Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel. Mardi 16 novembre 2010, de 13h30 à 15h30.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Définir une base hilbertienne.
2. Citer le théorème de Lax-Milgram.
3. Citer le théorème de Riesz sur le dual d'un espace de Hilbert.
4. Énoncer le théorème de projection sur un convexe d'un espace de Hilbert puis montrer la partie ≪ unicité ≫ de ce résultat.

2. Exercice.

Dans cet exercice, on considère l'espace $E = C^0([0,2];\mathbb{R})$. On notera $\|\cdot\|_{C^0}$ sa norme usuelle.

1. On introduit sur E :
$$\|f\|_b := \max_{x\in[0,2]} |xf(x)|.$$
   (a) Justifier que cette application est bien définie et est une norme sur E.
   (b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout f de E on ait :
$$\|f\|_b \leq C\|f\|_{C^0}.$$
   (c) Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :
$$\|f_n\|_{C^0} = 1 \text{ et } \|f_n\|_b \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$
   (d) Les normes $\|\cdot\|_{C^0}$ et $\|\cdot\|_b$ sont-elles équivalentes ?
   (e) Montrer que E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_b$. (On pourra par exemple introduire pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_n \in E$ donnée par $g_n(x) := \min(1/\sqrt{x}, n)$.)
2. (a) Justifier rapidement que
$$C := \{f \in E \;/\; \|f\|_{C^0} \leq 1\},$$
   est un convexe fermé de E. Soit la fonction constante $g = 2$. Calculer
$$d(g, C) := \inf\{\|f - g\|_{C^0},\ f \in C\}.$$
   (b) Montrer qu'il existe $f \in C$ tel que $\|f - g\|_{C^0} = d(g, C)$. Y a-t-il unicité d'un tel f ?

3. Exercice.

Dans cette exercice, H est l'espace de Hilbert réel $L^2([0,1];\mathbb{R})$. Soit

$$F := \left\{ f \in C^0([0,1]) \ / \ f(0) = 0 \right\}.$$

1. Soit g la fonction constante $g = 1$. Calculer
$$d(g,F) := \inf \left\{ \|f - g\|_H, \ f \in F \right\}.$$
2. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f - g\|_H = d(g,F)$?
3. Le sous-espace F est-il fermé dans H ?
4. Le sous-espace F est-il dense dans H ?

4. Exercice.

On considère $\ell^2(\mathbb{N})$, l'espace des suites réelles (x_k) telles que

$$\sum x_k^2 < +\infty.$$

On rappelle que $\ell^2(\mathbb{N})$ n'est autre que l'espace $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$, et ν est la mesure de comptage. En particulier, $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{N}} u(j) v(j) \, d\nu(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j v_j.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on introduit $e^k = (e^k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ la suite de terme général $e^k_n = \delta_{kn}$ (avec le symbole de Kronecker).

1. Montrer que la famille $\{f_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ définie par :
$$f_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{2k+1} - e^{2k}) \ \text{ et } \ f_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{2k+1} + e^{2k})$$
forme une base hilbertienne de ℓ^2.
2. On considère pour $n \in \mathbb{N}$ les parties suivantes de ℓ^2 :
$$\begin{aligned} X_n &= \left\{ x \in \ell^2 \ / \ x_{2n} = 0 \right\} \\ Y_n &= \left\{ x \in \ell^2 \ / \ x_{2n+2} = 2^{-n} x_{2n+1} \right\}. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in N$, X_n et Y_n sont des sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^2.
   (b) En déduire que
   $$X := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ et } Y := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n,$$
   sont des sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^2.
   (c) Montrer que la suite u de terme général $u_{2n} = 2^{-n}$ pour les indices pairs et $u_{2n+1} = 0$ pour les indices impairs appartient à ℓ^2. Montrer qu'elle n'appartient pas à $X + Y$ (on pourra supposer que $u = x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, et essayer de déterminer les termes de x et y).
   (d) Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace de ℓ^2 composé des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $\mathcal{D} \subset X + Y$ (on pourra, pour un élément v de $\mathcal{D}$, "poser l'équation $v = x + y$", d'inconnues $x \in X$ et $y \in Y$).
   (e) L'espace $X + Y$ est-il fermé dans ℓ^2 ?