Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Séries temporelles

Examen du 18/01/2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant la relation

$$X_t = \frac{5}{2}X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 (avec $\sigma \neq 0$).

1. Montrer qu'un tel processus X existe et est unique.
2. En remarquant que
$$\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ avec } z \neq 2 \text{ et } z \neq 1/2,$$
déterminer $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $\displaystyle\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \, z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$.
3. Exprimer X en fonction de α et Z.
4. Montrer que X possède une densité spectrale f_X et la déterminer explicitement.
5. Soient $\sigma^* = \sigma/2$, Z^* un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $(\sigma^*)^2$ et X^* un processus stationnaire vérifiant $X^*_t = X^*_{t-1} - \frac{1}{4}X^*_{t-2} + Z^*_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer qu'un tel processus X^* existe, est unique et causal.
   (b) Montrer que X^* possède une densité spectrale f_{X^*} et la déterminer explicitement.
   (c) Démontrer que $\gamma_X = \gamma_{X^*}$, où γ_X et γ_{X^*} sont les autocovariances des processus X et X^* respectivement.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire d'autocovariance γ_X et de moyenne nulle dans $L^2(\Omega)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, on considère Γ_p la matrice de terme général $(\Gamma_p)_{ij} = \gamma(i-j)$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. On suppose que Γ_p est inversible. On note

$$H_{t-1,p} = \text{Vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\}$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ et $\text{proj}(Y, H_{t-1,p})$ la projection orthogonale d'un élément $Y \in L^2(\Omega)$ sur $H_{t-1,p}$. Soit $\phi_p = (\phi_{p,1}, \ldots, \phi_{p,p}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t-k}$$

1. Rappeler l'équation de Yule-Walker liant Γ_p, ϕ_p et $\gamma_p := (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(p))$.

   On pose $Y_t = X_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire dont on déterminera la fonction d'autocovariance en fonction de γ_X.

3. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} Y_{s-k}.$$

   (où $\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\})$ désigne la projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ de Y_s sur l'espace vectoriel engendré par $Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}$).

4. Prouver alors que

$$\mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t+k-p-1} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

5. On pose

$$X_t^+ = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \text{ et } X_t^- = \mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p})$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Var}(X_t^+) = \mathrm{Var}(X_t^-)$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) = \mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-)$.

Barème indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 10 points.