Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Quelques rappels de cours d'optimisation - M1 - 2019-2020

1. **Problèmes en temps discret**
   Nous considérons le problème en horizon fini

$$V(p,x) = \inf_{\mathbf{u}_p \in \mathbb{U}_p} \sum_{n=p}^{N-1} L_n(x_n, u_n) + g(x_N)$$

où l'état $\mathbf{x}_p = (x_n)_{n=p}^N$ est défini par récurrence par

$$\begin{cases} x_p = \bar{x} \\ x_{n+1} = f_n(x_n, u_n), \qquad n = p,\ p+1, \dots,\ N-1. \end{cases}$$

Théorème 0.1 (Programmation dynamique)**.** *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\begin{cases} V(p,x) & = \inf_{u \in U_p} \{L_p(x,u) + V(p+1, f_p(x,u))\}, \quad \forall p \in \{0, \dots, N-1\} \\ V(N,x) & = g(x). \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $u_n^*(x)$ un "feedback optimal" vérifiant

$$L_n(x, u_n^*(x)) + V(n+1, f_n(x, u_n^*(x))) = \inf_{u \in U_n} \{L_n(x,u) + V(n+1, f_n(x,u))\}.$$

Proposition 0.1. *Soit $\bar{x} \in X$ une condition initiale fixée. Si on définit par récurrence les suites $(\bar{u}_n)$ et $(\bar{x}_n)$ par*

$$\bar{x}_0 = \bar{x}, \qquad \bar{u}_n = u_n^*(\bar{x}_n), \qquad \bar{x}_{n+1} = f_n(\bar{x}_n, \bar{u}_n),$$

alors la suite $(\bar{u}_n)$ est optimale pour le problème de contrôle discret, i.e.,

$$V(0, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} L_n(\bar{x}_n, \bar{u}_n) + g(\bar{x}_N).$$

2. **Calcul des variations**
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A, B \in \mathbb{R}^N$. On considère le problème de minimisation sans contrainte sur l'espace $X = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^N)$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in X,\ x(a)=A,\ x(b)=B} \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt\ .$$

Théorème 0.2 (Equation d'Euler)**.** *Si $L = L(t,x,p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et si la fonction $x \in X$ est un minimum du problème $(\mathcal{P})$, alors la fonction $t \to \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) \qquad \forall t \in [a,b]\ .$$

3. **Contrôle optimal**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ une condition initiale fixée. On considère le problème de contrôle optimal :

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T L(t, x(t), u(t))\ dt + g(x(T))$$

sous la contrainte que $u : [0, T] \to U$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On définit le *Hamiltonien du système* $H : [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$H(t, x, p) = \sup_{u \in U} \left\{ -\langle p, f(t, x, u)\rangle - L(t, x, u) \right\}.$$

On suppose que H est de classe C^1.

Théorème 0.3 (Principe du maximum)**.** *Si (x^*, u^*) est optimal dans le problème ci-dessus, alors il existe une application $p^* : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que le couple (x^*, p^*) vérifie le système*

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0, T] \\ \dot{p^*}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p^*(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0,\ p^*(T) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*(T)). \end{cases}$$

De plus

$$-\langle p^*(t), f(t, x^*(t), u^*(t))\rangle - L(t, x^*(t), u^*(t)) = H(t, x^*(t), p^*(t)) \qquad t \in [0, T].$$

On définit la fonction valeur $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)} \int_{t_0}^T L(t, x(t), u(t))\ dt + g(x(T) \tag{1}$$

sous la contrainte que $u : [0, T] \to U$ est mesurable et que $x(\cdot)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 0.4. *On a, pour tout $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$,*

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\ dt + V(t_1, x(t_1))$$

sous la contrainte que le couple $(x(\cdot), u(\cdot))$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème 0.5 (de vérification)**.** *Supposons que*

(a) $W : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *sur* $]0, T[\times \mathbb{R}^N$ *et* C^0 *sur* $[0, T] \times \mathbb{R}^N$,

(b) W satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W}{\partial t}(t,x) + H(t,x,\dfrac{\partial W}{\partial x}(t,x)) = 0 \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ W(T,x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

(c) il existe une application continue $\tilde{u}^* : (0,T) \times \mathbb{R}^N \to U$ telle que, pour tout $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^N$,

$$-\langle \frac{\partial W}{\partial x}(t,x), f(t,x,\tilde{u}^*(t,x))\rangle - L(t,x,\tilde{u}^*(t,x)) = H(t,x,\frac{\partial W}{\partial x}(t,x)).$$

Alors $W = V$ et un feedback optimal est donné par $\tilde{u}^*$.