Université Paris Dauphine
Master 1 de Mathématiques et Applications
2023-2024

Processus discrets

Responsables du cours

Pierre Cardaliaguet, bureau C606, e-mail : `cardaliaguet@ceremade.dauphine.fr`
et Julien Claisse (cours en anglais), bureau C604, e-mail : `claisse@ceremade.dauphine.fr`

Evaluation

Un partiel (P) et un examen (E). Note finale : $\max\{0,4P+0,6E, E\}$.

Plan du cours

Ce cours est une simple reprise des cours de F. Simenhaus, J. Lehec et F. Huveneers.

Dans tout ce cours, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité. Un processus discret est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ce cours est composé de trois parties :

1. Espérance conditionnelle
2. Martingales en temps discret
3. Chaînes de Markov

N'hésitez pas à signaler toute erreur dans ce poly !

Table des matières

1 Espérance conditionnelle

1.1 Définition de l'espérance conditionnelle

La notion d'espérance conditionnelle est donnée par le théorème suivant, qui indique que cette notion est bien définie. On fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Théorème 1. *Soit $Y \in L^1(\mathcal{F})$. Il existe une unique variable aléatoire $Z \in L^1(\mathcal{F})$ avec les deux propriétés suivantes :*

1. *Z est dans $L^1(\mathcal{F})$ et est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$,*
2. *Pour toute variable aléatoire Z' bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{B}$,*

$$\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ').$$

On définit

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \; = \; Z.$$

Remarque 1. *Bien noter que $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ est une variable aléatoire, et que cette v.a. est $\mathcal{B}-$mesurable et intégrable. En particulier $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ n'est définie que presque sûrement.*

Remarque 2. *Lorsque $\mathcal{B} = \sigma(X)$, où X est une v.a., on note*

$$\boxed{\mathbb{E}(Y|X) \; := \; \mathbb{E}(Y|\sigma(X)).}$$

Remarquons que, comme toute v.a. qui est $\sigma(X)-$mesurable est une fonction borélienne de X (cf. le lemme 1 ci-dessous), il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(Y|X) = f(X)$.

Remarque 3. *On admettra que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute variable aléatoire Z' bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{B}$,*
$$\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ').$$
2. *Pour tout évènement $A \in \mathcal{B}$,*
$$\mathbb{E}(Y 1_A) = \mathbb{E}(Z 1_A).$$
3. *Pour toute variable aléatoire Z' mesurable par rapport à $\mathcal{B}$ et telle que YZ' est intégrable,*
$$\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ').$$

La seconde condition est souvent la plus facile à vérifier. La dernière est très utile.

Remarque 4. *Comme dans le cadre classique de l'intégrale de Lebesgue, on peut également définir l'espérance conditionnelle pour une v.a. Y positive (mais pas forcément intégrable). On peut montrer alors l'existence d'une unique v.a. Z, prenant ses valeurs dans $[0, +\infty]$, telle que*

1. *Z est $\mathcal{B}-$mesurable,*
2. *Pour toute variable aléatoire Z' positive et mesurable par rapport à $\mathcal{B}$,*

$$\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ')$$

(ces deux espérances pouvant être égales à $+\infty$)

Le théorème 1 sera prouvé plus loin, après la discussion de quelques cas particuliers où le calcul de l'espérance conditionnelle est très simple.

1.2 Variables aléatoires discrètes

Conditionnement par rapport à un évènement : Rappelons que, si A et B sont deux évènements (i.e., $A, B \in \mathcal{F}$), avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Cela conduit naturellement à définir l'espérance conditionnelle d'une v.a. $Y \in L^1(\mathcal{F})$ sachant B (avec $B \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}(B) > 0$) comme

$$\mathbb{E}(Y|B) = \frac{\mathbb{E}(Y 1_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Bien noter la différence de nature avec l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu définie dans le théorème 1 : $\mathbb{E}(Y|B)$ est un réel tandis que $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ (où $\mathcal{B}$ est une tribu) est une v.a.

L'objectif de cette partie est d'expliquer le lien entre les deux notions lorsque $\mathcal{B} = \sigma(X)$, avec X une v.a. discrète. On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω est *discrète* si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Autrement dit, X est discrète s'il existe des réels x_i, $i = 1, 2, \ldots$ (en nombre fini ou dénombrable) tels que

$$X = \sum_{i=1,2,\ldots} x_i 1_{X=x_i}.$$

On supposera toujours, sans perte de généralité, que les x_i sont distincts et que $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$ pour tout i.

Remarque 5. *On note 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble A. On a utilisé la notation $1_{x=x_i}$ pour désigner $1_{\{x_i\}}(x)$.*

Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$,

$$X = 0.1_{X=0} + 1.1_{X=1}, \qquad \text{avec } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p > 0,\ \mathbb{P}(X = 1) = p > 0.$$

Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} n 1_{X=n}, \qquad \text{avec } \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} > 0.$$

Soit X une v.a. discrète et Y une v.a. intégrable. Nous allons voir que, dans ce cas, le calcul de $\mathbb{E}(Y|X)$ se fait facilement.

Proposition 1. *Soient X une v.a. discrète et $Y \in L^1(\mathcal{F})$. Soient $\{x_1, x_2, \dots, \}$ l'ensemble des valeurs prises par X (avec $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$ et $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$ pour tout i). Considérons la fonction*

$$u : \{x_1, x_2, \dots\} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto u(x) = \mathbb{E}(Y|X = x).$$

Alors

$$\mathbb{E}(Y|X) = u(X),$$

c'est-à-dire explicitement

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(Y|X = x_i) 1_{X=x_i} = \sum_{i=1,2,\dots} \frac{\mathbb{E}(Y\, 1_{X=x_i})}{\mathbb{P}(X = x_i)} 1_{X=x_i}.$$

Pour montrer la proposition, nous aurons besoin de donner une forme explicite des fonctions mesurables par rapport à $\sigma(X)$. Pour cela, on rappelle un résultat très utile de théorie de la mesure :

Lemme 1. *Une variable Y est mesurable par rapport à $\sigma(X)$ si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.*

On en vient à la démonstration du résultat principal de cette partie.

Preuve de la proposition 1. Posons

$$Z = u(X) = \sum_{i=1,2,\dots} \frac{\mathbb{E}(Y\, 1_{X=x_i})}{\mathbb{P}(X = x_i)} 1_{X=x_i}.$$

Alors Z est mesurable par rapport à $\sigma(X)$. De plus Z est intégrable puisque

$$\mathbb{E}(|Z|) \leq \sum_{i=1,2,\dots} \frac{|\mathbb{E}(Y\, 1_{X=x_i})|}{\mathbb{P}(X = x_i)} \mathbb{E}(1_{X=x_i}) \leq \sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(|Y|\, 1_{X=x_i}) = \mathbb{E}(|Y|) < \infty.$$

Soit enfin Z' une v.a. bornée et mesurable par rapport à $\sigma(X)$. D'après le lemme 1, il existe une fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Z' = f(X)$. Donc $Z' = \sum_{i=1,2,\dots} c'_i 1_{X=x_i}$, avec $c'_i = f(x_i)$. Alors, par convergence dominée,

$$\mathbb{E}(YZ') = \sum_{i=1,2,\dots} c'_i \mathbb{E}(Y 1_{X=x_i}) = \sum_{i=1,2,\dots} c'_i \mathbb{E}(Y|X = x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$

tandis que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ZZ') = \mathbb{E}(u(X)Z') &= \sum_{i=1,2,\dots} c'_i \mathbb{E}(u(X) 1_{X=x_i}) = \sum_{i=1,2,\dots} c'_i u(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1,2,\dots} c'_i \mathbb{E}(Y|X = x_i)\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(YZ').\end{aligned}$$

Comme $Z \in L^1(\sigma(X))$ et $\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ')$ pour toute v.a. Z' bornée et mesurable par rapport à $\sigma(X)$, on conclut que $Z = \mathbb{E}(Y|X)$ par la définition de l'espérance conditionnelle. $\square$

1.3 Variables aléatoires à densité

Un autre cas où le calcul de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$ est particulièrement simple est le cas où le couple (X, Y) possède une densité. Soit un couple de variables (X, Y) de densité jointe $p_{X,Y}(x, y)$, et de densités marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$. On suppose que $X \in L^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $p_X(x) > 0$, on définit la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ par

$$p_{Y|X=x}(y) \;=\; \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)},$$

ainsi que l'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$ par

$$\mathbb{E}(Y|X = x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} y p_{Y|X=x}(y)\mathrm{d}y.$$

Définissons ensuite la fonction réelle u définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$ par $u(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$. Montrons la

Proposition 2.

$$\mathbb{E}(Y|X) \;=\; u(X).$$

Démonstration. Nous devons vérifier que $u(X)$ vérifie les deux points du théorème/définition 1. D'abord, on a bien que $u(X)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X)$, d'après le lemme 1. De plus, $u(X)$ est intégrale puisque, par définition de u et Fubini,

$$\mathbb{E}(|u(X)|) \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y| p_{Y|X=x}(y) p_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} |y| p_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbb{E}(|Y|) < \infty.$$

Soit ensuite Z' une variable bornée mesurable par rapport à $\sigma(X)$. Toujours d'après le lemme 1, il existe une fonction borélienne f telle que $Z' = f(X)$. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(YZ') \;&=\; \mathbb{E}(Yf(X)) \\
&=\; \int_{\mathbb{R}^2} y f(x) p_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} y\mathrm{d}y \right) f(x) p_X(x)\mathrm{d}x \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x) p_X(x)\mathrm{d}x \\
&=\; \mathbb{E}(u(X)f(X)) \;=\; \mathbb{E}(u(X)Z').
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé l'égalité

$$p_{X,Y}(x, y) \;=\; \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} p_X(x)$$

valide avec la convention $p_{X,Y}(x, y)/p_X(x) = 0$ si $p_X(x) = 0$ □

1.4 Variables aléatoires dans $L^2(\Omega)$

Nous débutons maintenant la preuve du théorème 1 d'existence et d'unicité de l'espérance conditionnelle. Fixons $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Nous commençons par supposer que $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Le résultat suivant dit que $\mathbb{E}(Y|, \mathcal{B})$ est donné par une projection sur l'espace $L^2(\mathcal{B})$ des v.a. qui sont dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et qui sont mesurables par rapport à $\mathcal{B}$. Rappelons que $L^2(\mathcal{B})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Rappelons le théorème de projection.

Théorème 2. *Si $Y \in L^2(\mathcal{F})$, alors Y se décompose de façon unique sous la forme*

$$Y \ = \ Y^{\|} + Y^{\perp}$$

où $Y^{\|} \in L^2(\mathcal{B})$ et $Y^{\perp} \in (L^2(\mathcal{B}))^{\perp}$ est orthogonal à tout élément de $L^2(\mathcal{B})$.

Proposition 3. *Si $Y \in L^2(\mathcal{F})$, alors*

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \ = \ Y^{\|}.$$

Démonstration. Comme $Y^{\|} \in L^2(\mathcal{B})$ avec $L^2(\mathcal{B}) \subset L^1(\mathcal{F})$, $Y^{\|}$ est intégrable et $\mathcal{B}-$mesurable. Montrons maintenant que, pour toute variable aléatoire $Z' \in L^2(\mathcal{B})$,

$$\mathbb{E}(YZ') \ = \ \mathbb{E}(Y^{\|}Z').$$

Comme $Y = Y^{\perp} + Y^{\|}$ (avec les notations du théorème de projection), on a, pour toute variable aléatoire Z' $\mathcal{B}-$mesurable et borné (et donc dans $L^2(\mathcal{B})$),

$$\mathbb{E}(YZ') \ = \ \mathbb{E}(Y^{\perp}Z') + \mathbb{E}(Y^{\|}Z') \ = \ \mathbb{E}(Y^{\|}Z').$$

□

1.5 Variables aléatoires dans $L^1(\Omega)$

On procède maintenant à la démonstration de l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ lorsque Y est seulement intégrable (théorème 1). Nous notons $L^1(\mathcal{B})$ le sous-espace de $L^1(\mathcal{F})$ des fonctions qui sont mesurables par rapport à $\mathcal{B}$. On rappelle que, comme $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité, $L^2(\mathcal{F}) \subset L^1(\mathcal{F})$, et que la notion de projection orthogonale n'est pas définie dans L^1.

Pour démontrer le théorème 1, nous aurons d'abord besoin d'un résultat de monotonie :

Lemme 2. *Soient $Y_1, Y_2 \in L^1(\mathcal{F})$ telles que $Y_1 \leq Y_2$ p.s., soit Z_1 vérifiant les deux points du théorème 1 pour Y_1, et soit Z_2 vérifiant les deux points du théorème 1 pour Y_2. Alors $Z_1 \leq Z_2$ p.s.*

Démonstration. Considérons la variable $Z' = 1_{(Z_1 - Z_2) \geq 0}$ qui est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$. On a $Z' \geq 0$ p.s. et donc, par hypothèse,

$$0 \;\geq\; \mathbb{E}((Y_1 - Y_2)Z') \;=\; \mathbb{E}((Z_1 - Z_2)Z') \;\geq\; 0$$

puisque $(Z_1 - Z_2)Z' = (Z_1 - Z_2)1_{(Z_1 - Z_2) \geq 0} \geq 0$ p.s. Dès lors $\mathbb{E}((Z_1 - Z_2)Z') = 0$ et donc $(Z_1 - Z_2)Z' = 0$ p.s. puisque cette variable est positive. Ceci implique $Z_1 \leq Z_2$ p.s. □

On rappelle aussi le théorème de convergence monotone : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives sur Ω, et si la variable aléatoire X désigne sa limite presque sûre (pouvant éventuellement être infinie sur un ensemble de mesure non nulle), alors $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ pour $n \to \infty$ (toutes ces expressions pouvant éventuellement être infinies).

Démonstration du théorème 1.

Unicité. Soient Z_1 et Z_2 deux variables qui vérifieraient le résultat. Par la monotonie, on a $Z_1 \leq Z_2$ et $Z_2 \leq Z_1$ p.s., et donc $Z_1 = Z_2$ p.s.

Existence. Supposons d'abord $Y \geq 0$ p.s. On définit la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ par

$$Y_n = Y \wedge n, \quad n \geq 1.$$

Les variables Y_n sont bornées et donc dans L^2, et on peut définir $Z_n = \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{B})$ pour tout $n \geq 1$. Observons que

1. La suite (Y_n) est croissante et donc, par monotonie, la suite (Z_n) l'est aussi.
2. Les variables Y_n sont positives et donc, par monotonie, les variables Z_n aussi.

Par le théorème de convergence monotone, nous concluons que Z_n tend vers une variable Z et que $\mathbb{E}(Z_n) \to \mathbb{E}(Z)$ pour $n \to \infty$. Or

$$0 \leq \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Y_n) \leq \mathbb{E}(Y)$$

où l'égalité vient de ce que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^{\|}) + \mathbb{E}(Y_n^{\perp}) = \mathbb{E}(Z_n) + \langle Y_n^{\perp}, 1 \rangle$ et le produit scalaire est nul car 1 est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$. Nous concluons que $\mathbb{E}(Z) < +\infty$ et par monotonie et positivité, que la convergence de Z_n vers Z a lieu dans L^1.

Voyons que Z a bien les deux propriétés voulues. D'abord, Z est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$ par passage à la limite. Ensuite, pour tout Z' bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(YZ') \;&=\; \mathbb{E}((Y - Y_n)Z') + \mathbb{E}(Y_n Z') \;=\; \mathbb{E}((Y - Y_n)Z') + \mathbb{E}(Z_n Z') \\
&=\; \mathbb{E}((Y - Y_n)Z') + \mathbb{E}((Z_n - Z)Z') + \mathbb{E}(ZZ'),
\end{aligned}$$

et les deux premiers termes du membre de droite tendent vers 0 par convergence dans L^1 lorsque $n \to \infty$. Dès lors, $\mathbb{E}(YZ') = \mathbb{E}(ZZ')$.

Supposons finalement le cas général $Y \in L^1$. On décompose

$$Y \ = \ Y_+ - Y_-,$$

où $Y_+ \geq 0$ et $Y_- \geq 0$. Chacun de ces termes est dans L^1. On leur applique la première partie de la preuve, pour obtenir les variables Z_+ et Z_- correspondantes, et on vérifie que $Z_+ - Z_-$ a bien les deux propriétés voulues. □

1.6 Quelques propriétés

Nous donnons quelques propriétés de l'espérance conditionnelle. Les démonstrations sont laissées en exercice. Soient $Y, Y' \in L^1(\mathcal{F})$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Les premières propriétés sont communes à l'espérance (non conditionnelle) :

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(Y + \lambda Y'|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) + \lambda\mathbb{E}(Y'|\mathcal{B})$ (linéarité).
2. Si $Y \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \geq 0$ p.s. (positivité).
3. (Jensen conditionnel) Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et mesurable, et si $\varphi(Y) \in L^1$, alors $\varphi(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})) \leq \mathbb{E}(\varphi(Y)|\mathcal{B})$ p.s. .
   (en particulier, si $Y \in L^p$, alors $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \in L^p$).
4. $\mathbb{E}(1|\mathcal{B}) = 1$.

Les cinq propriétés suivantes sont propres à l'espérance conditionnelle :

1. Si Y est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$, alors $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) = Y$.
2. Si Y est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$ et si YY' et Y' sont intégrables, alors $\mathbb{E}(YY'|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(Y'|\mathcal{B})$.
3. Si Y est indépendante de $\mathcal{B}$, alors $\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(Y)$.
4. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(Y)$.
5. Si $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}')|\mathcal{B}) \ = \ \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})|\mathcal{B}') \ = \ \mathbb{E}(Y|\mathcal{B}')$.

Les propriétés de convergence de l'intégrale conditionnelle sont très similaires à celles de l'espérance classique.

1. (convergence dans L^p) $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{B}) \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ dans L^p si $Y_n \to Y$ dans L^p (où $p \in [1, +\infty]$).
2. (convergence monotone) $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{B}) \nearrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ si $0 \leq Y_n \nearrow Y$.
3. (Fatou) $\mathbb{E}[\liminf_n Y_n|\mathcal{B}) \leq \liminf_n E(Y_n|\mathcal{B})$ si $Y_n \geq 0$.
4. (Convergence dominée) $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{B}) \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ p.s. et dans L^1 si $Y_n \to Y$ p.s. et $|Y_n| \leq Z \in L^1$.

Discutons finalement d'un cas où le calcul de l'espérance conditionnelle se ramène à un simple calcul d'espérance :

Théorème 3. *On suppose que X, Y sont deux v.a., avec Y indépendante de $\mathcal{B}$ et X mesurable par rapport à $\mathcal{B}$. Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Alors*

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)|\mathcal{B}) = \psi(X) \qquad \text{où } \psi(x) = \mathbb{E}(\phi(x,Y)) \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Notons d'abord que $\psi(X)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$ et bornée. Soit Z' une v.a. $\mathcal{B}-$mesurable bornée. La loi $\mathbb{P}_{X,Y,Z'}$ s'écrit, puisque Y est indépendante de (X, Z'), $\mathbb{P}_{X,Y,Z'} = \mathbb{P}_Y \otimes \mathbb{P}_{X,Z'}$. Alors, par Fubini,

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)Z') = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x,y) z' d\mathbb{P}_{X,Y,Z'}(x,y,z') = \int_{\mathbb{R}^2} (\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) d\mathbb{P}_Y(y)) z' d\mathbb{P}_{X,Z'}(x,z')$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}(\phi(x,Y)) z' d\mathbb{P}_{X,Z'}(x,z') = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x) z' d\mathbb{P}_{X,Z'}(x,z') = \mathbb{E}(\psi(X)Z').$$

Donc $\mathbb{E}(\phi(X,Y)|\mathcal{B}) = \psi(X)$. □

1.7 Variables aléatoires gaussiennes

Si $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien, alors $\mathbb{E}(X_0|\sigma(X_1, \ldots, X_n))$ est une combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_n$:

Proposition 4. *On suppose que $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien. Alors il existe des constantes réelles $c_0, c_1 \ldots, c_N$ telles que*

$$\mathbb{E}(X_0|\sigma(X_1, \ldots, X_n)) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i.$$

Ce résultat est laissé en exercice.