Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

Partiel. Mardi 17 novembre 2009, de 11 à 13 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse (sauf le questionnaire de l'exercice* 2*). Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.*

1. Questions de cours.

1. Citer le théorème de continuité d'une application bilinéaire.
2. Montrer que dans un espace de Hilbert, étant donnée une suite (x_n) de vecteurs orthogonaux deux à deux, on a
$$\sum x_n \text{ convergente dans } H \Longleftrightarrow \sum \|x_n\|^2 \text{ convergente dans } \mathbb{R}.$$
3. Citer le théorème de projection sur un convexe (en incluant la "caractérisation").
4. Citer le théorème de convergence dominée.

2. Questionnaire

On ne demande ici que les réponses (sous forme "1 et 3", ou "a, b et d", etc.). Le barême donne 1 *point pour une bonne réponse,* -1 *point pour une mauvaise,* 0 *pour une question non répondue. N'est considérée comme bonne réponse que celle donnant la liste complète et exacte des objets répondant à la question. Un total négatif sur l'exercice est reporté sur la note globale.*

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) Si un espace vectoriel normé est complet, alors c'est un espace de Banach.
   (b) Les espaces de Hilbert sont des cas particuliers d'espaces vectoriels normés.
   (c) Les espaces vectoriels normés sont des cas particuliers d'espaces métriques.
   (d) Le noyau d'une application linéaire continue entre deux evn est un sous-espace fermé.
2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) On peut définir l'intégrale de Lebesgue de toute fonction mesurable positive.
   (b) On peut définir l'intégrale de Lebesgue de toute fonction mesurable.
   (c) La convergence presque partout implique la convergence dans L^p.
   (d) On a l'égalité $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ presque partout dans $\mathbb{R}$.

3. Pour chaque i, on introduit l'evn E_i (muni de sa norme standard N_i) et une application linéaire $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$E_1 = \mathbb{R}^3, \quad N_1((x,y,z)) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad f_1((x,y,z)) := 2x - 3y + z,$$

$$E_2 = C^0([0,1]), \quad N_2(u) := \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|, \quad f_2(u) := u(0),$$

$$E_3 = C^0([0,1]), \quad N_3(u) := \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|, \quad f_3(u) := \int_0^1 x^2 u(x)\,dx.$$

Pour quels i l'application f_i est-elle continue ?

4. Pour chaque i, on introduit l'espace E_i muni d'une fonction $N_i : E_i \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$E_1 = C^0([0,1]),\ N_1(u) := 2 \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|, \quad E_2 = C^0([0,1]),\ N_2(u) := \int_0^{1/2} |u(x)|\,dx,$$
$$E_3 = C^0([0,1]),\ N_3(u) := \inf_{x\in[0,1]} |u(x)|.$$

Pour quels i le couple (E_i, N_i) forme-t-il un espace vectoriel normé ?

5. Pour chaque i, on introduit l'espace réel E_i suivant :

$$E_1 = C^0(]0,1[), \quad E_2 = L^1(]0,1[), \quad E_3 = L^2(]0,1[),$$

et on introduit $a(\cdot,\cdot)$ de la façon suivante :

$$a(u,v) := \int_0^1 u(x)v(x)\,dx.$$

Pour quels i l'espace E_i muni de a forme-t-il un espace de Hilbert ?

3. Exercice.

Dans cette exercice, H est un espace de Hilbert réel.

1. (a) Soient A et B deux parties quelconques de H. Montrer que si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
   (b) Soit A une partie de H. Montrer que $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Montrer que $\overline{F}^\perp = F^\perp$.
   (c) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel fermé, $V^{\perp\perp} = V$. En déduire que pour un sous-espace F général (non nécessairement fermé), $F^{\perp\perp} = \overline{F}$, puis que

   $$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

   (d) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de H. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

2. On suppose maintenant que H est muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit I la partie de H composée des $u \in H$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \langle u, e_{2k}\rangle = 0.$$

Soit P la partie de H composée des $u \in H$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \langle u, e_{2k+1}\rangle = 0.$$

(a) Montrer que I et P sont des sous-espaces vectoriels fermés de H (ne faire que l'un des deux).

(b) Montrer que $I^\perp = P$ et $P^\perp = I$.

4. Exercice.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie, et φ une fonction positive mesurable sur Ω. On définit

$$K = \left\{ u \in L^2(\Omega)\,;\ |u(x)| \leq \varphi(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

1. Montrer que K est un convexe non vide de $L^2(\Omega)$.

2. Montrer que K est un fermé de $L^2(\Omega)$. (Indication : on pourra considérer une suite d'éléments de K qui converge, et en extraire une sous-suite convenable.)

3. Pour $f \in L^2(\Omega)$ (dont on prend un représentant quelconque, toujours noté f), on introduit les parties de Ω suivantes :

   $$\Omega_+ := \{x \in \Omega \ / \ f(x) > \varphi(x)\}, \quad \Omega_- := \{x \in \Omega \ / \ f(x) < -\varphi(x)\}, \quad \Omega_= := \{x \in \Omega \ / \ |f(x)| \leq \varphi(x)\}.$$

   Montrer que Ω_+, Ω_- et $\Omega_=$ sont trois parties de Ω, disjointes et de réunion Ω.

   Montrer que la fonction g donnée par :

   $$g(x) = \mathbf{1}_{\Omega_+}(x)\varphi(x) - \mathbf{1}_{\Omega_-}(x)\varphi(x) + \mathbf{1}_{\Omega_=}(x)f(x),$$

   satisfait

   $$|g(x)| \leq |f(x)| \text{ p.p. tout } x.$$

   Montrer qu'elle appartient à K.

4. Montrer que $g = p_K(f)$ où $p_K(f)$ désigne la projection de f sur K.

5. (Question bonus : à ne traiter que si vous avez fait tout le reste.) Où avons-nous utilisé que Ω est de mesure finie ?