Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Séries temporelles

Partiel du 02/11/2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit (Z_t) un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2, avec $\sigma \neq 0$. On pose $X_t = (-1)^t Z_t$.

1. Montrer que (X_t) est un processus stationnaire.
2. Le processus $(X_t + Z_t)$ est-il stationnaire ?
3. On suppose que (Z_t) est un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire que (Z_t) est un bruit blanc et que, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ avec $t_1 \leq t_2$, le vecteur $(Z_{t_1}, Z_{t_1+1}, \ldots, Z_{t_2})$ est un vecteur gaussien. Montrer que (X_t) est fortement stationnaire.

Exercice 2 Soit (Z_t) un processus stationnaire de moyenne nulle. Soient également $\phi \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ deux constantes fixées, avec $|\phi| < 1$. On s'intéresse aux processus (X_t) vérifiant

$$(*) \qquad X_t = c + \phi X_{t-1} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose que (X_t) est un processus stationnaire vérifiant $(*)$. Déterminer $\mu = \mathbb{E}[X_t]$.
2. Soit (X_t) un processus de carré intégrable et uniformément borné dans L^2 (c'est-à-dire tel que $\sup\limits_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right] < +\infty$) vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$
   (b) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite dans L^2 (notée $\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$) et que
   $$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} + \frac{c}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$
   (c) En déduire que (X_t) est stationnaire.
   (d) On suppose que (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2. Déterminer la fonction d'autocovariance de (X_t).

Trouver la page s.v.p.

3. Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant $(*)$ *avec* (Z_t) *un bruit blanc de moyenne nulle et de variance* σ^2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{t+k}$.
   (a) Montrer que $(\bar{X}_t^N)$ vérifie une relation de récurrence de la forme
   $$\bar{X}_t^N = c + \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$
   où (ϵ_t^N) est un processus stationnaire de moyenne nulle et de variance σ^2/N.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et lorsque $N \to +\infty$, $(\bar{X}_t^N)$ possède une limite dans L^2 que l'on déterminera.

Exercice 3 Soient q un entier non nul et $(\theta_k)_{k=-q,\dots,q}$ des réels fixés. On définit M comme la fonction qui associe à une suite $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ la suite $(Mx_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définie par
$$Mx_t = \sum_{k=-q}^{q} \theta_k x_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$
On dit que M préserve une suite donnée $(\bar{x}_t)$ si $M\bar{x}_t = \bar{x}_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'opérateur
$$Mx_t = x_{t+3} + x_{t-3} - x_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$
préserve la suite $(2t+1)_{t\in\mathbb{Z}}$.
2. Montrer que M préserve les polynômes de degré 1, si et seulement si,
$$\sum_{k=-q}^{q} \theta_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=-q}^{q} k\theta_k = 0.$$
3. Montrer que, si M préserve la suite $(t^5)_{t\in\mathbb{Z}}$, alors M préserve également tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

Barème indicatif : Exercice 1 : 5 points. Exercice 2 : 10 points, Exercice 3 : 5 points.