Université Paris Dauphine
2022-2023

# Introduction aux séries temporelles

## TD4 - Analyse spectrale

**Exercice 1** Soient $X$ et $Y$ deux processus stationnaires décorrélés. Déterminer la mesure spectrale de $X+Y$ en fonction des mesures spectrales de $X$ et de $Y$.

**Exercice 2** Déterminer la mesure spectrale d'un processus MA(1), c'est-à-dire un processus stationnaire $X$ de la forme $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $\theta$ est un réel et $Z$ un bruit blanc.

**Exercice 3**

1. Déterminer la mesure spectrale d'un processus AR(1), i.e., d'un processus stationnaire vérifiant $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, où $Z \in BB(0, \sigma)$ est un bruit blanc (avec $\sigma > 0$) et $\phi \notin \{-1, 1\}$.
2. Montrer que, si $\phi \neq \{-1, 1, 0\}$, alors il existe un bruit blanc $\tilde{Z}$ tel que la solution stationnaire de $\tilde{X}_t = \phi^{-1}\tilde{X}_{t-1} + \tilde{Z}_t$ a la même fonction d'autocovariance que $X$. Quelle est la variance de $\tilde{Z}$ ?

**Exercice 4** Soient $(f(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ et $(g(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ deux suites réelles de type positif. Montrer que $fg$ est aussi de type positif. On pourra procéder de deux manières :

1. Construire un processus stationnaire dont $fg$ soit la fonction d'autocovariance.
2. Construire une mesure finie sur $[-\pi, \pi[$ dont $fg$ soit la transformée de Fourier (on pourra supposer que $(f(h))$ est dans $\ell^1$).

   Soit $\rho \in ]0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\gamma(h) = \rho^{|h|}\cos(\theta h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $(\gamma(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ est de type positif.
4. Préciser sa mesure spectrale et construire un processus explicite ayant $(\gamma(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ comme fonction d'autocovariance.

**Exercice 5** On considère une équation ARMA

$$Q(B)X = P(B)Z$$

avec $P$ et $Q$ deux polynômes sans racines communes, et $Q$ sans racines de module 1, de sorte que l'équation admet une unique solution stationnaire (avec $Z \in BB(0,1)$).

1. A quelle condition sur $Q$ la solution est-elle causale ?

2. On dit que la solution $X$ est inversible lorsqu'il existe un filtre $(a_n) \in \ell^1$ tel que

$$Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_n X_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   A quelle condition sur $P$ est-ce le cas ? Et à quelle condition supplémentaire le filtre $(a_n)$ est-il causal ?

3. On suppose dans cette question que ni $P$ ni $Q$ n'ont de racines de module 1. Donner une équation ARMA

$$\tilde{Q}(B)X = \tilde{P}(B)Z$$

   dont la solution ait la même autocorrélation que celle de l'équation de départ, soit causale, inversible et d'inverse causal.

4. Appliquer ce principe pour l'équation

$$X_t - 2X_{t-1} = Z_t + 3Z_{t-1}.$$