Processus discrets : Exercices

Responsable du cours :

Pierre Cardaliaguet, bureau C606, e-mail :
`cardaliaguet@ceremade.dauphine.fr`

TD 1 : espérance conditionnelle

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $n \geq 1$ et soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition finie de Ω. Soit $\mathcal{B} = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ la tribu engendrée par cette partition.

1. Décrire la tribu $\mathcal{B}$.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j:\mathbb{P}(A_j)>0} \frac{\mathbb{E}(X 1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega).$$

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. Montrer que

$$\mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables. Déterminer les espérances conditionnelles suivantes :

1. $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1]$,
2. $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$.

Exercice 4.

1. Soit X, Y deux variables i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{E}(X|XY)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $\mathbb{E}(X^2|X)$, $\mathbb{E}(X|X^2)$ et $\mathbb{E}(X^3|X^2)$.
3. Soient X et Y des variables i.i.d. uniformes sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Calculer

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sin X|\cos X), \quad \mathbb{E}\left(X|\mathrm{e}^X\right), \\ &\mathbb{E}(\cos X|\sin Y), \quad \mathbb{E}(\sin X|\cos(X+2Y)). \end{aligned}$$

Exercice 5 (v.a. à densité)**.** Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\alpha\beta}{y} \exp\left\{-\frac{\alpha x}{y} - \beta y\right\} \mathbf{1}_{x>0}\mathbf{1}_{y>0},$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont des paramètres. Déterminer $\mathbb{E}(X|Y)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6. Soit Z une variable exponentielle de paramètre 1 et soit $t > 0$. On pose $X = \min(Z, t)$ et $Y = \max(Z, t)$. Calculer $\mathbb{E}[Z \mid X]$ et $\mathbb{E}[Z \mid Y]$.

Exercice 7. Soit X une variable de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. On pose

$$\mathrm{var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]^2.$$

Montrer que

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{var}(X \mid \mathcal{G})\right] + \mathrm{var}\left(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\right).$$

Exercice 8. Soit $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ un vecteur Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Γ non dégénérée. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\mathbb{E}[X_0 \mid X_1, \dots, X_n] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad \text{p.s.}$$

et déterminer les poids λ_i en fonction de Γ.
Indication : les coordonnées d'un vecteur Gaussien sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire uniforme de support $[-\pi, \pi]$. Trouver des bases hilbertiennes de $L^2(\sigma(X))$, $L^2(\sigma(\cos X))$ et $L^2(\sigma(\sin X))$ dans lesquelles les projections orthogonales

$$L^2(\sigma(X)) \ni Y \mapsto \mathbb{E}(Y|\sigma(\cos X)) \qquad \text{et} \qquad L^2(\sigma(X)) \ni Y \mapsto \mathbb{E}(Y|\sigma(\sin X))$$

sont des opérateurs diagonaux. *Indication : Pensez aux séries de Fourier !*