Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Séries temporelles

Corrigé de l'examen du 18/01/2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit (X_t) un processus stationnaire vérifiant la relation

$$X_t = \frac{5}{2}X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où Z est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 (avec $\sigma \neq 0$).

1. Montrer qu'un tel processus X existe et est unique.
2. En remarquant que

$$\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ avec } z \neq 2 \text{ et } z \neq 1/2,$$

déterminer $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $\dfrac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\, z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$.

3. Exprimer X en fonction de α et Z.
4. Montrer que X possède une densité spectrale f_X et la déterminer explicitement.
5. Soient $\sigma^* = \sigma/2$, Z^* un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $(\sigma^*)^2$ et X^* un processus stationnaire vérifiant $X_t^* = X_{t-1}^* - \frac{1}{4}X_{t-2}^* + Z_t^*$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer qu'un tel processus X^* existe, est unique et causal.
   (b) Montrer que X^* possède une densité spectrale f_{X^*} et la déterminer explicitement.
   (c) Démontrer que $\gamma_X = \gamma_{X^*}$, où γ_X et γ_{X^*} sont les autocovariances des processus X et X^* respectivement.

Solution:

1. *Soit Φ be polynôme $\Phi(X) = 1 - \frac{5}{2}X + X^2$. On cherche un processus stationnaire X vérifiant $\Phi(B)X = Z$, où B est l'opérateur de retard. On sait d'après le cours qu'un tel processus AR(2) existe et est unique dès que Φ a toutes ses racines hors du cercle unité. Ici les racines de Φ sont 2 et $1/2$, donc de module différent de 1 : cela montre l'existence et l'unicité du processus X.*
2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Comme $|2^{-1}z| = 1/2 < 1$, on a d'une part*

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-2^{-1}z} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(2^{-1}z)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1}z^k.$$

D'autre part, comme $|(2z)^{-1}| = 1/2 < 1$*, on a*

$$\frac{1}{z-1/2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(2z)^{-1}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(2z)^{-k} = \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l+1}z^l$$

(où on a fait le changement de variable $l = -k-1$ *dans la dernière somme). On en déduit que*

$$\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k,$$

où

$$\alpha_k = \begin{cases} -2^{-k}/3 & \text{si } k \geq 0 \\ -2^{l+2}/3 & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

On remarque que (α_k) *est en effet dans* $\ell^1(\mathbb{Z})$*.*

3. *Comme*

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| = 1$*, on a d'après le cours que*

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

(on rappelle que, si on définit la suite (ϕ_k) *comme* $\phi_0 = 1$*,* $\phi_1 = -5/2$*,* $\phi_2 = 1$ *et* $\phi_k = 0$ *pour* $k \notin \{0,1,2\}$*, alors la question 2 affirme que* ϕ *est inversible dans* $\ell^1(\mathbb{Z})$ *pour la convolution d'inverse* α*. Donc* $X = F_\alpha Z$*).*

4. *Comme* $\alpha = (\alpha_k)$ *est dans* $\ell^1(\mathbb{Z})$*, on sait d'après le cours que* X *possède une densité spectrale* f_X *donnée, puisque* $X = F_\alpha Z$*, par*

$$f_X(u) = |P_\alpha(e^{-iu})|^2 f_Z(u)$$

où, comme Z *est un* $BB(0,\sigma^2)$*,*

$$f_Z(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_Z(h)e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

(puisque $\gamma_Z(h) = \sigma^2$ *si* $h = 0$ *et* 0 *sinon) et*

$$|P_\alpha(e^{-iu})|^2 = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{-kiu}\right|^2 = \left|\frac{1}{e^{-2iu} - \frac{5}{2}e^{-iu} + 1}\right|^2 = \frac{1}{|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

Donc

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

5. (a) *Posons* $\Phi^*(z) = 1 - z + \frac{1}{4}z^2 = (1-z/2)^2$*. La seule racine de* Φ^* *est 2, qui est en dehors du disque unité (i.e., de module strictement supérieur à 1). Un résultat de cours affirme alors que il existe une unique solution stationnaire* X^* *à l'équation* $\Phi^*(B)X = Z^*$ *et que* X^* *est causale.*

   (b) *Comme précédemment (et d'après le cours), on sait que dans ce cas* $X^* = F_{\alpha^*}Z^*$ *où* $\alpha^* \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *et que* X^* *possède une densité spectrale* f_{X^*}*. Toujours d'après le cours, on a*

$$f_{X^*}(u) = \frac{(\sigma^*)^2}{2\pi|\Phi^*(e^{-iu})|^2}.$$

(c) *On sait d'après le cours que $\gamma_X = \gamma_{X^*}$, si et seulement si, $f_X = f_{X^*}$. Vérifions ce dernier point. Pour cela, remarquons d'abords que, si $|z| = 1$, alors*

$$\Phi(z) = (z-2)(z-1/2) = (2z^2)(1-z^{-1}/2)^2 = 2z^2\Phi^*(z^{-1}).$$

Donc

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi\left|2e^{-2iu}\Phi^*(e^{iu})\right|^2} = \frac{(\sigma/2)^2}{2\pi\left|\Phi^*(e^{iu})\right|^2} = f_{X^*}(u)$$

puisque

$$\left|\Phi^*(e^{iu})\right|^2 = \left|\overline{\Phi^*(e^{iu})}\right|^2 = \left|\Phi^*(\overline{e^{iu}})\right|^2 = \left|\Phi^*(e^{-iu})\right|^2$$

car Φ^* est un polynôme à coefficients réels. On a donc vérifié que $f_X = f_{X^*}$, ce qui implique que $\gamma_X = \gamma_{X^*}$.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire d'autocovariance γ_X et de moyenne nulle dans $L^2(\Omega)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, on considère Γ_p la matrice de terme général $(\Gamma_p)_{ij} = \gamma(i-j)$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. On suppose que Γ_p est inversible. On note

$$H_{t-1,p} = \mathrm{Vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\}$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ et $\mathrm{proj}(Y, H_{t-1,p})$ la projection orthogonale d'un élément $Y \in L^2(\Omega)$ sur $H_{t-1,p}$. Soit $\phi_p = (\phi_{p,1}, \ldots, \phi_{p,p}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t-k}$$

1. Rappeler l'équation de Yule-Walker liant Γ_p, ϕ_p et $\gamma_p := (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(p))$.

   On pose $Y_t = X_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire dont on déterminera la fonction d'autocovariance en fonction de γ_X.

3. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} Y_{s-k}.$$

   (où $\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}\})$ désigne la projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ de Y_s sur l'espace vectoriel engendré par $Y_{s-1}, \ldots, Y_{s-p}$).

4. Prouver alors que

$$\mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t+k-p-1} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

5. On pose

$$X_t^+ = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \text{ et } X_t^- = \mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p})$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Var}(X_t^+) = \mathrm{Var}(X_t^-)$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) = \mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-)$.

Solution.

1. *D'après le cours, on a* $\Gamma_p \phi_p = \gamma_p$.

2. *Pour montrer que* (Y_t) *est un processus stationnaire, il suffit de vérifier que* Y_t *est dans* L^2 *pour tout* t *et que* $\mathbb{E}[Y_t]$ *et* $\gamma_Y(h) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ *sont indépendants de* t. *Or* $Y_t = X_{-t}$ *est dans* L^2, $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_{-t}] = 0$ *et*

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \mathrm{Cov}(X_{-t}, X_{-t-h}) = \gamma_X(-h) = \gamma_X(h)$$

puisque X *est stationnaire et que, pour un processus stationnaire, la fonction d'autocovariance est paire. Donc* Y *est bien stationnaire et* $\gamma_Y = \gamma_X$.

3. *Comme la fonction d'autocovariance de* Y *est la même que celle de* X, *les coefficients* $\phi_{p,k}$ *vérifient l'équation de Yule-Walker pour* Y *(car cette équation ne fait intervenir que les coefficients d'autocovariance). Donc*

$$\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \dots, Y_{s-p}\}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} Y_{s-k}.$$

4. *Fixons* $t \in \mathbb{Z}$ *et posons* $s = p + 1 - t$. *Notons que*

$$\mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \dots, Y_{s-p}\} = \mathrm{Vect}\{X_{-s+1}, \dots, X_{-s+p}\} = \mathrm{Vect}\{Y_{t-p}, \dots, Y_{t-1}\} = H_{t-1,p}.$$

La question précédente affirme alors que

$$\mathrm{proj}(Y_s, \mathrm{Vect}\{Y_{s-1}, \dots, Y_{s-p}\}) = \mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} Y_{s-k} = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t-p-1+k},$$

ce qui est le résultat demandé.

5. (a) *Comme*

$$X_t^+ = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t-k},$$

on a

$$\mathrm{Var}(X_t^+) = \sum_{k,l} \phi_{p,k}\phi_{p,l} \mathrm{Cov}(X_{t-k}, X_{t-l}) = \sum_{k,l} \phi_{p,k}\phi_{p,l} \gamma_X(l-k).$$

De même, puisque, d'après la question 4,

$$X_t^- = \mathrm{proj}(X_{t-p-1}, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{p,k} X_{t+k-p-1},$$

on a

$$\mathrm{Var}(X_t^-) = \sum_{k,l} \phi_{p,k}\phi_{p,l} \mathrm{Cov}(X_{t+k-p-1}, X_{t+l-p-1}) = \sum_{k,l} \phi_{p,k}\phi_{p,l} \gamma_X(l-k).$$

On peut donc conclure que $\mathrm{Var}(X_t^+) = \mathrm{Var}(X_t^-)$.

(b) *On a (puisque tous les variables aléatoires ont une moyenne nulle)*

$$\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) = \mathbb{E}\left[(X_t - X_t^+)X_t\right] - \mathbb{E}\left[(X_t - X_t^+)X_t^+\right].$$

Or X_t^+ *est la projection de* X_t *sur* $H_{t-1,p}$. *Donc* $\mathbb{E}\left[(X_t - X_t^+)X_t^+\right] = 0$. *On en déduit que*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_t^+)X_t\right] = \mathrm{Var}(X_t) - \mathbb{E}[X_t X_t^+] \\ &= \mathrm{Var}(X_t) - \sum_{k=1}^{p} \phi_{k,p} \mathbb{E}[X_t X_{t-k}] = \mathrm{Var}(X_t) - \sum_{k=1}^{p} \phi_{k,p} \gamma_X(k).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-) &= \mathbb{E}\left[(X_{t-p-1} - X_t^-)X_{t-p-1}\right] - \mathbb{E}\left[(X_{t-p-1} - X_t^-)X_t^-\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_{t-p-1} - X_t^-)X_{t-p-1}\right],\end{aligned}$$

puisque X_t^- *est la projection de* X_{t-p-1} *sur* $H_{t-1,p}$. *D'où, d'après la question 4,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-) &= \mathrm{Var}(X_{t-p-1}) - \mathbb{E}[X_{t-p-1}X_t^+] \\ &= \mathrm{Var}(X_{t-p-1}) - \sum_{k=1}^{p} \phi_{k,p}\mathbb{E}[X_{t-p-1}X_{t-p-1+k}] \\ &= \mathrm{Var}(X_{t-p-1}) - \sum_{k=1}^{p} \phi_{k,p}\gamma_X(k).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_{t-p-1})$, *on en déduit que*

$$\mathrm{Var}(X_t - X_t^+) = \mathrm{Var}(X_{t-p-1} - X_t^-).$$

Barème indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 10 points.