Université Paris Dauphine
2022-2023

Introduction aux séries temporelles

Partiel du vendredi 28/10/2022

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (5 points) Soient A_1 et A_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de carré intégrable telles que

$$\mathbb{E}[A_1] = \mathbb{E}[A_2] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[A_1^2\right] = \mathbb{E}\left[A_2^2\right] = 1,$$

et B une variable aléatoire réelle, indépendante de A_1 et A_2 de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. On pose

$$X_t = A_1 \cos(Bt) + A_2 \sin(Bt) \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (X_t) est un processus stationnaire dont on calculera la fonction d'autocovariance.

Exercice 2 (5 points) Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant la relation

$$X_t = \frac{5}{2} X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 (avec $\sigma \neq 0$).

1. Expliquer pourquoi un tel processus X existe et est unique.
2. Déterminer explicitement un filtre $\alpha \in \ell^1$ tel que $X = F_\alpha Z$.
   (on pourra utiliser l'identité $\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right)$)

Exercice 3 (10 points) Soit (Z_t) un processus stationnaire de moyenne $\bar{m} \in \mathbb{R}$. Soient également $\phi \in \mathbb{R}$ une constante, avec $|\phi| < 1$. On s'intéresse aux processus (X_t) vérifiant

$$(*) \qquad X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose que (X_t) est un processus stationnaire vérifiant $(*)$. Déterminer $\mu = \mathbb{E}[X_t]$ en fonction de $\bar{m}$ et ϕ.

2. Soit (X_t) un processus de carré intégrable et uniformément borné dans L^2 (c'est-à-dire tel que $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right] < +\infty$) vérifiant $(*)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (b) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite dans L^2 (notée $\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$) et que

   $$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (c) En déduire qu'il existe une unique solution de $(*)$ uniformément bornée dans L^2 et que cette solution est stationnaire.

3. Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant $(*)$ *avec (Z_t) un bruit blanc de moyenne $\bar{m}$ et de variance σ^2.* Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_{t+k}$.

   (a) Montrer que $(\bar{X}_t^N)$ vérifie une relation de récurrence de la forme

   $$\bar{X}_t^N = \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

   où (ϵ_t^N) est un processus stationnaire de moyenne $\bar{m}$ et de variance σ^2/N.

   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et lorsque $N \to +\infty$, $(\bar{X}_t^N)$ possède une limite dans L^2 que l'on déterminera.