**Université Paris Dauphine**
**Master 1 Mathématiques et Applications**
**Séries temporelles**

# Partiel du 02/11/2018.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

**Exercice 1** Soit $(Z_t)$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$, avec $\sigma \neq 0$. On pose $X_t = (-1)^t Z_t$.

1. Montrer que $(X_t)$ est un processus stationnaire.
2. Le processus $(X_t + Z_t)$ est-il stationnaire ?
3. On suppose que $(Z_t)$ est un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire que $(Z_t)$ est un bruit blanc et que, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ avec $t_1 \leq t_2$, le vecteur $(Z_{t_1}, Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_2})$ est un vecteur gaussien. Montrer que $(X_t)$ est fortement stationnaire.

*Solution:*

1. *On note que $(X_t)$ est un processus d'ordre 2, car, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[Z_t^2] < +\infty$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathbb{E}[X_t] = (-1)^t \mathbb{E}[Z_t] = 0$$

   *car $(Z_t)$ est un bruit blanc, et*

$$Covar(X_t, X_{t+h}) = (-1)^{t+t+h} Covar(Z_t, Z_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   *à nouveau parce que $(Z_t)$ est un bruit blanc. On en déduit que $(X_t)$, qui a une moyenne constante et une covariance indépendante de $t$, est un processus stationnaire.*

2. *On calcule*

$$X_t + Z_t = \begin{cases} 2Z_t & \text{si } t \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

   *Donc*

$$Var(X_0 + Z_0) = 4Var(Z_0) = 4\sigma^2 \neq 0$$

   *tandis que*

$$Var(X_1 + Z_1) = 0$$

   *Donc le processus $(X_t + Z_t)$ n'est pas stationnaire.*

3. *On suppose que $(Z_t)$ est un bruit blanc gaussien. Vérifions que $(X_t)$ est encore un bruit blanc gaussien, ce qui implique (par un résultat de cours) que $(X_t)$ est fortement stationnaire. En effet, si on considère une combinaison linéaire finie*

$$Y := \sum_{t=t_1}^{t_2} \alpha_t X_t,$$

*où $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ avec $t_1 \leq t_2$ et $\alpha_t$ réels, alors*

$$Y = \sum_{t=t_1}^{t_2} \alpha_t (-1)^t Z_t$$

*est une v.a. gaussienne puisque $(Z_t)$ est un bruit blanc gaussien. Donc $(X_t)$ est un processus stationnaire gaussien, et est par conséquent fortement stationnaire.*

**Exercice 2** Soit $(Z_t)$ un processus stationnaire de moyenne nulle. Soient également $\phi \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ deux constantes fixées, avec $|\phi| < 1$. On s'intéresse aux processus $(X_t)$ vérifiant

$$(*) \qquad X_t = c + \phi X_{t-1} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose que $(X_t)$ est un processus stationnaire vérifiant $(*)$. Déterminer $\mu = \mathbb{E}[X_t]$.
2. Soit $(X_t)$ un processus de carré intégrable et uniformément borné dans $L^2$ (c'est-à-dire tel que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right] < +\infty$) vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$
   (b) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite dans $L^2$ (notée $\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$) et que
   $$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} + \frac{c}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$
   (c) En déduire que $(X_t)$ est stationnaire.
   (d) On suppose que $(Z_t)$ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$. Déterminer la fonction d'autocovariance de $(X_t)$.
3. Soit $(X_t)$ un processus stationnaire vérifiant $(*)$ *avec $(Z_t)$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$.* Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_{t+k}$.
   (a) Montrer que $(\bar{X}_t^N)$ vérifie une relation de récurrence de la forme
   $$\bar{X}_t^N = c + \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$
   où $(\epsilon_t^N)$ est un processus stationnaire de moyenne nulle et de variance $\sigma^2/N$.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et lorsque $N \to +\infty$, $(\bar{X}_t^N)$ possède une limite dans $L^2$ que l'on déterminera.

*Solution :*

1. *Comme $(X_t)$ est un processus stationnaire, on a $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mu$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Comme $(X_t)$ vérifie $(*)$, en prenant l'espérant dans (*) on obtient*

$$\mu = c + \phi\mu + 0,$$

*puisque $(Z_t)$ est de moyenne nulle. On en déduit que $\mu = c/(1-\phi)$.*

2. *On suppose que $(X_t)$ est un processus de carré intégrable et uniformément borné dans $L^2$ vérifiant $(*)$.*

   (a) *On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$(**) \qquad X_t = \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   *Cette relation est vraie au rang $n=1$ par $(*)$. Supposons-la vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a par hypothèse de récurrence puis par $(*)$ appliqué au temps $t-n$ :*

$$\begin{aligned} X_t &= \phi^n X_{t-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \\ &= \phi^n(c + \phi X_{t-n-1} + Z_{t-n}) + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \\ &= \phi^{n+1} X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \phi^k Z_{t-k} + c\frac{1-\phi^{n+1}}{1-\phi}, \end{aligned}$$

   *ce qui montre le résultat au rang $n+1$. Par récurrence on en déduit le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

   (b) *Posons $M = \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[(X_t)^2\right]$. Fixons $t \in \mathbb{Z}$. On note que, comme $|\phi| < 1$ et comme $(Z_t)$ est stationnaire,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\|\phi^k Z_{t-k}\right\|_{L^2} = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi|^k \left\|Z_{t-k}\right\|_{L^2} = \left\|Z_0\right\|_{L^2} \sum_{k=0}^{n-1} |\phi|^k \le \left\|Z_0\right\|_{L^2} / (1-|\phi|).$$

   *Donc la série $(\sum_{k=0}^{n-1} \phi^k Z_{t-k})_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est normalement convergente dans $L^2$, a une limite dans $L^2$. De plus*

$$\left\|\phi^n X_{t-n}\right\|_{L^2} = |\phi|^n \left\|X_{t-n}\right\|_{L^2} \le M|\phi|^n \to 0$$

   *lorsque $n \to +\infty$ puisque $|\phi| < 1$. Donc $(\phi^n X_{t-n})$ tend dans $L^2$ vers $0$. Enfin, toujours parce que $|\phi| < 1$, la suite réelle $(c\frac{1-\phi^n}{1-\phi})$ tend vers $c/(1-\phi)$. On en déduit en passant à la limite dans $L^2$ dans $(**)$ que*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k} + \frac{c}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (c) *La question précédente affirme que*

$$X_t = F_\alpha Z_t + \frac{c}{1-\phi},$$

*où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est défini par $\alpha_k = \phi^k$ si $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$. Comme $(Z_t)$ est un processus stationnaire, on sait d'après le cours que $F_\alpha Z$ est un processus stationnaire. La constante $\frac{c}{1-\phi}$ change la moyenne : $\mathbb{E}[X_t] = \frac{c}{1-\phi}$ (tout en la laissant constante), mais pas la covariance. Donc $(X_t)$ est également stationnaire.*

(d) *Lorsque $(Z_t)$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$, la fonction d'autocovariance de $(X_t)$ est, par un résultat du cours, pour tout $h \in \mathbb{N}$,*

$$Covar(X_0, X_h) = Covar(F_\alpha Z_0, F_\alpha Z_h) = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi^{2k+h} = \frac{\sigma^2 \phi^h}{1-\phi^2}.$$

*Lorsque $h < 0$, on a, par stationnarité, $Covar(X_0, X_h) = Covar(X_{-h}, X_0) = \frac{\sigma^2 \phi^{|h|}}{1-\phi^2}$.*

3. (a) *D'après $(*)$, on a*

$$\bar{X}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_{t+k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (c + \phi X_{t+k-1} + Z_{t+k-1}) = c + \phi \bar{X}_{t-1}^N + \epsilon_t^N$$

*où*

$$\epsilon_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{t+k}$$

*Notons que, comme $(\epsilon_t^N = F_\beta Z_t)$ (où $\beta = 1/N$ si $k \in \{-N, \ldots, -1\}$ et $\beta_k = 0$ sinon) avec $(Z_t)$ stationnaire, un résultat de cours affirme que $(\epsilon_t^N)$ est stationnaire. De plus, comme $(Z_t)$ est un bruit blanc, on a, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_t^N\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[Z_{t+k}\right] = 0$$

*et*

$$\mathbb{E}\left[(\epsilon_t^N)^2\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[(Z_{t+k})^2\right] = \sigma^2/N.$$

(b) *Notons que $\bar{X}_t^N = F_\beta X_t$ où $\beta$ est défini ci-dessus. On en déduit que $(\bar{X}_t^N)$ est un processus stationnaire et est donc de carré intégrable et borné dans $L^2$. On déduit de la question 2 que $(X_t)$ est donné par :*

$$\bar{X}_t^N = \sum_{k=0}^\infty \phi^k \epsilon_{t-k}^N + \frac{c}{1-\phi} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

*Donc, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} Var(X_t^N) &= \mathbb{E}\left[(\bar{X}_t^N - \frac{c}{1-\phi})^2\right] = \sum_{k,j=0}^\infty \phi^{k+j} \mathbb{E}\left[\epsilon_{t-k}^N \epsilon_{t-j}^N\right] \\ &\leq \sum_{k,j=0}^\infty |\phi|^{k+j} \mathbb{E}\left[(\epsilon_{t-k}^N)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(\epsilon_{t-j}^N)^2\right]^{1/2} = \frac{\sigma^2}{N} (\sum_{k=0}^\infty |\phi|^k) = \frac{\sigma^2}{N(1-|\phi|)}. \end{aligned}$$

*Cela montre que $(\bar{X}_t^N)$ tend dans $L^2$ vers sa moyenne $c/(1-\phi)$.*

**Exercice 3** Soient $q$ un entier non nul et $(\theta_k)_{k=-q,\ldots,q}$ des réels fixés. On définit $M$ comme la fonction qui associe à une suite $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ la suite $(Mx_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$Mx_t = \sum_{k=-q}^q \theta_k x_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

On dit que $M$ préserve une suite donnée $(\bar{x}_t)$ si $M\bar{x}_t = \bar{x}_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'opérateur

$$Mx_t = x_{t+3} + x_{t-3} - x_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

préserve la suite $(2t+1)_{t\in\mathbb{Z}}$.

2. Montrer que $M$ préserve les polynômes de degré 1, si et seulement si,

$$\sum_{k=-q}^{q} \theta_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=-q}^{q} k\theta_k = 0.$$

3. Montrer que, si $M$ préserve la suite $(t^5)_{t\in\mathbb{Z}}$, alors $M$ préserve également tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

*1. On a*

$$Mx_t = (2(t+3)+1) + (2(t-3)+1) - (2t+1) = 2t+1 = x_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

*Donc $M$ préserve la suite $(2t+1)_{t\in\mathbb{Z}}$.*

*2. Soit $x_t = \alpha t + \beta$ (où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Alors*

$$Mx_t = \sum_{k=-q}^{q} \theta_k(\alpha(t+k)+\beta) = \alpha t \left(\sum_{k=-q}^{q} \theta_k\right) + \left(\sum_{k=-q}^{q} \theta_k(\alpha k + \beta)\right).$$

*Donc $Mx_t = x_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, si et seulement si,*

$$\alpha t \left(\sum_{k=-q}^{q} \theta_k\right) + \left(\sum_{k=-q}^{q} \theta_k(\alpha k + \beta)\right) = \alpha t + \beta \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

*ce qui équivaut à*

$$\alpha \sum_{k=-q}^{q} \theta_k = \alpha \text{ et } \sum_{k=-q}^{q} \theta_k(\alpha k + \beta) = \beta.$$

*Donc $M$ préserve les polynômes de degré 1, si et seulement si,*

$$\sum_{k=-q}^{q} \theta_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=-q}^{q} k\theta_k = 0,$$

*ce qui est l'équivalence demandée.*

*3. On suppose que $M$ préserve la suite $(t^5)_{t\in\mathbb{Z}}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,*

$$t^5 = \sum_{k=-q}^{q} \theta_k(t+k)^5 = \sum_{k=-q}^{q} \theta_k(\sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} t^j k^{5-j})$$
$$= \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} t^j \left(\sum_{k=-q}^{q} \theta_k k^{5-j}\right).$$

*Comme les coefficients binomiaux $\binom{5}{j}$ sont non nuls, On en déduit que*

$$\sum_{k=-q}^{q} \theta_k = 1 \text{ et } \sum_{k=-q}^{q} \theta_k k^l = 0 \qquad \forall l = 1, \ldots 5.$$

*Donc, si* $x_t = \sum_{j=0}^{5} \alpha_j t^j$, *alors*

$$\begin{aligned}
Mx_t &= \sum_{j=0}^{5} \alpha_j M(t^j)_t = \sum_{j=0}^{5} \alpha_j \left( \sum_{k=-q}^{q} \theta_k (t+k)^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \sum_{l=0}^{j} \left( \begin{array}{c} j \\ l \end{array} \right) \alpha_j t^l \left( \sum_{k=-q}^{q} \theta_k k^{j-l} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \sum_{l=0}^{j} \left( \begin{array}{c} j \\ l \end{array} \right) \alpha_j t^l \mathbf{1}_{l=j} = x_t.
\end{aligned}$$

*Cela prouve que* $M$ *préserve les polynômes de degré inférieur ou égal à* 5.

**Barème indicatif :** Exercice 1 : 5 points. Exercice 2 : 10 points, Exercice 3 : 5 points.