Université Paris Dauphine
2022-2023

Introduction aux séries temporelles

Annale d'examen

Examen partiel

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Exercice 1 (Filtrage d'un bruit blanc)**.** Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires (réelles) indépendantes, identiquement distribuées, de carré intégrable, et telles que

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par

$$\varepsilon_t = U\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où U est une variable aléatoire de carré intégrable, indépendante de $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et telle que

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible dont on explicitera la variance.
2. Le processus $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il un bruit blanc fort ?

On définit le filtre $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ par $\psi_k = 2^{-k}$ pour $k \geq 1$ et $\psi_k = 0$ pour $k \leq 0$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire
$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$
est bien définie et de carré intégrable.
4. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et causal.
5. Calculer l'autocovariance $\gamma_X(h)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de σ^2 et ρ^2.

Exercice 2 (Modèle AR(1) bruité)**.** Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(1) s'écrivant

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad (\star)$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance σ^2.

1. Justifier le fait que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.
2. Calculer la fonction d'autocovariance de $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

On admettra dans la suite qu'un processus stationnaire ayant la même fonction d'autocovariance que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un MA(1) admettant la représentation $(\star)$.

On considère le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{5}{18}$. On suppose que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est entaché d'une erreur d'observation : on observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{1}{6}$ et non-corrélé [1] avec $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

1. C'est-à-dire $\mathbb{E}[\varepsilon_t\eta_\ell] = 0$ pour tous $t, \ell \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}$$

est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il admet la représentation $(\star)$ pour des valeurs θ et σ^2 que l'on déterminera.

4. En déduire que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est solution d'une équation ARMA que l'on explicitera.

Exercice 3 (Construction d'un processus stationnaire)**.** Soient U une variable aléatoire sur $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ de loi $\mathbb{P}_U$, et Z une variable aléatoire réelle, indépendante de U, de carré intégrable et centrée. On pose

$$X_t = Z\exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est stationnaire centré.
2. Montrer que la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est donnée par

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2]\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Montrer que si la loi $\mathbb{P}_U$ est symétrique [2], alors γ_X est réelle et paire.
4. Montrer que si ξ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, alors la fonction caractéristique $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ de ξ définit pour $t \in \mathbb{Z}$ la fonction de covariance d'un processus stationnaire à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2. La loi $\mathbb{P}_U$ est symétrique si pour toute $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bornée, on a $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega)\mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega)\mathbb{P}_U(d\omega)$.

English version

Exercise 1 (White noise filtering)**.** Let $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of (real-valued) square integrable, independent random variables, with same distribution, and such that

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be the random process defined by

$$\varepsilon_t = U\xi_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

where U is a square integrable random variable, independent of $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and such that

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Show that the process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise and compute its variance.
2. Is $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ a strong white noise?

Let us define $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ by $\psi_k = 2^{-k}$ for $k \geq 1$ and $\psi_k = 0$ for $k \leq 0$.

3. Show that for every $t \in \mathbb{Z}$, the random variable

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

is well-defined and square integrable.

4. Show that the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary and causal.
5. Compute the autocovariance γ_X of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and express it with σ^2 and ρ^2.

Exercise 2 (Noisy AR(1) process)**.** Let $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a MA(1) process with representation

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \ \ t \in \mathbb{Z}, \qquad (\star)$$

where $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance σ^2.

1. Show that $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary.
2. Compute the autocovariance function of $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

We will admit in the sequel that a stationary process with the same autocovariance function as $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a MA(1) process admitting representation $(\star)$. Let us consider the random process $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}$$

where $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{5}{18}$. We assume that $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is blurred by a systematic experimental noise: we observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

where $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{1}{6}$ and uncorrelated [3] with $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3. Show that the process $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \ t \in \mathbb{Z}$$

is a MA(1) process i.e. satisfies $(\star)$ for a set of values θ and σ^2 to be determined.

3. This means that $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_t] = 0$ for every $t \in \mathbb{Z}$.

4. Derive that $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a solution to an ARMA equation to be determined.

Exercise 3 (Constructing a stationary process)**.** Let U be a random variable on $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ with law $\mathbb{P}_U$, and let Z be a square integrable, real-valued random variable, independent of U and centred. Set

$$X_t = Z\exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Show that the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ with values in $\mathbb{C}$ is stationary and centred.
2. Show that the autocovariance function of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$is given by

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2]\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Show that if the law $\mathbb{P}_U$ is symmetric [4], then γ_X is real-valued and even.
4. Show that if ξ is a random variable with values in $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, then the characteristic function $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ of ξ defines for every $t \in \mathbb{Z}$ the autocovariance function of a stationary process with values in $\mathbb{C}$.

4. The law $\mathbb{P}_U$ is symmetric if, for every bounded $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, one has $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega)\mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega)\mathbb{P}_U(d\omega)$.

Examen final

Durée : 2 heures
Conditions : sans calculatrice ni documents
Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction

Exercice 1. Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus liés par la relation suivante

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t,$$
$$X_t = \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $\eta = (\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux bruit blancs faibles décorrélés [1], de variance 1, et ϕ et ψ sont deux réels distincts dans $]0, 1[$.

1. Montrer que X est bien défini et stationnaire.
2. Montrer que $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par
$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
est stationnaire.
3. En déduire que Y est bien défini et stationnaire.

On note B l'opérateur retard, défini par $BX_t = X_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par
$$Z_t = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$
est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.
5. En déduire que Z est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il vérifie
$$Z_t = \zeta_t + \vartheta\, \zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$
où $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$.
6. En déduire que Y est un processus ARMA(p, q) dont on précisera les ordres p et q.
7. On suppose
$$\vartheta + \phi \neq 0 \ \text{ et } \ \vartheta + \psi \neq 0.$$
Montrer sans calcul qu'il existe une représentation causale de Y.
8. Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples
$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi}\Big(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x}\Big).$$
9. En déduire la représentation causale
$$Y_t = \sum_{\ell\geq 0} a_\ell\, \zeta_{t-\ell}$$
pour une suite $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$ que l'on explicitera.

1. C'est-à-dire pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_s] = 0$.

Exercice 2. Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort de variance $\sigma^2 > 0$ et $\phi \in]-1,1[$.

1. Montrer que Y est bien défini.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose

$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer sa moyenne et sa fonction d'autocovariance en fonction de μ, σ^2 et ϕ.
3. Justifier l'existence de la densité spectrale f_X de X et l'exprimer avec σ^2 et ϕ.

Pour un entier $n \geq 1$, on observe (une réalisation) du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Montrer que l'estimateur $\widehat{\mu}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ en probabilité lorsque $n \to \infty$.
5. En notant $\mathcal{N}(0, v^2)$ la loi normale centrée de variance v^2, montrer que

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\mu}_n - \mu\big) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$

   lorsque $n \to \infty$, et expliciter v^2 en fonction de σ^2 et ϕ.
6. On suppose σ^2 et ϕ connus. Soit $\alpha \in]0,1[$. Construire un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1-\alpha$.
7. Pour quelle valeur limite de ϕ obtient-on l'intervalle de confiance ayant la plus grande précision ?
8. On ne suppose plus ϕ et σ^2 connus. Proposer la construction d'un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1-\alpha$.

English version

Exercise 1. Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be two stochastic processes that satisfy

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t,$$
$$X_t = \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $\eta = (\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are two uncorrelated[2] weak white noises with unit variance, and ϕ and ψ are two distinct real numbers in $(0, 1)$.

1. Show that X is well-defined and stationary.
2. Show that $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by
$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
is stationary.
3. Derive that Y is well-defined and stationary.

We write B for the delay operator, defined by $BX_t = X_{t-1}$ for $t \in \mathbb{Z}$.

4. Show that $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by
$$Z_t = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$
is stationary and compute its autocovariance function.
5. Derive that Z is a MA(1) process, meaning that it can be written as
$$Z_t = \zeta_t + \vartheta\, \zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$
where $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\vartheta \in \mathbb{R}$.
6. Derive that Y is a ARMA(p, q) process and identify its parameters p and q.
7. We assume that
$$\vartheta + \phi \neq 0 \text{ and } \vartheta + \psi \neq 0.$$
Prove (with no calculation) that there exists a causal representation for Y
8. Prove the decomposition
$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi}\Big(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x}\Big).$$
9. Derive the causal representation
$$Y_t = \sum_{\ell\geq 0} a_\ell\, \zeta_{t-\ell}$$
for a sequence $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ of $\ell^1(\mathbb{Z})$ to be determined.

Exercise 2. Let $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a stochastic process such that

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a strong white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\phi \in (-1, 1)$.

2. This means that for every $s, t \in \mathbb{Z}$, we have $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_s] = 0$.

1. Show that Y is well-defined.

Let $\mu \in \mathbb{R}$ and
$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Show that $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary. Compute its mean and autocovariance function as a function of μ, σ^2 and ϕ.
3. Prove the existence of a spectral density f_X de X and express it with σ^2 and ϕ.

For an integer $n \geq 1$, one observes (a realisation) of the random vector $(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Prove that the estimator $\widehat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ converges to μ in probability as $n \to \infty$.
5. Prove that
$$\sqrt{n}\big(\widehat{\mu}_n - \mu\big) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$
as $n \to \infty$, where $\mathcal{N}(0, v^2)$ denotes the centred Gaussian law with variance v^2 and compute v^2 as a function of σ^2 and ϕ.
6. We assume that σ^2 and ϕ are known. Let $\alpha \in (0, 1)$. Build a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.
7. For which limiting value for ϕ do we have the best accuracy for this interval?
8. We do not assume ϕ nor σ^2 known anymore. Give a suggestion for constructing a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 20 novembre 2013
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+1} + bZ_t + cZ_{t-1}$ soit causal ;
2. Calculer $(1-B)^{2014}X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^2$ est du second ordre ? Stationnaire ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA$(1,1)$ $X_t = 2X_{t-1} + Z_t - Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_\alpha X = F_\beta Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Examen final

Durée : 2 heures
Date : jeudi 23 janvier 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. Soit $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$, et B l'opérateur retard.

1. Exprimer $Y_t = (1 - B)X_t$ en fonction de Z_t, où $X_t = t + 1 + Z_t$;
2. Le processus Y_t est-il stationnaire ? Préciser sa moyenne et son autocovariance ;
3. Soit $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$. A-t-on $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$? (Justifier) ;
4. Montrer que si $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors on peut définir $F_\alpha Z$ dans L^2.

Exercice 2. Soit Z un $\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$.

1. On considère l'équation $\mathrm{ARMA}(1, 1)$ $X_t = Z_t + 2Z_{t-1} + (1/2)X_{t-1}$. Trouver une solution stationnaire X. Est-elle unique ? Causale ? Inversible ?
2. Exprimer l'équation et sa solution X avec des filtres, et avec l'opérateur retard B ;
3. Exprimer l'autocovariance γ_X de X en fonction de α tel que $X = F_\alpha Z$;
4. Comment se comporte $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ quand $|t - s| \to \infty$?
5. Calculer le prédicteur $\mathrm{proj}(X_2, H_{1,1})$, puis en déduire $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,1})$, $t \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. Soit Z $\sim$$\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ et $\alpha, \beta \in]-1, 1[$, et B l'opérateur retard. Trouver une solution stationnaire de l'équation $\mathrm{ARMA}(\infty, \infty)$ suivante : $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k B^k X = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k B^k Z$.

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de $(X_1, \ldots, X_n)$ lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X. Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A\cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ.

1. Donner la définition de la moyenne empirique $\overline{X}_n$;
2. Calculer le biais de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ.
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.
Ce sujet reprend des éléments de l'examen partiel et de l'examen final de l'année.

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+10} + bZ_t + cZ_{t-10}$ soit causal ;
2. Calculer $(B-1)^{2014} X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^4$ est du second ordre ? Stationnaire ? Que se passe-t-il si Z est un bruit blanc fort ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA$(1, 1)$ $2X_t = 4X_{t-1} + 2Z_t - 2Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2 Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_\alpha X = F_\beta Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de $(X_1, \ldots, X_n)$ lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X. Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A\cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ.

1. Donner la définition de la moyenne empirique $\overline{X}_n$;
2. Calculer le biais de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ.
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 19 novembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Version française

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et a, b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA$(1,1)$ suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc$(0,\sigma^2)$, $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

English version

Exercise 1. Let $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0,1)$, and let a, b be two reals.

1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Is $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise ? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. In which case $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA$(1,1)$ equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise$(0, \sigma^2)$, let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

Examen final

Durée : 2 heures
Date : vendredi 23 janvier 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. On considère l'équation ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où les polynômes Φ et Θ s'écrivent $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$ et $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. Dans cet exercice, on admet tous les résultats du chapitre 2 sur le filtrage (il ne faut donc pas les démontrer).

1. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, alors l'équation possède une unique solution stationnaire ;
2. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors la solution stationnaire est causale ;
3. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors la solution stationnaire est inversible ;
4. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si X est la solution stationnaire de l'équation alors X est également solution de l'équation ARMA(p', q') de polynômes Φ/Q et Θ/Q où Q est le PGCD des polynômes Φ et Θ. Préciser p', q'.

Exercice 2. On considère à présent l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X. Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X, puis $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \to \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si $\overline{X}_n$ désigne la moyenne empirique calculée avec $X_1, \ldots, X_n$, démontrer que $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 3. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2, et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_q$ de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \leq \cdots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \cdots \leq |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \leq \cdots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \cdots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2. Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j} z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1} z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j} z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1} z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*, qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

Exercise 1. Let us consider the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where the polynomials Φ are Θ take the form $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$ and $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. In this exercice, we admit all the results of chapter 2 on filtering (do not prove them here).

1. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle then the equation admits a unique stationary solution;
2. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is causal;
3. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if Θ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is invertible;
4. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if X is the stationary solution then X is also the stationary solution of the ARMA(p',q') equation with polynomials Φ/Q and Θ/Q where Q is the GCD of Φ and Θ. Give p', q'.

Exercise 2. Let us consider the ARMA$(2,1)$ equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X, and then $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s,t) = (2015,1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if $\overline{X}_n$ denotes the empirical mean computed with $X_1, \ldots, X_n$, then prove that $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

Exercise 3. Let X ne the linear process solution of the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2, and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots $a_1, \ldots, a_p$ and $b_1, \ldots, b_q$ of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \leq \cdots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \cdots \leq |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \leq \cdots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \cdots \leq |b_q|$$

where $0 \leq r \leq p$ and $0 \leq s \leq q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2. Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j} z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1} z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j} z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1} z).$$

1. Prove that the ARMA(p,q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_*, which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Ce sujet reprend des éléments des sujets et exercices de l'année.

Exercice 1 (ARMA$(1,1)$)**.** Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels, et où Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution (X_t) stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t), et préciser le comportement de cette fonction à l'infini.

Exercice 2 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance pour un AR(1))**.** Soit Z un bruit blanc fort gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2. Soit

$$Y_t = \theta + X_t,$$

où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\gamma).$$
2. Lorsque $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, et $n = 200$, on obtient $\widehat{\theta}_n = 0.1$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. Soit Γ_n la matrice de covariance du vecteur aléatoire $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$. Montrer que Γ_n est inversible ;
4. On propose un autre estimateur de θ défini par
$$\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1}Y^{(n)} \quad \text{où} \quad \mathbf{1}_n := (1,\ldots,1)^\top.$$
Monter que $\widetilde{\theta}_n$ est l'estimateur des moindres carrés $\min_\theta \|\theta\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)}\|$;
5. Montrer que $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = \theta$ et
$$\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n};$$
6. En utilisant la décomposition de Cholesky
$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \ldots, \sigma^2\right)^{-1}\Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i,j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi\mathbf{1}_{i=j+1},$$
montrer que $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$ ont asymptotiquement la même variance.

English version

Exercise 1 (ARMA$(1,1)$)**.** Let us consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals, and where Z is a white noise of mean 0 and variance σ^2.

1. Under which conditions on ϕ and θ there exists a stationary solution (X_t)?
2. Under which condition this stationary solution is causal?

In the sequel we suppose that these condition are satisfied.

3. Give a representation of the the solution (X_t) as a series of the form $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Discuss the convergence of the series and the nature of the convergence. Give the value of the coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Compute the autocorrelation function (X_t). How it behaves at infinity?

Exercise 2 (Estimation of the mean and confidence interval for an AR(1))**.** Let Z be a strong Gaussian white noise with mean 0 and variance σ^2. Let

$$Y_t = \theta + X_t,$$

where (X_t) is an AR(1) process solution of $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, where $|\phi| < 1$. We would like to estimate θ with $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. Let $\widehat{\theta}_n$ be the empirical mean of $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, namely

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Compute $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)$ and provide the expression of γ defined by
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0,\gamma).$$
2. When $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, and $n = 200$, we get $\widehat{\theta}_n = 0.1$. Construct a 95% asymptotic confidence interval for θ. Can we say that $\theta = 0$?
3. Show that the covariance matrix Γ_n of $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$ is invertible;
4. We consider now another estimator of θ defined by
$$\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1}Y^{(n)} \quad \text{où} \quad \mathbf{1}_n := (1,\ldots,1)^\top.$$
Show that $\widetilde{\theta}_n$ is the least square estimator $\min_\theta \|\theta\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)}\|$;
5. Show that $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = 0$ and
$$\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n};$$
6. By using the Cholesky decomposition
$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \ldots, \sigma^2\right)^{-1}\Phi_n \quad \text{where} \quad \Phi_n(i,j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi\mathbf{1}_{i=j+1},$$
show that $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$ have asymptotically the same variance.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 4 novembre 2015 8h30-10h30
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

Exercice 1.

1. Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X = F_\alpha Z$. À quelle condition le processus X est causal ? Inversible ? À la fois causal et inversible ? ;
2. Calculer $\Delta^2 X_t$ où $\Delta = 1 - B$ est l'opérateur différence et où $X_t = 1 + t + Z_t$;
3. Montrer que si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des processus stationnaires indépendants alors le processus produit $(X_tY_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer son autocovariance ;
4. Montrer que l'autocovariance d'un processus MA(1) est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ qu'on calculera.

Exercice 2. Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$;
4. Calculer l'autocovariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, et donner son comportement à l'infini.

Exercice 3.

1. Démontrer que lorsque Z est gaussien alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ est gaussienne, et calculer sa moyenne et sa variance ;
2. Démontrer que lorsque les v.a.r. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont i.i.d. et dans L^4 alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ possède un moment d'ordre 4 qu'on calculera.

English version

In the whole text, $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise of zero mean and variance σ^2.

Exercise 1.

1. Let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $X = F_\alpha Z$. Under which condition the process X is causal ? Invertible ? Both causal and invertible ?;
2. Compute $\Delta^2 X_t$ where $\Delta = 1-B$ is the difference operator and where $X_t = 1+t+Z_t$;
3. Show that if $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are independent stationary processes then the product process $(X_tY_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is also stationary and compute its autocovariance;
4. Show that the autocovariance of an MA(1) process is the Fourier transform of a finite positive measure on $[-\pi,\pi]$, and compute this measure.

Exercise 2. We consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals.

1. Under which condition on ϕ and θ there exists a stationary solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?
2. Under which condition this solution is causal?

In the sequel we assume that these conditions are satisfied.

3. Give a representation of the solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ in terms of a series $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Justify the convergence of the series, and make precise the notion of convergence and the value of the coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$;
4. Compute the autocovariance of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, and give its behavior at infinity.

Exercise 3.

1. Show that when Z is gaussian then for any $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ is gaussian, and compute its mean and variance;
2. Show that when the r.r.v. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are i.i.d. and in L^4 then for all $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ admits a finite moment of order 4 and compute it.

Examen final

Durée : 2 heures
Date : lundi 11 janvier 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1 (Sport)**.** Soit Z un bruit blanc de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Soient θ et φ des réels fixés tels que $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$. Démontrer que l'équation $\mathrm{ARMA}(1,1)$ $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ n'a pas de solution stationnaire ;
2. Soient θ et φ des réels fixés dans l'intervalle $]-1,1[$. Démontrer que la solution stationnaire de l'équation $\mathrm{ARMA}(1,1)$ $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ est aussi solution de l'équation $\mathrm{ARMA}(\infty,\infty)$ $X_t + \sum_{k=1}^\infty (-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^\infty \varphi^k Z_{t-k}$;
3. Calculer une solution stationnaire de l'équation $\mathrm{ARMA}(2,1)$ $X_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$; Est-elle unique ? Causale ? Inversible ? Construire des solutions non stationnaires ;
4. Démontrer que si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire $\mathrm{ARMA}(p,q)$ dont le polynôme Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que $|\gamma_X(h)| \leq Ce^{-c|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
5. Démontrer que pour toute variable aléatoire réelle Y de moyenne 0 et de variance 1, le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $X_t = Y$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire et vérifie $\underline{\lim}_{|h|\to\infty} |\gamma_X(h)| > 0$, puis préciser si X est solution d'une équation ARMA ;
6. Démontrer que si X est un processus stationnaire avec $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la quantité $n\mathrm{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n))$ converge quand $n \to \infty$ vers une valeur et la préciser.

Exercice 2 (Autocorrélation partielle)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne 0 et d'autocovariance γ_X avec $\gamma_X(0) > 0$. On pose, pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\} \\ E^+_{t,p} &:= X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E^-_{t-(p+1),p} &:= X_{t-(p+1)} - \mathrm{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Démontrer que
$$\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1} E^-_{t-(p+1),p} \quad \text{où} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\langle X_t \,,\, E^-_{t-(p+1),p}\rangle}{\|E^-_{t-(p+1),p}\|_2^2};$$
2. Démontrer que
$$\kappa_{p+1} = \frac{\langle E^+_{t,p}, E^-_{t-(p+1),p}\rangle}{\|E^+_{t,p}\|_2 \|E^-_{t-(p+1),p}\|_2} \in [-1,1].$$

Exercice 3 (Processus stationnaires vectoriels)**.** Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tous $s,t \in \mathbb{Z}$ et tous $j,k \in \{1,\dots,d\}$ on a $\mathbb{E}(Z_{s,j}Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t,j=k}$.

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2\to 2} := \max_{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|_2=1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation $\mathrm{AR}(1)$ vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir ;
2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

English version

Exercise 1 (Sport)**.** Let Z be a white noise of mean 0 and variance $\sigma^2 > 0$.

1. Let θ and φ be fixed reals such that $|\varphi| = 1$ and $\varphi+\theta \neq 0$. Prove that the ARMA$(1,1)$ equation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ does not have a stationary solution;
2. Let θ and φ be fixed reals in the interval $]-1,1[$. Prove that the stationary solution of the ARMA$(1,1)$ equation $X_t-\varphi X_{t-1} = Z_t+\theta Z_{t-1}$ is also solution of the ARMA(∞,∞) equation $X_t + \sum_{k=1}^{\infty}(-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k Z_{t-k}$;
3. Compute a stationary solution of the ARMA$(2,1)$ equation $X_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$; Is it unique ? Causal ? Invertible ? Construct non stationary solutions;
4. Prove that if $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is an ARMA(p,q) stationary process with a polynomial Φ which does not vanish on the closed unit disc, then there exist constants $C, c > 0$ such that $|\gamma_X(h)| \leq Ce^{-c|h|}$ for any $h \in \mathbb{Z}$;
5. Prove that for any real random variable Y of mean 0 and variance 1, the process $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by $X_t = Y$ for any $t \in \mathbb{Z}$ is stationary and satisfies $\underline{\lim}_{|h|\to\infty} |\gamma_X(h)| > 0$, and specify if it solves an ARMA equation;
6. Prove that if X is a stationary process with $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ then $n\mathrm{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n))$ converges as $n \to \infty$ to some value and specify this value.

Exercise 2 (Partial autocorrelation)**.** Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a stationary process of mean 0 and autocovariance γ_X with $\gamma_X(0) > 0$. We set, for any $t \in \mathbb{Z}$ and $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\} \\ E^+_{t,p} &:= X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E^-_{t-(p+1),p} &:= X_{t-(p+1)} - \mathrm{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Prove that
$$\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1}E^-_{t-(p+1),p} \quad \text{where} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\left\langle X_t \,,\, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2};$$
2. Prove that
$$\kappa_{p+1} = \frac{\left\langle E^+_{t,p}, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^+_{t,p}\right\|_2\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2} \in [-1,1].$$

Exercise 3 (Multivariate stationary processes)**.** Let $d \geq 1$ be an integer and $\sigma^2 > 0$ be a real. For any $t \in \mathbb{Z}$, let $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})^\top$ be a centered random vector of $\mathbb{R}^d$. We suppose that for any $s,t \in \mathbb{Z}$ and any $j,k \in \{1,\ldots,d\}$ we have $\mathbb{E}(Z_{s,j}Z_{t,k}) = \sigma^2\mathbf{1}_{s=t,j=k}$.

1. Let $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ be a square matrix such that $\|\Phi\|_{2\to2} := \max_{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|_2=1}\|\Phi x\|_2 < 1$. Construct a vector valued process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution of the vectorial AR(1) equation $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Prove that it is unique in some sense;
2. Let X be as before. Suppose that Φ is diagonal. Give a sufficient condition on Z in order to make the marginal processes $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ independent (justify).

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : vendredi 15 juillet 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note :

— Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
— Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
— Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
— Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et a, b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA$(1,1)$ suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc$(0,\sigma^2)$, $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

Exercice 3. On considère l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X. Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X, puis $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \to \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si $\overline{X}_n$ désigne la moyenne empirique calculée avec $X_1, \ldots, X_n$, démontrer que $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 4. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p,q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2, et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_q$ de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \leq \cdots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \cdots \leq |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \leq \cdots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \cdots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2. Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p,q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*, qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

Exercise 1. Let $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0,1)$, and let a, b be two reals.

1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Is $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise ? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. In which case $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA$(1,1)$ equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise$(0,\sigma^2)$, let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

Exercise 3. Let us consider the ARMA$(2,1)$ equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X, and then $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s,t) = (2015, 1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if $\overline{X}_n$ denotes the empirical mean computed with $X_1, \ldots, X_n$, then prove that $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

Exercise 4. Let X ne the linear process solution of the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2, and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots $a_1, \ldots, a_p$ and $b_1, \ldots, b_q$ of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \le \cdots \le |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \le \cdots \le |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \le \cdots \le |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \le \cdots \le |b_q|$$

where $0 \le r \le p$ and $0 \le s \le q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2. Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j} z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1} z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j} z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1} z).$$

1. Prove that the ARMA(p,q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_*, which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : lundi 31 octobre 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note :

— Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
— Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
— Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
— Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Dans tout ce qui suit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$.

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = Z_t + at^{2016} + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer explicitement $\Delta^{2017}X$ en fonction de Z, a, b (justifier la réponse).
2. Existe-t-il une solution stationnaire à l'équation ARMA$(1, 2)$ (justifier la réponse)
$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad ?$$
Si oui, la calculer, préciser son unicité, causalité, et inversibilité.
3. Existe-t-il une solution stationnaire à l'équation AR(p) $X_t - X_{t-p} = Z_t$, $p \geq 1$?

Exercice 2 (Inversibilité d'un processus linéaire)**.** Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X = F_\alpha Z$.

1. Donner en détail la démonstration du fait que X est bien défini p.s. et dans L^2 ;
2. Donner en détail la démonstration du fait que le processus X est stationnaire et donner en détail le calcul de sa fonction d'autocovariance γ_X en fonction de σ ;
3. À quelle condition sur α le processus X est un filtre causal de Z ?
4. Lorsque la série de puissances P_α est un polynôme, donner une condition suffisante sur P_α pour que X soit un filtre inversible de Z (justifier la réponse)
5. Lorsque la série de puissances P_α est géométrique, c'est-à-dire que $\alpha_k = \rho^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ pour un $\rho \in [0, 1[$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, démontrer que X est un filtre inversible de Z.

Exercice 3 (Déterminisme des processus harmoniques)**.** Dans cet exercice on note $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus du second ordre. On dit que X est *déterministe* lorsqu'on a la propriété $X_t \in H_{t-1} := \overline{\mathrm{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où l'adhérence est prise dans L^2, autrement dit $X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\mathrm{proj}(\cdot, H_{t-1})$ est la projection orthogonale dans L^2 sur le sous-espace vectoriel fermé H_{t-1}. On dit que X est *harmonique* lorsqu'il existe des variables aléatoires A et B non corrélées, centrées, de même variance σ^2, et une constante réelle θ telles que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$.

1. Démontrer que si X est harmonique alors il est stationnaire et déterministe ;
2. Démontrer que si X est stationnaire alors il y a équivalence entre. . .
   (a) X n'est pas déterministe ;
   (b) il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$;
   (c) pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$.

English version

In all the sequel $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise of mean 0 and variance σ^2.

Exercise 1. The questions of this exercise are independent (but not equally distributed).

1. Let $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be the process defined for every $t \in \mathbb{Z}$ by $X_t = Z_t + at^{2016} + b$ where $a, b \in \mathbb{R}$. Compute explicitly $\Delta^{2017}X$ in terms of Z, a, b (justify the answer).
2. Is there any stationary solution to the ARMA$(1,2)$ equation (justify the answer)
$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad ?$$
If yes, compute it, and discuss its uniqueness, causality, and invertibility.
3. Is there any stationary solution to the AR(p) equation $X_t - X_{t-p} = Z_t$, $p \geq 1$?

Exercise 2 (Invertiblility of a linear process)**.** Let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $X = F_\alpha Z$.

1. Give in detail the proof that X is well defined, a.s. and in L^2;
2. Give in detail the proof that X is stationary and give in detail the computation of its autocovariance γ_X in terms of σ;
3. Under which condition on α the process X is a causal filter of Z?
4. When the power series P_α is a polynomial, give a sufficient condition on P_α to ensure that X is an invertible filter of Z (justify the answer)
5. When the power series P_α is geometric, namely $\alpha_k = \rho^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ for some $\rho \in [0,1[$ and any $k \in \mathbb{Z}$, prove that X is an invertible filter of Z.

Exercise 3 (Harmonic processes determinism)**.** In all this exercise $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a second order process. We say that X is *deterministic* when $X_t \in H_{t-1} := \overline{\mathrm{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}}$ for any $t \in \mathbb{Z}$, where the closure is taken in L^2, in other words $X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})$ for any $t \in \mathbb{Z}$, where $\mathrm{proj}(\cdot, H_{t-1})$ is the orthogonal projection in L^2 on the closed sub vector space H_{t-1}. We say that X is *harmonic* when for some random variables A and B which are not correlated, centered, and with same variance σ^2, and for some real constant θ, we have $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ for any $t \in \mathbb{Z}$.

1. Prove that if X is harmonic then it is stationary and deterministic.
2. Prove that if X is stationary then the following properties are equivalent:
   (a) X is not deterministic;
   (b) there exists $t \in \mathbb{Z}$ such that $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$;
   (c) for any $t \in \mathbb{Z}$ we have $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$.

Examen final

Durée : 2 heures
Date : lundi 9 janvier 2017
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des annales, du cours, et des exercices de TD

Dans ce qui suit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. centrées de variance σ^2.

Exercice 1 (ARMA)**.** On considère l'équation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - \frac{5}{2}Z_{t-1} + Z_{t-2}$.

1. Calculer la fraction rationnelle de l'équation, démontrer que l'équation possède une unique solution stationnaire, et la calculer ;
2. Trouver $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\alpha X$ et $\alpha_k = 0$ pour tout $k \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Densité spectrale)**.**

1. Calculer la mesure spectrale du processus harmonique $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ où A et B sont des v.a.r. centrées, de variance σ^2, et non corrélées, et où $\theta \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur du paramètre θ le processus admet-il une densité spectrale ?
2. Démonter que pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le filtre $X = F_\alpha Z$ possède une densité spectrale donnée par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ pour tout $\alpha \in [-\pi, \pi]$, où $P_\alpha(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k$;
3. Soit X une solution stationnaire de l'équation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - 3Z_{t-1}$. Construire un processus linéaire X^* associé à un bruit blanc Z^*, causal et inversible, de même autocovariance que X, et solution de l'équation $X_t^* - \frac{1}{2}X_{t-1}^* = Z_t^* - \frac{1}{3}Z_{t-1}^*$.

Exercice 3 (Prédiction d'un processus AR)**.** Soit $m \geq 1$ un entier et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $|\varphi| < 1$.

1. Montrer qu'il existe une solution stationnaire unique à l'équation AR(m) $X_t = \varphi X_{t-m} + Z_t$ et qu'il s'agit d'un filtre causal de Z ;
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout entier $p \geq m$, dans L^2,
$$\mathrm{proj}(X_t, \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}) = \varphi X_{t-m}.$$

Exercice 4 (Cauchy)**.** On rappelle qu'une v.a.r. W de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{c\pi(1+x^2/c^2)}$ et pour fonction caractéristique $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{i\theta W}) = e^{-c|\theta|}$. Elle n'a pas d'espérance ni de variance.

1. Démontrer que si $W_1, \dots, W_n$ sont des v.a.r. indépendantes de lois de Cauchy de paramètres $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$ alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\lambda_1 W_1 + \cdots + \lambda_n W_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre $|\lambda_1|c_1 + \cdots + |\lambda_n|c_n$;
2. Soit $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. Démontrer que pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{Z}$, la formule $F_\alpha W_t := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k W_{t-k}$ définit une v.a.r. de loi de Cauchy de paramètre $c\|\alpha\|_1$. Peut-on définir le filtre $(F_\alpha W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en tant que processus stationnaire ?

Exercice 5 (Processus ARCH[1])**.** Soit $a > 0$ et $b > 0$ des réels. En raisonnant par récurrence, trouver un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ solution de l'équation non-linéaire
$$X_t = \sqrt{a + bX_{t-1}^2}\,Z_t \quad \text{pour tout } t \geq 1.$$
(indication : élever au carré). Calculer sa moyenne et sa variance pour tout t.

1. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, utilisés par exemple en finance mathématique.

English version

In all the sequel $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. r.r.v. of mean 0 and variance σ^2.

Exercise 1 (ARMA equation)**.** Let us consider the following ARMA equation:

$$X_t - 2X_{t-1} = Z_t - \frac{5}{2}Z_{t-1} + Z_{t-2}.$$

1. Compute the rational fraction of the equation, prove that it admits a unique stationary solution; and compute it;
2. Find $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ such that $Z = F_\alpha X$ and $\alpha_k = 0$ for any $k \notin \mathbb{N}$.

Exercise 2 (Spectral density)**.**

1. Compute the spectral measure of the harmonic process $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ where A and B are centered and uncorrelated r.r.v. of variance σ^2, and where $\theta \in \mathbb{R}$. For which values of θ the process admits a spectral density?
2. Prove that for every $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, the filter $X = F_\alpha Z$ admits a spectral density given by $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ for every $\alpha \in [-\pi, \pi]$, where $P_\alpha(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k$;
3. Let X be the stationary solution of the equation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - 3Z_{t-1}$. Construct a linear process X^* with respect to a white noise Z^*, causal and invertible, with same autocovariance as X, and solution of the equation $X^*_t - \frac{1}{2}X^*_{t-1} = Z^*_t - \frac{1}{3}Z^*_{t-1}$.

Exercise 3 (Prediction of an AR process)**.** Let $m \geq 1$ be an integer and $\varphi \in \mathbb{R}$, $|\varphi| < 1$.

1. Prove that there exists a stationary solution to the AR(m) equation $X_t = \varphi X_{t-m} + Z_t$ and that it is a causal filter of Z;
2. Prove that for any $t \in \mathbb{Z}$ and any integer $p \geq m$, in L^2,

$$\mathrm{proj}(X_t, \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\}) = \varphi X_{t-m}.$$

Exercise 4 (Cauchy)**.** A Cauchy r.r.v. W of parameter $c > 0$ has density $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{c\pi(1+x^2/c^2)}$ and characteristic function $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{i\theta W}) = e^{-c|\theta|}$. It has no mean and no variance.

1. Prove that if $W_1, \ldots, W_n$ are independent Cauchy r.r.v. of parameter $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$ then for any $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, the r.r.v. $\lambda_1 W_1 + \cdots + \lambda_n W_n$ follows the Cauchy law of parameter $|\lambda_1|c_1 + \cdots + |\lambda_n|c_n$;
2. Let $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of i.i.d. Cauchy r.r.v. of parameter $c > 0$. Prove that for any $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the formula $F_\alpha W_t := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k W_{t-k}$ defines a Cauchy r.r.v. of parameter $c\|\alpha\|_1$. Can we define the filter $(F_\alpha W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ as a stationary process?

Exercise 5 (ARCH[2] process)**.** Let a, b be real numbers with $a > 0$ and $b > 0$. Construct by induction a processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ solution of the nonlinear equation

$$X_t = \sqrt{a + bX_{t-1}^2}\,Z_t \quad \text{for every } t \geq 1.$$

(indication: take the square). Compute its mean and variance for any t.

2. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, used for instance in mathematical finance.

Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Séries temporelles

Examen du 18/01/2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant la relation

$$X_t = \frac{5}{2}X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 (avec $\sigma \neq 0$).

1. Montrer qu'un tel processus X existe et est unique.
2. En remarquant que
$$\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ avec } z \neq 2 \text{ et } z \neq 1/2,$$
déterminer $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\, z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$.
3. Exprimer X en fonction de α et Z.
4. Montrer que X possède une densité spectrale f_X et la déterminer explicitement.
5. Soient $\sigma^* = \sigma/2$, Z^* un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $(\sigma^*)^2$ et X^* un processus stationnaire vérifiant $X_t^* = X_{t-1}^* - \frac{1}{4}X_{t-2}^* + Z_t^*$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer qu'un tel processus X^* existe, est unique et causal.
   (b) Montrer que X^* possède une densité spectrale f_{X^*} et la déterminer explicitement.
   (c) Démontrer que $\gamma_X = \gamma_{X^*}$, où γ_X et γ_{X^*} sont les autocovariances des processus X et X^* respectivement.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire d'autocovariance γ_X et de moyenne nulle dans $L^2(\Omega)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, on considère Γ_p la matrice de terme général $(\Gamma_p)_{ij} = \gamma(i-j)$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. On suppose que Γ_p est inversible. On note

$$H_{t-1,p} = \text{Vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\}$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ et $\text{proj}(Y, H_{t-1,p})$ la projection orthogonale d'un élément $Y \in L^2(\Omega)$ sur $H_{t-1,p}$. Soit $\phi_p = (\phi_{p,1}, \ldots, \phi_{p,p}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t-k}$$

1. Rappeler l'équation de Yule-Walker liant Γ_p, ϕ_p et $\gamma_p := (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(p))$.

   On pose $Y_t = X_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire dont on déterminera la fonction d'autocovariance en fonction de γ_X.

3. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} Y_{s-k}.$$

   (où $\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\})$ désigne la projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ de Y_s sur l'espace vectoriel engendré par $Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}$).

4. Prouver alors que

$$\mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t+k-p-1} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

5. On pose

$$X_t^+ = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \text{ et } X_t^- = \mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p})$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Var}(X_t^+) = \mathrm{Var}(X_t^-)$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) = \mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-)$.

Barème indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 10 points.