1$ sur $Im(b)$ et telle que $|||c_2||| \leq 1$ (où l'espace vectoriel F est muni de la norme $\|\cdot\|$).
5. On définit finalement $c : H \to H$ par

$$c(x) = c_2\left(\Pi_F(x)\right) \qquad \forall x \in H\ .$$

   Montrer que c est une application linéaire continue telle que

$$a = c \circ b, \qquad |||c||| \leq 1\ .$$

Exercice 3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé séparable (on rappelle que E est séparable s'il existe une suite (x_n) d'éléments de E qui est dense dans E). Soit F un sous-espace vectoriel non vide de E.

1. Montrer que F est séparable (toujours pour la norme $\|\cdot\|$).
   Indication : si (x_n) est une suite d'éléments de E dense dans E, on pourra considérer la suite (y_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est un élément de F tel que

$$\|y_n - x_n\| \leq \inf_{z \in F} \|z - x_n\| + \frac{1}{n+1}$$

2. On suppose que F est dense dans E et que E est séparable. Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de F qui est dense dans E.

Barême indicatif : (sur 22 points)

- Questions de cours : 5 points
- Exercice 1 : 5 points
- Exercice 2 : 8 points
- Exercice 3 : 4 points