Université Paris-Dauphine
Master MASEF and Master MATH
2022-2023

Stochastic control
(Very short) Bibliography and former exams

Short bibliography

- **M2 courses on the web**

  1. Bruno Bouchard "Introduction to stochastic control of mixed diffusion processes, viscosity solutions and applications in finance and insurance"
     https://www.ceremade.dauphine.fr/%7Ebouchard/bouchard.htm
  2. Nizar Touzi "Deterministic and Stochastic Control, Application to Finance"
     http://www.cmap.polytechnique.fr/ touzi/♯Lecture

  (excellent introductions to the subject)

- **Standard monographs on the subject:**

  1. Fleming W.H. & Rischel R.W. (1975) Deterministic and stochastic optimal control. Springer-Verlag, New York.
     A classical reference (but without viscosity solutions)
  2. Fleming W.H. & Soner H.M. (1993) Controlled Markov processes and viscosity solution. Springer-Verlag, New-York.
     A classical monograph, one of the first ones on viscosity solutions
  3. Lamberton, D., & Lapeyre, B. (2011). Introduction to stochastic calculus applied to finance. Chapman and Hall/CRC.
     One of the most classical (French) references on optimal control problems applied to finance
  4. Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin: Springer.
     Another classical reference on optimal control problems applied to finance
  5. Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.
     A classical reference to control theory, with a good development to the theory of viscosity solutions applied to HJ equations

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2012-2013

Examen de contrôle stochastique
Lundi 10 Juin 2013 — durée 3h.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a stochastic basis, $(B_t)_{t\geq 0}$ a $d-$dimensional Brownian motion adapted to a filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on Ω. For $\epsilon > 0$ we consider the stochastic differential equation in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} dX_s = \sqrt{(2\epsilon)}\ \sigma(X_s)dB_s \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

where $x_0 \in \mathbb{R}^d$ is the intial condition and $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ is a $\mathcal{C}^2$ map which is bounded and has bounded derivatives. We assume that σ is invertible with a bounded inverse. We denote by $(X_s^{x_0})_{s\geq 0}$ the unique solution of the SDE.

Let $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be a $\mathcal{C}^2$ map on $\mathbb{R}^d$. We assume that the open set $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) < 0\}$ is *nonempty and bounded* and that $D\phi(x) \neq 0$ if $\phi(x) = 0$. The it is known that $\overline{\mathcal{O}} = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) \leq 0\}$ and that $\partial\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) = 0\}$.

If $x_0 \in \mathcal{O}$, we define the exit time from $\mathcal{O}$ as

$$\tau_{\mathcal{O}}(x_0) = \inf\{t \geq 0\ ;\ X_t^{x_0} \notin \mathcal{O}\}$$

($+\infty$ if the set is empty) and set

$$V_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}\left[e^{-\tau_{\mathcal{O}}(x_0)}\right].$$

We admit that V_ϵ is continuous on $\overline{\mathcal{O}}$ with $V_\epsilon = 1$ in $\partial\mathcal{O}$.

1. Show that, for any $x_0 \in \mathcal{O}$, $V_\epsilon(x_0) \to 0$ as $\epsilon \to 0$.

   The aim of the problem is to quantify this convergence.

2. Use the Markov property to prove that for any stopping time $\theta > 0$ and for any $x_0 \in \mathcal{O}$, one has
$$V_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}\left[e^{-\theta\wedge\tau_{\mathcal{O}}(x_0)} V_\epsilon\left(X^{x_0}_{\theta\wedge\tau_{\mathcal{O}}(x_0)}\right)\right].$$
   (where $a \wedge b = \inf\{a, b\}$).

3. We set $a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$ (* denotes the transpose). Prove that V is a viscosity solution to
$$\begin{cases} V_\epsilon(x) - \epsilon \mathrm{Tr}\left(a(x)D^2V_\epsilon(x)\right) = 0 & \text{in } \mathcal{O} \\ V_\epsilon(x) = 1 & \text{in } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$
   (please give the details).

4. In order to understand the behavior of V_ϵ as $\epsilon \to 0$, we set
$$W_\epsilon(x_0) = -\sqrt{\epsilon}\log(V_\epsilon(x_0)).$$
   Check that W_ϵ is continuous in $\overline{\mathcal{O}}$ and is a viscosity solution of equation
$$\begin{cases} -\sqrt{\epsilon}\ \mathrm{Tr}\left(a(x)D^2W_\epsilon(x)\right) + |\sigma^*(x)DW_\epsilon(x)|^2 = 1 & \text{in } \mathcal{O} \\ W_\epsilon(x) = 0 & \text{in } \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{1}$$
   (where $|\cdot|$ denotes the euclidean norm on $\mathbb{R}^d$)

5. Use the definition of V_ϵ to show that $W_\epsilon(x) \geq 0$ for any $x \in \Omega$.

   We admit that equation (1) satisfies a comparison principle: if u is a continuous viscosity subsolution of (1) while v is a continuous supersolution, and if $u \leq v$ in $\partial\mathcal{O}$, then $u \leq v$ in $\mathcal{O}$.

6. We assume, in this question only, that ϕ is strictly convex in $\mathbb{R}^d$: $D^2\phi > 0$ in $\mathbb{R}^d$ (in the sense of symmetric matrices).

   (a) Let $m = \min \phi$. Show that there exists a constant $\lambda > 0$ (independent of ϵ) such that the map
   $$\psi(x) := -\lambda\big(\sqrt{\phi(x) - m} - \sqrt{-m}\big)$$
   is a viscosity superrsolution of (1) for any $\epsilon \in (0, 1]$.

   (b) Deduce from this that the maps W_ϵ are uniformly bounded in $\overline{\mathcal{O}}$.

   We admit the existence of a constant $C > 0$, independent of ϵ, such that W_ϵ is Lipschitz continuous in $\overline{\mathcal{O}}$ with a Lipschitz constant C :
   $$\sup_{x \neq y} \frac{W_\epsilon(x) - W_\epsilon(y)}{|x - y|} \leq C \qquad \forall \epsilon > 0.$$

7. (a) We assume that there is a sequence $\epsilon_n \to 0$ such that (W_{ϵ_n}) converges uniformly to a map W in $\overline{\mathcal{O}}$. Show that W is Lipschitz continuous with a constant not larger than C.

   (b) Show that W is a viscosity solution of
   $$\begin{cases} |\sigma^*(x)DW(x)|^2 = 1 & \text{in } \mathcal{O} \\ W(x) = 0 & \text{in } \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{2}$$

   (c) Using results from the course, show that equation (2) has a unique viscosity solution with a Lipschitz constant not larger than C.

   (d) Deduce from this that, as $\epsilon \to 0$, W_ϵ tends to the unique viscosity solution of (2) with a Lipschitz constant not larger than C.

8. Let $\mathcal{A} = L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$ and, for any $x_0 \in \Omega$ and $\alpha \in \mathcal{A}$, $(x_s^\alpha)_{s \geq 0}$ the solution to the ordinary differential equation
   $$\begin{cases} \frac{d}{ds} x_s^\alpha = \sigma(x_s^\alpha)\alpha_s \\ x_0^\alpha = x_0 \end{cases}$$
   We set
   $$\tau(x^\alpha) = \inf\{t \geq 0 \; ; \; x_s^\alpha \notin \mathcal{O}\}$$
   ($+\infty$ if the set is empty) and
   $$Z(x_0) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\int_0^{\tau(x^\alpha)} \left(1 + \frac{1}{4}|\alpha_s|^2\right) ds \right).$$
   After writing a dynamic programming principle for Z, check that Z is a viscosity solution of equation (2) and infer that $Z = W$.

9. Check that $W(x_0) > 0$ for any $x_0 \in \mathcal{O}$.

10. We assume (in this question only) that $\sigma(x)$ is the identity matrix for any $x \in \mathbb{R}^d$. Compute the map W in $\mathcal{O}$. What is the limit in this case of $-\sqrt{\epsilon}\log(V_\epsilon(x_0))$ as $\epsilon \to 0$?

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2012-2013

Examen de contrôle stochastique
Lundi 10 Juin 2013 — durée 3h.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur Ω. On fixe un paramètre $\epsilon > 0$ et on considère l'équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} dX_s = \sqrt{(2\epsilon)}\ \sigma(X_s)dB_s \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est la donnée initiale et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ bornée et à dérivées premières bornées. On suppose de plus que σ est inversible et d'inverse bornée. On note $(X_s^{x_0})_{s\geq 0}$ l'unique solution de cette EDS.

Soit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que l'ouvert $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) < 0\}$ est *non vide et borné* et que $D\phi(x) \neq 0$ si $\phi(x) = 0$. On sait alors que $\overline{\mathcal{O}} = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) \leq 0\}$ et que $\partial\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x) = 0\}$.

Si $x_0 \in \mathcal{O}$, on définit le temps de sortie de $\mathcal{O}$ comme

$$\tau_{\mathcal{O}}(x_0) = \inf\{t \geq 0\ ;\ X_t^{x_0} \notin \mathcal{O}\}$$

($+\infty$ si l'ensemble est vide) et on pose

$$V_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}\left[e^{-\tau_{\mathcal{O}}(x_0)}\right].$$

On admettra que V_ϵ est continue sur $\overline{\mathcal{O}}$ avec $V_\epsilon = 1$ dans $\partial\mathcal{O}$.

1. Démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$, $V_\epsilon(x_0) \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$.

   L'objet du problème est de quantifier cette convergence.

2. Utiliser la propriété de Markov pour démontrer que, pour tout temps d'arrêt $\theta > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$, on a
$$V_\epsilon(x_0) = \mathbb{E}\left[e^{-\theta\wedge\tau_{\mathcal{O}}(x_0)} V_\epsilon\left(X^{x_0}_{\theta\wedge\tau_{\mathcal{O}}(x_0)}\right)\right].$$
   (où $a \wedge b = \inf\{a, b\}$).

3. On pose $a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$ (* désigne la transposition). Démontrer que V est solution de viscosité de l'équation
$$\begin{cases} V_\epsilon(x) - \epsilon\mathrm{Tr}\left(a(x)D^2V_\epsilon(x)\right) = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{O} \\ V_\epsilon(x) = 1 \qquad \text{dans } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$
   (on soignera l'explication).

4. Afin de comprendre le comportement de V_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$, on pose
$$W_\epsilon(x_0) = -\sqrt{\epsilon}\log(V_\epsilon(x_0)).$$
   Vérifier que W_ϵ est continue dans $\overline{\mathcal{O}}$ et est solution *de viscosité* de l'équation
$$\begin{cases} -\sqrt{\epsilon}\ \mathrm{Tr}\left(a(x)D^2W_\epsilon(x)\right) + |\sigma^*(x)DW_\epsilon(x)|^2 = 1 \qquad \text{dans } \mathcal{O} \\ W_\epsilon(x) = 0 \qquad \text{dans } \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{1}$$
   (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$)

5. En utilisant la définition de V_ϵ, vérifier que $W_\epsilon(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

   On admet que l'équation (1) vérifie un principe de comparaison: si u est une sous-solution continue de (1) tandis que v est en est une sur-solution continue, et si $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$, alors $u \leq v$ dans $\mathcal{O}$.

6. On suppose, dans cette question seulement, que ϕ est strictement convexe dans $\mathbb{R}^d$: $D^2\phi > 0$ dans $\mathbb{R}^d$ (au sens des matrices symétriques).

   (a) Soit $m := \min \phi$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ (indépendant de ϵ) tel que la fonction
   $$\psi(x) := -\lambda\big(\sqrt{\phi(x) - m} - \sqrt{-m}\big)$$
   est sursolution de viscosité de (1) pour tout $\epsilon \in (0, 1]$.

   (b) En déduire alors que les fonctions W_ϵ sont uniformément bornées dans $\overline{\mathcal{O}}$.

   On admet l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de ϵ, telle que W_ϵ est lipschitzienne dans $\overline{\mathcal{O}}$ de constante de Lipschitz C :
   $$\sup_{x \neq y} \frac{W_\epsilon(x) - W_\epsilon(y)}{|x - y|} \leq C \qquad \forall \epsilon > 0.$$

7. (a) On suppose qu'il existe une suite $\epsilon_n \to 0$ telle que (W_{ϵ_n}) converge uniformément vers une fonction W dans $\overline{\mathcal{O}}$. Démontrer que W est lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure ou égale à C.

   (b) Montrer que W est solution de viscosité de
   $$\begin{cases} |\sigma^*(x)DW(x)|^2 = 1 \qquad \text{dans } \mathcal{O} \\ W(x) = 0 \qquad \text{dans } \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{2}$$

   (c) Expliquer, en utilisant des résultats de cours, pourquoi l'équation (2) possède une unique solution de viscosité de constante de Lipschitz inférieure ou égale à C.

   (d) En déduire que, lorsque $\epsilon \to 0$, W_ϵ tend vers vers l'unique solution de viscosité de (2) de constante de Lipschitz inférieure ou égale à C.

8. Soit $\mathcal{A} = L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$ et, pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, $(x_s^\alpha)_{s \geq 0}$ la solution de l'équation différentielle ordinaire
   $$\begin{cases} \frac{d}{ds} x_s^\alpha = \sigma(x_s^\alpha)\alpha_s \\ x_0^\alpha = x_0 \end{cases}$$
   On pose
   $$\tau(x^\alpha) = \inf\{t \geq 0 \,;\, x_s^\alpha \notin \mathcal{O}\}$$
   ($+\infty$ si l'ensemble est vide) et
   $$Z(x_0) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\int_0^{\tau(x^\alpha)} \left(1 + \frac{1}{4}\,|\alpha_s|^2\right) ds \right).$$
   En écrivant un principe de programmation dynamique sur Z, vérifier que Z est solution de viscosité de l'équation (2) et en déduire que $Z = W$.

9. Vérifier que $W(x_0) > 0$ pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$.

10. On suppose (dans cette question seulement) que $\sigma(x)$ est la matrice identité pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Déterminer alors la fonction W dans $\mathcal{O}$. Quelle est dans ce cas la limite de $-\sqrt{\epsilon}\log(V_\epsilon(x_0))$ lorsque $\epsilon \to 0$?

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2013-2014

Examen de rattrapage de contrôle stochastique
Lundi 05 Mai 2014 — durée 3h.

Toutes les questions sont indépendantes, à condition d'admettre le résultat des questions précédentes.

Notations : Dans tout le problème, N est un entier ≥ 2, $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire associé. Si $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $D\phi(x)$ désigne le gradient de ϕ en x et $\Delta\phi(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x)$ son laplacien. Si $s, t \in \mathbb{R}$, on pose $s \wedge t := \min\{s, t\}$. Enfin, pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A : $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, 0 sinon.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien standard $N-$dimensionnel (B_t). On note $(\mathcal{F}_t)$ la complétion de la filtration engendrée par (B_t). Soit L^2_{ad} l'ensemble des processus $\alpha : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$, progressivement mesurables par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et tels que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t} |\alpha_t|^2 dt\right] < +\infty .$$

Etant donnés $\alpha \in L^2_{\text{ad}}$ et une position initiale $x \in \mathbb{R}^N$, on note $(X_t^{x,\alpha})$ l'unique solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \alpha_t dt + \sqrt{2} dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le problème concerne l'analyse de contrôles stochastiques sous contrainte d'état. La contrainte $\mathcal{O}$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| < 1\}.$$

On cherche à optimiser un coût sous la contrainte que la trajectoire $(X_t^{x,\alpha})$ reste dans $\mathcal{O}$: pour $x \in \mathcal{O}$, on notera $\mathcal{A}(x)$ l'ensemble des contrôles $\alpha \in L^2_{\text{ad}}$ tels que

$$\mathbb{P}\left[X_t^{\alpha,x} \in \mathcal{O}\ ,\ \forall t \geq 0\right] = 1 .$$

Les éléments de $\mathcal{A}(x)$ sont appelés contrôles admissibles. Le coût est défini à l'aide d'une fonction $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$: si $x \in \mathcal{O}$ et $\alpha \in \mathcal{A}(x)$, on pose

$$J(x, \alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(h(X_t^{x,\alpha}) + \frac{1}{2}|\alpha_t|^2\right) dt\right]$$

On remarquera que, comme h est bornée dans $\mathcal{O}$, $J(x, \alpha)$ est bien défini. La fonction valeur du problème, $u(x)$, en un point $x \in \mathcal{O}$, est alors définie, par

$$u(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(x)} J(x, \alpha) \quad \text{si } \mathcal{A}(x) \neq \emptyset, \qquad u(x) = +\infty \text{ sinon.}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction valeur u.

Partie I : existence de contrôles admissibles
On admet qu'il existe une fonction radiale $v : \mathcal{O} \to (0, +\infty)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que

$$\lim_{|x| \to 1^-} v(x) = +\infty$$

et

$$-\Delta v(x) + \frac{1}{2}|Dv(x)|^2 + v(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{O} \; .$$

Pour $x \in \mathcal{O}$, on considère X_t la solution maximale de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = -Dv(X_t)dt + \sqrt{2} dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Cela signifie que (X_t) est définie sur un intervalle aléatoire $[0, \theta[$ (où θ est un temps d'arrêt strictement positif) et ne peut pas être prolongé à un intervalle strictement plus grand. Pour $M > v(x)$, on définit le temps d'arrêt $\tau_M = \inf\{t \in [0, \theta[\;, \; v(X_t) \geq M\}$ (avec convention $\tau_M = \theta$ si $v(X_t) < M$ pour tout $t < \theta$). Par définition de (X_t), on a $\theta = \lim_{M \to +\infty} \tau_M$, $\mathbb{P}-$p.s.

(I.1) En utilisant la formule d'Itô, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[v(X_{t \wedge \tau_M}) e^{-(t \wedge \tau_M)} \right] \leq v(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau_M} e^{-s} \; \frac{1}{2}|Dv(X_s)|^2 ds \right]$$

(I.2) En remarquant que $v(X_{t \wedge \tau_M}) \mathbf{1}_{\{\tau_M \leq t\}} = M \mathbf{1}_{\{\tau_M \leq t\}}$, en déduire que

$$\mathbb{P}\left[\tau_M \leq t \right] \leq \frac{v(x) e^t}{M} \; .$$

(I.3) Montrer alors que $\theta = +\infty$ $\mathbb{P}-$p.s.

(I.4) Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t} |Dv(X_t)|^2 dt \right] < +\infty$$

et en déduire que le processus $(\bar{\alpha}_t := -Dv(X_t))$ est un contrôle admissible au point x (i.e., $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}(x)$).

(I.5) Soit $a \in \mathbb{R}^N$ fixé et $x \in \mathcal{O}$. On cherche à construire un contrôle admissible $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ tel qu'il existe un temps d'arrêt $\tau > 0$ avec $\alpha_t = a$ p.p. dans $]0, \tau[$. Pour cela, on fixe $r = (1 - |x|)/2$ et on définit le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t > 0, \; |X_t^{x,a} - x| > r\}.$$

On considère la solution maximale $(X_t)_{t \geq \tau}$ de

$$\begin{cases} dX_t = -Dv(X_t)dt + \sqrt{2} dB_t, \qquad t \geq \tau \\ X_\tau = X_\tau^{x,a} \end{cases}$$

On pose alors $\alpha_t = a$ si $t \in]0, \tau[$ et $\alpha_t = -Dv(X_t)$ si $t > \tau$. Vérifier que α satisfait les propriétés demandées.

Deuxième partie : analyse de la fonction valeur u. On suppose dans toute la suite que u est continue dans $\mathcal{O}$.

(II.1) (Programmation dynamique) Expliquer de façon heuristique pourquoi, pour tout temps d'arrêt $\theta > 0$,

$$u(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(x)} \left[u(X_\theta^{x,\alpha}) e^{-\theta} + \int_0^\theta e^{-t} \left(h(X_t^{x,\alpha}) + \frac{1}{2}|\alpha_t|^2 \right) \right] \, dt \, .$$

On insistera sur les différences avec le cas sans contrainte d'état.

(II.2) En utilisant la question (I.5) démontrer que u est sous-solution de viscosité de l'équation

$$-\Delta u(x) + \frac{1}{2}|Du(x)|^2 + u(x) = h(x) \qquad \text{dans } \mathcal{O} \, .$$

On *admet que* u est sur-solution de viscosité de cette équation.

Troisième partie : comportement au bord de la fonction valeur u.

(III.1) Soit $w : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\overline{\mathcal{O}}$, et vérifiant l'inéquation

$$-\Delta w(x) + \frac{1}{2}|Dw(x)|^2 + w(x) \leq h(x) \qquad \text{dans } \mathcal{O} \, .$$

(i) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{O}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(x)$ et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\left[w(X_t^{x,\alpha}) e^{-t} \right] = w(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-s} \left(-w(X_s^{x,\alpha}) + \langle Dw(X_s^{x,\alpha}), \alpha_s \rangle + \Delta w(X_s^{x,\alpha}) \right) \, ds \right]$$

(ii) En déduire que, pour tout $x \in \mathcal{O}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(x)$, et pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}\left[w(X_t^{x,\alpha}) e^{-t} + \int_0^t e^{-s} \left(h(X_s^{x,\alpha}) + \frac{1}{2}|\alpha_s|^2 \right) ds \right] \geq w(x) \, .$$

(iii) Conclure que $w \leq u$ dans $\mathcal{O}$.

(III.2) (i) Montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, la fonction $w_\epsilon(x) = -\ln(1 - |x|^2 + \epsilon) - D$ satisfait

$$-\Delta w_\epsilon(x) + \frac{1}{2}|Dw_\epsilon(x)|^2 + w_\epsilon(x) \leq h(x) \qquad \text{dans } \mathcal{O} \, .$$

(Indication : on pourra par exemple distinguer suivant que $|x| \leq 1/2$ et $1/2 < |x| < 1$).

(ii) En déduire finalement que $\lim_{|x| \to 1^-} u(x) = +\infty$.

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2014-2015

Examen de contrôle stochastique
Jeudi 16 Avril 2015 — durée 3h.

Toutes les questions sont indépendantes, à condition d'admettre le résultat des questions précédentes.

On étudie dans ce sujet un problème de maximisation d'utilité de consommation en horizon infini, dans un marché composé d'un actif sans risque et d'un actif risqué (suivant une dynamique de Black-Scholes). La particularité du modèle est que l'agent peut effectuer des transactions uniquement à des dates discrètes aléatoires exogènes.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel sont définis :

- un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$,
- une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$, tels que τ_1 et les $\tau_{i+1} - \tau_i$ soient indépendants, indépendants de B et suivent une distribution exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (c'est à dire par exemple $\mathbb{P}(\tau_1 \geq h) = e^{-\lambda h}$ pour $h \geq 0$).

Une stratégie sera donnée par un couple $\gamma = (c, \alpha)$ où :

- $c = (c_t)_{t\geq 0}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ où chaque α_n est $\mathcal{F}_{\tau_n}$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $x, y \geq 0$ donnés, on considère alors le couple de processus $(X_t^{\gamma,x}, Y_t^{\gamma,y})_{t\geq 0}$ définis comme les solutions des EDS :

$$\begin{cases} X_t = x - \int_0^t c_s ds + \sum_{\tau_n \leq t} \alpha_n, \\ Y_t = y + \int_0^t Y_{s-}(b\, ds + \sigma\, dB_s) - \sum_{\tau_n \leq t} \alpha_n. \\ X_0 = x, \quad Y_0 = y. \end{cases} \tag{1}$$

Intuitivement, cette dynamique correspond à un agent ayant un montant X_t investi dans l'actif sans risque, et Y_t dans l'actif risqué, consommant en continu, mais effectuant des transferts de fonds entre ses positions sans risque et risquées uniquement aux dates τ_n, $n \geq 1$.

On dira que γ est admissible, noté $\gamma \in \mathcal{A}(x, y)$, si presque sûrement

$$X_t^{\gamma,x} \geq 0, \quad Y_t^{\gamma,y} \geq 0 \quad \forall t \geq 0,$$

et on considère le problème de maximisation d'utilité

$$v(x, y) = \sup_{(c,\alpha)\in\mathcal{A}(x,y)} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho s} U(c_s) ds\right],$$

où $\rho > 0$ est fixé et U est une fonction croissante concave sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour une constante K_U et un $p \in]0, 1[$,

$$U(c) \leq K_U c^p.$$

Partie I : une borne sur la fonction valeur v

(I.1) Soit $\tilde{U}(z) := \sup_{c\geq 0}(U(c) - cz)$. Montrer qu'il existe $\tilde{K} > 0$ tel que pour tout $z > 0$,

$$\tilde{U}(z) \leq \tilde{K} z^{-q},$$

où $q = \frac{p}{1-p}$.

(I.2) On suppose que

$$\rho > \sup_{\pi\in[0,1]} (\pi p b - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 p(1-p)).$$

Montrer que pour K assez grand, $w(x, y) = K(x + y)^p$ satisfait sur $]0, +\infty[^2$:

$$\rho w - \frac{1}{2} y^2\sigma^2\partial^2_{yy} w - yb\partial_y w - \tilde{U}(\partial_x w) \geq 0. \tag{2}$$

(On pourra noter $\pi = \frac{y}{x+y}$).

Dans la suite de cette partie, on supposera que K est choisi tel que (2) est vérifiée.

(I.3) Soit $\zeta = \inf\{t \geq 0, X^{\gamma,x}_t + Y^{\gamma,y}_t = 0\}$. Montrer que si $(c, \alpha) \in \mathcal{A}(x, y)$, alors p.s.

$$X^{\gamma,x}_s + Y^{\gamma,y}_s = 0, \ \ \forall s \geq \zeta.$$

(I.4) Déduire des questions précédentes que pour tous $t, x, y \geq 0$ et $\gamma \in \mathcal{A}(x, y)$,

$$w(x, y) \geq \mathbb{E}\left[e^{-\rho t} w(X^{\gamma,x}_t, Y^{\gamma,y}_t) + \int_0^t e^{-\rho s} U(c_s) ds\right].$$

(I.5) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$v(x, y) \leq K(x + y)^p.$$

Dans le reste du problème, on admettra que v est continue sur $\mathbb{R}^2_+$.

Partie II : équation de HJB du problème

L'objectif de cette partie est de relier v à l'équation de HJB suivante (dont la fonction u est l'inconnue) :

$$\rho u - \frac{1}{2} y^2\sigma^2\partial^2_{yy} u - yb\partial_y u - \tilde{U}(\partial_x u) - \lambda\left[(\mathcal{H}v)(x + y) - u(x, y)\right] = 0, \tag{3}$$

où on définit $(\mathcal{H}v)(r) = \sup_{0\leq a\leq r} v(a, r - a)$ pour tout $r \geq 0$.

On admet le principe de programmation dynamique : pour tout temps d'arrêt fini $\tilde{\tau}$,

$$v(x, y) = \sup_{\gamma=(c,\alpha)\in\mathcal{A}(x,y)} \mathbb{E}\left[\int_0^{\tilde{\tau}} e^{-\rho s} U(c_s) ds + e^{-\rho\tilde{\tau}} v(X^{x,\gamma}_{\tilde{\tau}}, Y^{y,\gamma}_{\tilde{\tau}})\right].$$

(II.1) Montrer qu'on a pour tout $h \geq 0$

$$v(x,y) = \sup_{\gamma=(c,\alpha)\in\mathcal{A}(x,y)} \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_1\wedge h} e^{-\rho s} U(c_s)ds + e^{-\rho h} v(X_h^{\gamma,x}, Y_h^{\gamma,y}) 1_{\{\tau_1 > h\}}$$
$$+ e^{-\rho\tau_1} (\mathcal{H}v)(X_{\tau_1 -}^{\gamma,x} + Y_{\tau_1 -}^{\gamma,y}) 1_{\{\tau_1 \leq h\}} \Big].$$

(On pourra admettre l'existence d'une fonction mesurable ξ telle que $(\mathcal{H}v)(r) = v(\xi(r), r - \xi(r))$ pour tout $r \geq 0$.)

(II.2) Soient $x, y > 0$, $c \geq 0$ fixés. Montrer qu'il existe $\gamma = (c, \alpha) \in \mathcal{A}(x,y)$ tels que $(c_t)_{t\geq 0}$ est déterministe et $c_t = c$ pour tout t assez petit.

(II.3) Soient x, y, γ comme dans la question précédente. Montrer que pour toute fonction ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^2$, on a

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{-\rho\tau_1} \phi\left(X_{\tau_1 -}, Y_{\tau_1 -}\right) | \tau_1 \leq h \right] = \phi(x,y).$$

En déduire que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}\left[e^{-\rho\tau_1} \phi\left(X_{\tau_1 -}, Y_{\tau_1 -}\right) 1_{\{\tau_1 \leq h\}} \right] = \lambda \phi(x,y).$$

(II.4) Montrer que v est sur-solution de viscosité de (3).

On admettra que v est aussi sous-solution de viscosité de (3).

Partie III : comportement asymptotique quand $\lambda \to \infty$

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement de la fonction valeur quand $\lambda \to \infty$. On notera v^λ la fonction valeur correspondant au paramètre λ.

On rappelle que v^λ est solution de viscosité de

$$\rho u - \frac{1}{2} y^2 \sigma^2 \partial_{yy}^2 u - yb\partial_y u - \tilde{U}(\partial_x u) - \lambda(\mathcal{H}v^\lambda(x+y) - u(x,y)) = 0.$$

(III.1) On admet que $v^{\lambda'} \geq v^\lambda$ quand $\lambda' \geq \lambda$, et qu'il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$|v^\lambda(x,y) - v^\lambda(x',y')| \leq C(|x-x'|^p + |y-y'|^p).$$

Montrer qu'il existe une fonction v^∞ continue sur $\mathbb{R}_+^2$ telle que $v^\lambda \to v^\infty$ uniformément sur tout compact.

(III.2) En utilisant la propriété de sous-solution de v^λ et un théorème de convergence pour les solutions de viscosité, montrer qu'on a nécessairement pour tous $x, y \geq 0$

$$v^\infty(x,y) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \uparrow \mathcal{H}v^\lambda(x+y),$$

et en déduire qu'on a $v^\infty(x,y) = \tilde{v}(x+y)$ pour une fonction $\tilde{v}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

(III.3) En utilisant une propriété de sur-solution de viscosité de v^∞, montrer que pour tout $\pi \in [0,1]$, $\tilde{v} = \tilde{v}(r)$ est sur-solution de

$$\rho w - \frac{1}{2}\pi^2 r^2 \sigma^2 w'' - \pi r b w' - \tilde{U}(w') = 0.$$

(III.4) On admet qu'on peut en fait montrer que $\tilde{v} = \tilde{v}(r)$ est l'unique solution de viscosité sur $]0, +\infty[$ de

$$\rho u - \sup_{\pi \in [0,1]} \left(\frac{1}{2} \pi^2 r^2 \sigma^2 u'' + \pi r b u' \right) - \tilde{U}(u') = 0 \tag{4}$$

satisfaisant $0 \leq u(r) \leq K r^p$ pour tout $r \geq 0$.

Ecrire un problème de contrôle associé à (4) et interpréter ce résultat.

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2014-2015

Examen de rattrapage de contrôle stochastique
Vendredi 20 Mai 2015 — durée 3h.

Notation : Si $\phi = \phi(t,s)$ est une application définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on désigne par $\partial_t\phi$ sa dérivée partielle première par rapport à la variable t, et par respectivement ϕ_s et ϕ_{ss} ses dérivées partielles première et seconde par rapport à la variable s.

Le modèle étudié dans cet exercice est un problème de couverture dans lequel l'évolution du portefeuille est contrainte à être une semi-martingale contrôlée, avec des bornes sur le contrôle. Soit T un horizon fixé, $t \in [0,T]$ et $s \in]0,+\infty[$ une position initiale d'un actif risqué $(S_u^{t,s})_{t\le u\le T}$ de loi

$$S_u^{t,s} = s\exp\left[\sigma(W_u - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(u-t)\right]$$

où $\sigma > 0$ est un réel fixé et où (W_u) est un brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_u)$ vérifiant les conditions usuelles.

Un contrôle est un triplet $\nu = (y, \alpha, \beta)$, où $y \in \mathbb{R}$ et où (α_t) et (β_t) sont des processus progressivement mesurables par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, à valeurs réelles, et essentiellement bornés, i.e., il existe $C = C(\nu) > 0$ tel que

$$|\alpha_t| \le C \text{ et } |\beta_t| \le C \qquad \text{pour presque tout } t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{−p.s.}$$

Etant donné un contrôle $\nu = (y,\alpha,\beta)$, le nombre de parts d'actif risqué détenus à l'instant t est la semi-martingale $(Y_u^{t,\nu})_{t\le u\le T}$ donnée par

$$Y_u^{t,\nu} = y + \int_t^u \alpha_r dr + \int_t^u \sigma\beta_r dW_r \qquad t \le u \le T\ .$$

Si la valeur initiale du portefeuille est $x \ge 0$, sa valeur $X_u^{t,x,\nu}$ à l'instant u est alors donnée par

$$X_u^{t,x,\nu} = x + \int_t^u Y_r^{t,\nu} dS_r^{t,s} \qquad t \le u \le T\ .$$

Etant donnés une constante $\Gamma > 0$ fixé et $x \ge 0$, on dit qu'un contrôle $\nu = (y,\alpha,\beta)$ est admissible—et on notera dans ce cas $\nu \in \mathcal{N}(t,x)$—si

$$X_u^{t,x,\nu} \ge 0 \text{ et } \beta_u \le \Gamma \qquad \text{pour presque tout } u \in [t,T],\ \mathbb{P}\text{−p.s.}$$

On cherche à résoudre le problème de couverture suivant :

$$v(t,s) = \inf\left\{x \ge 0\ ;\ \exists\nu \in \mathcal{N}(t,x) \text{ avec } X_T^{t,x,\nu} \ge g(S_T^{t,s})\ \mathbb{P}-\text{p.s.}\right\}$$

où $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est une fonction continue et bornée fixée. On admettra qu'il existe une plus petite fonction continue $\hat{g} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que

$$\hat{g} \ge g \qquad \text{et} \qquad s \to \hat{g}(s) - \Gamma s\ln(s) \text{ est concave dans }]0,+\infty[.$$

On supposera dans toute la suite qu'il existe une constante $C_0 \in \mathbb{R}$ telle que l'application $s \to \hat{g}(s) - C_0 s\ln(s)$ est convexe dans $]0,+\infty[$.

L'objectif de ce problème est de montrer que la fonction valeur v est donnée par

$$v(t,s) = \mathbb{E}\left[\hat{g}(S_T^{t,s})\right]$$

On pose $\hat{v}(t,s) = \mathbb{E}\left[\hat{g}(S_T^{t,s})\right]$.

Pour alléger les arguments, on travaillera sous les hypothèses simplificatrices suivantes : on supposera que la fonction v est continue sur $]0,T[\times]0,+\infty[$ et que, pour tout $(t,s)\in]0,T[\times]0,+\infty[$, il existe un contrôle admissible $\nu \in \mathcal{N}(t, v(t,s))$ tel que $g(S_T^{t,s}) \geq X_T^{t,v(t,s),\nu}$ $\mathbb{P}-$p.s. Enfin, on admettra que $\hat{v}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]0,T[\times]0+\infty[$, et continue sur $[0,T]\times[0+\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $t\in[0,T]$, la fonction $s\to\hat{v}(t,s)-\Gamma s\ln(s)$ est concave sur $]0,+\infty[$ et que la fonction $s\to\hat{v}(t,s)-C_0 s\ln(s)$ est convexe sur $]0,+\infty[$. En déduire que

$$C_0 \leq s\hat{v}_{ss}(t,s) \leq \Gamma \qquad \text{dans }]0,T[\times]0,+\infty[.$$

2. Montrer, en utilisant la formule d'Itô et la propriété de Markov de S, que

$$-(\partial_t + \mathcal{L})\hat{v} = 0 \qquad \text{dans }]0,T[\times]0,+\infty[\ .$$

où

$$\mathcal{L}\phi(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2\phi_{ss}(t,s).$$

3. L'objectif de cette question est de montrer que $v(t,s)\leq\hat{v}(t,s)$. Pour cela on pose $y=\hat{v}_s(t,s)$, $\alpha_u = (\partial_t+\mathcal{L})\hat{v}_s(u,S_u)$, $\beta_u = S_u\hat{v}_{ss}(u,S_u)$ et $x=\hat{v}(t,s)$.

   (i) Vérifier que $Y_u^{t,\nu} = \hat{v}_s(u,S_u)$ et $X_u^{t,x,\nu} = \hat{v}(u,S_u)$ sur $[t,T]$. En déduire que

$$g(S_T) \leq \hat{g}(S_T) = \hat{v}(t,s) + \int_t^T Y_u^{t,\nu} dS_u^{t,s} \qquad \text{sur } [t,T].$$

   (ii) Calculer l'équation satisfaite par $\hat{v}_s$ et en déduire que ν est un contrôle admissible.

   (iii) Conclure que $v(t,s)\leq\hat{v}(t,s)$.

4. (Semi-programmation dynamique) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\nu\in\mathcal{N}(t,x)$ tels que $g(S_T^{t,s})\leq X_T^{x,\nu}$ $\mathbb{P}-$p.s. et θ un temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$. Expliquer heuristiquement pourquoi

$$X_\theta^{x,\nu} \geq v(\theta, S_\theta) \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

5. Démontrer que v est sur-solution de viscosité de

$$-(\partial_t+\mathcal{L})v \geq 0 \qquad \text{dans }]0,T[\times]0,+\infty[\ .$$

6. L'objet de cette question est de montrer que la fonction $s\to v(t,s)-\Gamma s\ln(s)$ est concave sur $]0,+\infty[$ quel que soit $t\in]0,T[$. Pour cela on admet le résultat suivant : si $z\in\mathbb{R}$, $(a_u)_{t\leq u\leq T}$ et $(b_u)_{t\leq u\leq T}$ sont des processus progressivement mesurables et bornés, et si θ est un temps d'arrêt sur $]t,T]$, tels que

$$C(h\wedge(\theta-t)) \geq \int_t^{(t+h)\wedge\theta}\left[z+\int_t^u a_r dr + \int_t^u b_r dS_r\right]\ dS_u$$

(où $S_u = S_u^{t,s}$) pour tout $h>0$ petit et pour une certaine constante C, alors

$$\lim_{h\to 0^+} \text{ess}-\inf\nolimits_{t\leq u\leq h} b_u \leq 0\ .$$

(i) On rappelle qu'une fonction continue w :$]0,T[\times]0,+\infty[$ est telle que $s \to w(t,s)$ est concave sur $]0,+\infty[$ pour tout $t \in]0,T[$ si et seulement si w est sur-solution, au sens viscosité, de

$$-w_{ss} \geq 0 \qquad \text{dans }]0,T[\times]0,+\infty[\ .$$

En déduire que, pour montrer que la fonction $s \to v(t,s) - \Gamma s \ln(s)$ est concave sur $]0,+\infty[$ quelque soit $t \in]0,T[$, il suffit de prouver que v est sur-solution, au sens viscosité, de

$$-s\ v_{ss} + \Gamma \geq 0 \qquad \text{dans }]0,T[\times]0,+\infty[\ .$$

(ii) Soit $(t_0,s_0) \in]0,T[\times]0,+\infty[$ et ϕ :$]0,T[\times]0,+\infty[$ une fonction test de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $v(t,s) \geq \phi(t,s)$ pour tout (t,s) et $v(t_0,s_0) = \phi(t_0,s_0)$. Montrer que, si $x_0 = v(t_0,s_0)$ et si $\nu \in \mathcal{N}(t_0,x_0)$ est tel que $X_T^{t_0,x_0,\nu} \geq \mathbb{E}[g(S_T^{t_0,s_0})]$, alors, pour un temps d'arrêt θ sur $]t,T]$ et une constante $C>0$ bien choisis, on a

$$C(h \wedge (\theta - t_0)) \geq \int_{t_0}^{(t_0+h)\wedge\theta} \left[z + \int_{t_0}^{u} a_r dr + \int_{t_0}^{u} b_r dS_r\right] dS_u \qquad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

où $S_r := S_r^{t_0,s_0}$ et

$$z = \phi_s(t_0,s_0),\ a_r = (\partial_t + \mathcal{L})\phi_s(r,S_r) - \alpha_r \qquad \text{et} \qquad b_r = \phi_{ss}(r,S_r) - \beta_r/S_r$$

(iii) Conclure.

7. Montrer que, si le contrôle ν est admissible, alors $X^{t,x,\nu}$ est une martingale locale positive, et donc une sur-martingale. En déduire que

$$v_*(T,s) := \liminf_{t\to T^-,s'\to s} v(t,s') \geq g(s)\ ,$$

puis que

$$v_*(T,s) \geq \hat{g}(s)\ .$$

Conclusion : Comme $\hat{v}$ est solution de l'équation $-\mathcal{L}\hat{v} = 0$ tandis que v est une sur-solution de cette équation, et comme on a $v_*(T,s) \geq \hat{v}(T,s)$, on peut démontrer par un principe de comparaison adapté que $v \geq \hat{v}$. L'inégalité inverse ayant été prouvée, on en déduit que $v = \hat{v}$.[1]

[1] Le sujet est une adaptation d'un travail de M. Soner et N. Touzi, SIAM J.Control and Opt. 39, 73-96.

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2015-2016

Examen de contrôle stochastique
Jeudi 14 Avril 2016 — durée 3h.

Toutes les questions sont indépendantes, à condition d'admettre le résultat des questions précédentes.

Le but de ce sujet est l'étude d'un problème de contrôle stochastique singulier, au sens où les contrôles ne sont pas forcément absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

On note

$$\mathcal{U} = \{(U_t)_{t\geq 0} \text{ adapté, continu à gauche et à variation finie } \}.$$

Soient $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, on admettra que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $x \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $X^{x,U}$ à

$$X_t = x + U_t + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s, \quad \forall t \geq 0.$$

On fixe $\rho > 0$, $c > 0$ et une fonction continue f, et on définit alors

$$v(x) = \sup_{U\in\mathcal{U}} J(x; U), \quad \text{où } J(x; U) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(X_t^{x,U})dt - \int_0^\infty e^{-\rho t} c\,|dU_t|\right].$$

Quelques précisions sur les fonctions à variation finie :

On rappelle qu'une fonction à valeurs réelles A_t est dite à variation finie si elle se décompose en $A_t = A_t^+ - A_t^-$, où A^+ et A^- sont croissants en t. On peut alors définir la mesure signée $dA = dA^+ - dA^-$ et la mesure positive $|dA| = dA^+ + dA^-$.

Pour donner deux exemples (non-exhaustifs !), si f est une fonction continue, on a

$$A_t = \int_0^t a_s ds \Rightarrow \int_0^t f(s)dA_s = \int_0^t f(s)a_s ds, \quad \int_0^t f(s)|dA_s| = \int_0^t f(s)|a_s|ds,$$

$$A_t = A_0 + \sum_{0\leq s<t}(A_{s+} - A_s) \Rightarrow \int_0^t f(s)dA_s = \sum_{0\leq s<t} f(s)(A_{s+} - A_s), \quad \int_0^t f(s)|dA_s| = \sum_{0\leq s<t} f(s)\,|A_{s+} - A_s|\,.$$

Dans tous les cas, A_t se décompose en $A_t = A_t^c + J_t$ où A^c est continu et $J_t = \sum_{0\leq s<t}(A_{s+} - A_s)$ est un terme de saut. On a de plus $|dA| = |dA^c| + |dJ|$.

Notons également l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^t f(s)dA_s\right| \leq \int_0^t |f(s)|\,|dA_s|.$$

On a enfin la formule d'Itô suivante : si la semimartingale X est de la forme

$$X_t = x + A_t + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

(avec A càg à variation finie, A, b, σ adaptés), et $\phi \in C^{1,2}$, alors

$$\phi(t, X_t) = \phi(0, x) + \int_0^t \partial_x\phi(s, X_s)(b_s ds + \sigma_s dB_s) + \int_0^t (\partial_t\phi + \frac{1}{2}\sigma_s^2\partial_{xx}\phi)(s, X_s)ds$$
$$+ \int_0^t \partial_x\phi(s, X_s)dA_s^c + \sum_{s<t}\left(\phi(s, X_{s+}) - \phi(s, X_s)\right). \quad (1)$$

Partie I : vérification dans un cas particulier

Dans cette partie, on se place dans le cas particulier où $b \equiv 0$, $\sigma \equiv \sqrt{2}$, $c = 1$, $\rho = 1$ et $f(x) = -x^2$.

(I.1) (i) Montrer que l'équation $\tanh(x) = x - \frac{1}{2}$ admet une unique solution x dans $]0, +\infty[$.

(ii) Déterminer une solution $w \in C^2(\mathbb{R})$ de

$$\min\left[-w'' + w + x^2, 1 - |w'|\right] = 0$$

telle que $\mathcal{P} := \{x \text{ t.q. } |w'(x)| < 1\}$ soit de la forme $] - \bar{x}, \bar{x}[$ pour un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ à déterminer. (Indication : les solutions de $y''(x) = y(x) + x^2$ sont de la forme $y(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x) - x^2 - 2$, $A, B \in \mathbb{R}$.)

(I.2) (i) Montrer que si $U \in \mathcal{U}$ est tel que $J(x; U) > -\infty$, alors il existe une suite (déterministe) $T_n \to +\infty$ avec $\lim_n \mathbb{E}\left[e^{-T_n} w(X^{x,U}_{T_n})\right] = 0$.

(ii) Montrer (à l'aide de la formule d'Itô (1)) que $w \geq v$.

(I.3) (i) Soit $x \in [-\bar{x}, \bar{x}]$. On admet qu'il existe $U^* \in \mathcal{U}$, $U^* = U^+ - U^-$ avec U^+, U^- croissants continus, tels que presque sûrement, on ait

$$\begin{cases} \forall t > 0, \quad X^*_t := x + \sqrt{2}\, B_t + U^*_t \in [\underline{x}, \bar{x}], \\ \int_0^\infty 1_{\{X^*_t \neq -\bar{x}\}} dU^+_t = \int_0^\infty 1_{\{X^*_t \neq \bar{x}\}} dU^-_t = 0 \end{cases}$$

Montrer que $w(x) = J(x; U^*) = v(x)$.

(ii) Pouvez-vous donner un contrôle optimal dans le cas où la condition initiale $x \notin [-\bar{x}, \bar{x}]$?

(I.4) Dessiner un graphe typique de la trajectoire optimale X^*_t (si possible avec la trajectoire $\sqrt{2}B_t$ correspondante).

Dans la suite, les fonctions b, σ sont de nouveau des fonctions Lipschitz arbitraires, c, ρ des constantes strictement positives, et f une fonction continue supposée bornée.

Partie II : Equation de HJB et propriété de viscosité

L'équation de HJB associée à ce problème s'écrit :

$$\min\left[(\rho - \mathcal{L})w - f, c - |w'|\right] = 0, \tag{2}$$

où $\mathcal{L}\phi(x) = b(x)\phi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x)$.

(II.1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $U' \in \mathcal{U}$ tel que $J(x; U') \geq J(y; U) - c|x - y|$.
En déduire que v est c-Lipschitz, puis que v est sursolution de viscosité de $c - |v'| = 0$.

On admet le principe de programmation dynamique : pour toute famille de temps d'arrêt $(\theta^U)_{U \in \mathcal{U}}$,

$$v(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta^U} e^{-\rho t}(f(X^{x,U}_t)dt - c\,|dU_t|) + e^{-\rho\theta^U} v\left(X^{x,U}_{\theta^U}\right)\right].$$

(II.2) Montrer que v est sur-solution de viscosité de $(\rho - \mathcal{L})v - f = 0$.

(II.3) Dans cette question, on veut montrer que v est sous-solution de viscosité de (2).

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, V un intervalle voisinage compact de x_0, et une fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x_0) = v(x_0)$, $\phi \geq v$. De plus on suppose que pour un certain $\delta > 0$, on a $(\rho - \mathcal{L})\phi - f \geq \delta$ sur V, $|\phi'| \leq c$ sur V et $\phi \geq v + \delta$ en dehors de V.

(i) Montrer qu'il existe une fonction ψ c-Lipschiz, qui coïncide avec ϕ sur V, et telle que $\psi \geq v + \delta$ en dehors de V.

(ii) Pour U fixé, soit θ le temps de sortie de V pour le processus $X^{x_0,U}$. Montrer que

$$\psi(x_0) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^\theta e^{-\rho t}(f(X_t^{x,U})dt - c\,|dU_t|) - ce^{-\rho\theta}|U_{\theta+} - U_\theta| + e^{-\rho\theta}\psi\left(X_{\theta+}^{x,U}\right) - \delta\int_0^\theta e^{-\rho t}dt\right].$$

(iii) On admet le PPD "en $\theta+$" : pour toute famille de temps d'arrêt $(\theta^U)_{U\in\mathcal{U}}$

$$v(x) = \sup_{U\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta^U} e^{-\rho t}(f(X_t^{x,U})dt - c\,|dU_t|) - ce^{-\rho\theta^U}|U_{\theta+} - U_\theta| + e^{-\rho\theta^U} v\left(X_{\theta^U+}^{x,U}\right)\right].$$

Conclure.

Partie III : Un théorème de comparaison

Dans cette partie, on veut montrer le théorème de comparaison pour (2) pour les sur/sous-solutions classiques :

$$u, v \in C^2(\mathbb{R}) \text{ bornées}, u \text{ sous-solution de (2)}, \quad v \text{ sur-solution de (2)} \quad \Rightarrow u \leq v \text{ sur } \mathbb{R}.$$

(III.1) On suppose tout d'abord que $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ bornées sont telles que pour un $c' < c$, l'on ait

$$\min\left[(\rho - \mathcal{L})u - f, c - |u'|\right] \leq 0 \leq \min\left[(\rho - \mathcal{L})v - f, c' - |v'|\right].$$

Pour $\delta > 0$, on pose $M_\delta = \max_{x\in\mathbb{R}} u(x) - v(x) - \delta|x|^2$, et on note x_δ un point où ce maximum est atteint.

(i) Montrer que $\lim_{\delta\to 0} M_\delta = \sup(u - v)$, et que $\lim_{\delta\to 0} \delta|x_\delta|^2 = 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour δ assez petit, on ait $\rho M_\delta \leq C\delta(1 + |x_\delta|^2)$. En déduire que $u \leq v$.

(III.2) On suppose maintenant que $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ bornées sont respectivement sous-solution et sur-solution de (2). Montrer que pour $\lambda \in]0, 1[$, $v^\lambda := \lambda v + (1 - \lambda)\|f\|_\infty$ est sur-solution de

$$\min\left[(\rho - \mathcal{L})w - f, \lambda c - |w'|\right] = 0.$$

Conclure.

Dans la suite, on admet que ce résultat de comparaison reste valable pour les sous/sur-solutions (bornées) au sens de viscosité.

Partie IV: Dépendence en c

Dans cette partie, on fait varier le paramètre $c > 0$, et on notera v^c la fonction valeur correspondante.

(IV.1) Montrer que si $c \leq c'$ alors $v^c \geq v^{c'}$.

(IV.2) Montrer que quand $c \to 0$, v^c converge localement uniformément vers une limite que l'on identifiera.

(IV.3) On admet que $v^\infty := \lim_{c \uparrow +\infty} v^c$ est une fonction continue. Montrer que

$$v^\infty(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(X_t^{x,0}) dt\right], \quad \text{où } X_t^{x,0} = x + \int_0^t b(X_s^{x,0}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x,0}) dBs.$$

Université Paris-Dauphine
Master MASEF
Année 2015-2016

Examen de contrôle stochastique
Vendredi 17 Juin 2016 — durée 3h.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien $M-$dimensionnel adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur Ω. On suppose que l'ensemble A des actions possibles est un compact d'un espace de dimension finie et, pour $t \geq 0$, on note $\mathcal{A}(t)$ l'ensemble des contrôles adaptés, i.e., des processus $\alpha : [t, +\infty[\times\Omega \to A$ progressivement mesurables par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq t}$. Etant donnés $b : \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^{d\times M}$, une position initiale $(t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^d$ et un contrôle $\alpha \in \mathcal{A}(t)$, on considère l'EDS

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)dB_s \\ X_t = x \end{cases}$$

On supposera que les fonctions b et σ sont globalement lipschitziennes et bornées, de sorte que l'EDS ci-dessus possède une unique solution, notée $X_s^{t,x,\alpha}$. On appelle $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ le paiement terminal (le paiement courant est nul) et on supposera également que g est globalement lipschitzienne et vérifie la relation :

$$1 \leq g(x) \leq 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \ .$$

On rappelle que, si Y est une variable aléatoire essentiellement bornée, alors l'essentiel supremum de Y est la quantité

$$\text{ess} - \sup\nolimits_\Omega Y = \inf \{a \in \mathbb{R} \ , \ Y \leq a \qquad \mathbb{P} - \text{p.s.}\}$$

Pour un horizon $T > 0$ fixé, on cherche à minimiser l'essentiel supremum de $g(X_T)$. Pour cela on introduit la fonction valeur

$$V(t, x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}(t)} \text{ess} - \sup\nolimits_\Omega \ g(X_T^{t,x,\alpha}) \ . \tag{1}$$

Comme la caractérisation de V est assez délicate, on va approcher V par la suite de fonctions suivantes : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$V_n(t, x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}(t)} \left(\mathbb{E}\left[\left(g(X_T^{t,x,\alpha})\right)^n\right]\right)^{1/n}$$

Partie I : Préliminaires

(I.1) Vérifier que $1 \leq V_n(t, x) \leq 2$ pour tout $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$.

(I.2) Montrer que, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $0 \leq n \leq m$, on a

$$V_n(t, x) \leq V_m(t, x) \leq V(t, x).$$

(I.3) Montrer que pour $\alpha \in \mathcal{A}(t)$ fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\left(g(X_T^{t,x,\alpha})\right)^n\right]\right)^{1/n} = \text{ess} - \sup\nolimits_\Omega \ g(X_T^{t,x,\alpha}).$$

(I.4) On suppose, dans cette question seulement, que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $b(x) = 0$, $M = d$ et $\sigma(x)$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^d$. Vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} V_n(t,x) = V(t,x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} g(y) \qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d.$$

Dans la suite du problème on admettra que pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$,

$$V(t,x) = \lim_{n\to+\infty} V_n(t,x)$$

Partie II : Propriétés de viscosité de V

On pose $W_n(t,x) = (V_n(t,x))^n$.

(II.1) Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

(II.2) (Question de cours) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Enoncer sans démonstration le principe de programmation dynamique pour W_n.

(ii) Donner l'équation de Hamilton-Jacobi satisfaite par W_n au sens viscosité.

(iii) Rappeler la preuve de propriété de sous-solution de viscosité de cette équation pour W_n.

(II.3) Déduire de la question précédente que, pour $n \geq 3$, V_n est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\begin{cases} -\partial_t V_n - \inf\limits_{a\in A}\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*(x,a)D^2V_n) + \dfrac{(n-1)}{2}V_n^{-1}\|\sigma^*(x,a)DV_n\|^2 + \langle b(x,a), DV_n\rangle\right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^d \\ V_n(T,x) = g(x) \text{ dans } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On suppose, pour simplifier, que V_n converge uniformément vers V sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

Posons, pour tout $(x,p,X) \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d\times d}$ avec X symétrique,

$$H(x,p,X) = \inf_{a\in A,\ \sigma^*(x,a)p=0}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*(x,a)X) + \langle b(x,a), p\rangle\right)$$

On suppose, pour simplifier, que H est continue sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d\times d}$.

(II.4) En utilisant une propriété de stabilité des solutions de viscosité, montrer que V est sous-solution de viscosité de l'équation

$$-\partial_t V - H(x, DV, D^2V) = 0 \qquad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^d. \tag{2}$$

(II.5) Montrer que V est également solution de viscosité de l'équation

$$-\inf_{a\in A}\|\sigma^*(x,a)DV\|^2 = 0 \qquad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^d.$$

Partie III : Un résultat de vérification

Soit $U \in C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}^d)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ solution de

$$\begin{cases} -\partial_t U - H(x, DU, D^2U) = 0 \qquad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^d \\ U(T,x) = g(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(III.1) On suppose que, pour $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$, il existe un contrôle $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}(t)$ tel que, $\mathbb{P} - p.s.$ et pour tout $s \in [t,T]$,

$$\sigma^*(X_s^{t,x,\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}_s) DU(s, X_s^{t,x,\bar{\alpha}}) = 0$$

et

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*(X_s^{t,x,\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}_s) D^2U(s, X_s^{t,x,\bar{\alpha}})) + \langle b(X_s^{t,x,\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}_s), DU(s, X_s^{t,x,\bar{\alpha}})\rangle$$
$$= H(X_s^{t,x,\bar{\alpha}}, DU(s, X_s^{t,x,\bar{\alpha}}), D^2U(s, X_s^{t,x,\bar{\alpha}}))$$

Vérifier que

$$U(t,x) = \mathrm{ess} - \sup\nolimits_\Omega \, g(X_T^{t,x,\bar{\alpha}}).$$

(III.2) On suppose en plus qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A, (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$|\sigma^*(x,a) DU(t,x)| \neq 0 \Rightarrow |\sigma^*(x,a) DU(t,x)| \geq \varepsilon.$$

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(t)$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ U(t,x)^n - \mathbb{E}\left[\left(g(X_T^{t,x,\alpha}) \right)^n \right] \right\} \leq 0.$$

(On pourra appliquer la formule d'Itô, et distinguer suivant les s tels que $\sigma^*(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s) DU(s, X_s^{t,x,\alpha})$ est nul ou non-nul).

En déduire que $U(t,x) \leq V(t,x)$.

(III.3) On suppose que $A = \{0,1\}$, $M = d$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$b(x,0) = b(x,1) = 0,$$

$$\sigma(x,0) = 0, \quad \sigma(x,1) = Id.$$

On suppose également que $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|Dg(x)\| \geq \varepsilon > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Déterminer V et les contrôles optimaux.

Université Paris-Dauphine
Masters MASEF et A&P
Année 2016-2017

Written exam : Stochastic control
Monday, March 13, 2017 — 3h.

All the questions can be treated independently, as long as the results from previous questions are assumed true.

The goal of this problem is to study a stochastic control problem where the final gain depends on the maximum value attained by the norm of the controlled diffusion.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ be a filtered probability space, on which is defined a standard Brownian motion $(B_t)_{t\geq 0}$.

Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be a compact, and denote $\mathcal{A}$ the set of A-valued progressively measurable processes.

Let b and σ be bounded functions, Lipschitz in $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ uniformly in $a \in A$. Given $t, x \in [0,T] \times \mathbb{R}$, and $\alpha \in \mathcal{A}$, denote $X^{t,x,\alpha}$ the unique solution to the SDE

$$dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)ds + \sigma(s, X_s, \alpha_s)dB_s, \quad X_t = x.$$

Given $z \geq 0$, we also denote

$$Z_s^{t,x,\alpha,z} = \max\left\{z, \sup_{t\leq u\leq s} \left|X_u^{t,x,\alpha}\right|\right\}.$$

Let ψ be a Lipschitz and bounded function, and define

$$J(t,x,z;\alpha) = \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^{t,x,z,\alpha}\right)\right]$$

$$v(t,x,z) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,x,z;\alpha).$$

In order to approximate this problem, we consider for $1 \leq p < +\infty$ the process Z^p defined by

$$Z_s^{t,x,\alpha,z,p} = \left(z^p + \int_t^s \left|X_u^{t,x,\alpha}\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

and also

$$J_p(t,x,z;\alpha) = \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^{t,x,z,\alpha,p}\right)\right]$$

$$v_p(t,x,z) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_p(t,x,z;\alpha).$$

Part I : Properties and HJB equation for the function v_p

Let t, x, x', z, z', α and p be fixed, and denote $X = X^{t,x,\alpha}$, $X' = X^{t,x',\alpha}$, $Z = Z^{t,x,z,\alpha,p}$ and $Z' = Z^{t,x',z',\alpha,p}$.

(I.1) Show that

$$\left|Z_T - Z'_T\right| \leq |z - z'| + \left(\int_t^T |X_s - X'_s|^p ds\right)^{1/p}.$$

(Hint : check that

$$Z_T = \left(\int_0^T \left(z 1_{s\leq t} t^{-1/p} + |X_s| 1_{s>t}\right)^p ds\right)^{1/p}$$

(idem for Z') and use Minkowski's inequality

$$|\|f\|_p - \|g\|_p| \leq \|f - g\|_p \text{ where } \|f\|_p = \left(\int_0^T |f(s)|^p ds\right)^{1/p}\Big).$$

Conclude that v_p is Lipschitz in x.

(We recall that there exists a constant C_p such that

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} |X_s - X'_s|^p\right]^{1/p} \leq C_p|x - x'|.)$$

(I.2) Assume $z > 0$. Show that Z satisfies the differential equation

$$dZ_s = \frac{Z_s}{p}\left(\frac{|X_s|}{Z_s}\right)^p ds.$$

It follows that the pair (X, Z) is solution to a controlled SDE, and we are reduced to a standard stochastic control problem.

(I.3) (As seen in class)

(i) Recall the Dynamic Programming Principle satisfied by v_p.

(ii) Show that v_p is a viscosity supersolution of the HJB equation

$$F(t, x, \partial_t v_p, \partial_x v_p, \partial_{xx} v_p) + G_p(x, z, \partial_z v_p) = 0 \quad \text{on } [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \tag{1}$$

where

$$F(t, x, q_t, q_x, q_{xx}) = -q_t - \sup_{a\in A}\left(b(t, x, a)q_x + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, a)q_{xx}\right),$$

$$G_p(x, z, q_z) = -q_z z\left(\frac{|x|}{z}\right)^p.$$

In the rest of the problem, we assume known that v_p is a viscosity solution to (1).

Partie II : A verification theorem

In this section, we fix a $C^{1,2}$ function w with partial derivatives $\partial_t w$, $\partial_x w$, $\partial_{xx} w$, $\partial_z w$ bounded on $[0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$. We further assume that w satisfies :

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w, \partial_x w, \partial_{xx} w) \geq 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| \leq z\} \\ -\partial_z w \geq 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| \geq z\} \\ w(T,x,z) \geq \psi(z) & \end{cases}$$

We then want to show that $w \geq v$.

Recall that there exists a constant $C > 0$ such that for all (t,x,α),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right|\right] \leq C(1+|x|).$$

Fix $\alpha \in \mathcal{A}$, $(t,x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, and denote $X = X^{t,x,\alpha}$ and $Z^p = Z^{t,x,z,\alpha,p}$, $Z = Z^{t,x,z,\alpha}$.

(II.1) Show that for all $s \in (t,T]$

$$\lim_{p \to \infty} \mathbb{E}\left[\, |Z_s^p - Z_s|\right] = 0$$

et deduce that

$$\lim_{p \to \infty} J_p(t,x,z;\alpha) = J(t,x,z;\alpha).$$

(II.2) Let $s \in (t,T]$. We take for granted that $\mathbb{P}(|X_s| = Z_s) = 0$. Show that

$$\lim_{p \to +\infty} \mathbb{P}(|X_s| > Z_s^p) = 0.$$

((II.3) Using Itô's formula, show that there exists a constant $C > 0$ such that for all (t,x,z,α),

$$w(t,x,z) \geq \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^p\right)\right] - C\mathbb{E}\left[\int_t^T 1_{\{X_s > Z_s^p\}} ds + \int_t^T 1_{\{X_s \leq Z_s^p\}} \frac{Z_s^p}{p} ds\right].$$

(II.4) Conclude that $w \geq v$.

Partie III: HJB equation for v

In this section, we assume known that v_p converges to v locally uniformly as $p \to \infty$.

Recall that if w_p are viscosity solutions to the equations $H_p = 0$ and w_p converges to w locally uniformly, then w is a viscosity supersolution to $H^* = 0$ and a viscosity subsolution to$H_* = 0$, where

$$H^*(\xi) = \limsup_{p \to \infty, \zeta \to \xi} H_p(\zeta), \quad H_*(\xi) = \liminf_{p \to \infty, \zeta \to \xi} H_p(\zeta).$$

(Here $\xi = (t,x,z,q_t,q_x,q_{xx},q_z)$ is the argument taken by H).

(III.1) Let $H_p = F + G_p$, compute H^* and H_*.

(Hint : distinguish between the cases $|x| < z$, $|x| > z$ and $|x| = z$, and the sign of q_z).

(III.2) Deduce that v satisfies in viscosity sense :

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w, \partial_x w, \partial_{xx} w) = 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| < z\} \\ -\partial_z w = 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| > z\} \\ \min\{F(t,x,\partial_t w, \partial_x w, \partial_{xx} w), -\partial_z w\} \leq 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| = z\}. \\ \max\{F(t,x,\partial_t w, \partial_x w, \partial_{xx} w), -\partial_z w\} \geq 0 & \text{on } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| = z\}. \end{cases}$$

Partie IV : A C^2 comparison theorem

In this section we are given u and w C^2 on $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, bounded, and such that

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w,\partial_x w,\partial_{xx}w)\geq 0\geq F(t,x,\partial_t u,\partial_x u,\partial_{xx}u) & \text{on } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|\leq z\} \\ -\partial_z w\geq 0\geq -\partial_z u & \text{on } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|\geq z\} \\ w(T,\cdot,\cdot)\geq u(T,\cdot,\cdot) & \text{on } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

We want to show that this implies $u\leq w$.

(IV.1) Show that there exists $\gamma>0$ such that denoting $\psi(t,x)=e^{\gamma(T-t)}\left(|x|^2+1\right)$, one has

$$F(t,x,\partial_t\psi,\partial_x\psi,\partial_{xx}\psi)\geq 1 \text{ on } [0,T)\times\mathbb{R}.$$

(Recall that b and σ are bounded.) In the rest of the section we fix such a γ.

Also fix ϕ, a C^1 bounded function such that $\phi'>0$ on $\mathbb{R}$.

(IV.2) We then consider for $\alpha,\eta,\beta\in(0,1]$

$$M_{\alpha,\eta,\beta}=\sup_{(t,x,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\left(u(t,x,z)-w(t,x,z)-\alpha\psi(t,x)+\eta\phi(z)-\beta|z|^2\right).$$

(i) Show that $M_{\alpha,\eta,\beta}$ is attained at a $(\hat{t},\hat{x},\hat{z})$ (depending on (α,η,β)) and that there exists $C>0$ such that

$$|\hat{x}|\leq C\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

(ii) Show that for all ξ, $\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^3$ and $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, one has

$$F(t,x,\xi+\alpha\tilde{\xi})\geq F(t,x,\xi)+\alpha F(t,x,\tilde{\xi}).$$

(iii) Suppose that $\hat{t}<T$ and $|\hat{x}|<\hat{z}$. Using some relations satisfied by the derivatives at the maximum point and the previous question, show that we are led to the contradiction

$$\alpha\leq 0.$$

(iv) Assume $\hat{t}<T$ and $|\hat{x}|\geq\hat{z}$. Show similarly that in that case

$$-\eta K_\alpha+2C\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\geq 0$$

where C is the constant from question (i) and $K_\alpha=\inf_{[0,C\alpha^{-1/2}]}\phi'$.

(v) Deduce from the previous questions that there exists a sequence $(\alpha_n,\eta_n,\beta_n)\to(0,0,0)$ such that for the corresponding $(\hat{t}^n,\hat{x}^n,\hat{z}^n)$, one has $\hat{t}^n=T$ and deduce

$$\lim_{n\to\infty}M_{\alpha_n,\eta_n,\beta_n}=0.$$

(IV.3) Conclude.

Université Paris-Dauphine
Masters MASEF et A&P
Année 2016-2017

Examen de contrôle stochastique
Lundi 13 Mars 2017 — durée 3h.

Toutes les questions sont indépendantes, à condition d'admettre le résultat des questions précédentes.

Le but de ce sujet est l'étude d'un problème de contrôle stochastique où le gain final dépend de la valeur maximale atteinte par la norme de la diffusion contrôlée.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un compact, et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus progressivement mesurables à valeurs dans A.

Soit b et σ des fonctions bornées et Lipschitz en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ uniformément en $a \in A$. Etant donnés $t, x \in [0,T] \times \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $X^{t,x,\alpha}$ l'unique solution de l'EDS

$$dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)ds + \sigma(s, X_s, \alpha_s)dB_s, \quad X_t = x.$$

Etant donné $z \geq 0$, on note également

$$Z_s^{t,x,\alpha,z} = \max\left\{z, \sup_{t\leq u\leq s} \left|X_u^{t,x,\alpha}\right|\right\}.$$

Soit ψ une fonction Lipschitzienne et bornée, on définit

$$J(t,x,z;\alpha) = \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^{t,x,z,\alpha}\right)\right]$$

$$v(t,x,z) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,x,z;\alpha).$$

Pour approximer ce problème, on introduit pour $1 \leq p < +\infty$ le processus Z^p défini par

$$Z_s^{t,x,\alpha,z,p} = \left(z^p + \int_t^s \left|X_u^{t,x,\alpha}\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

et de même

$$J_p(t,x,z;\alpha) = \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^{t,x,z,\alpha,p}\right)\right]$$

$$v_p(t,x,z) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_p(t,x,z;\alpha).$$

Partie I : Propriétés et équation HJB de la fonction v_p

Pour t, x, x', z, z', α et p fixés, on notera $X = X^{t,x,\alpha}$, $X' = X^{t,x',\alpha}$, $Z = Z^{t,x,z,\alpha,p}$ et $Z' = Z^{t,x',z',\alpha,p}$.

(I.1) Montrer qu'on a

$$\left|Z_T - Z'_T\right| \leq |z - z'| + \left(\int_t^T |X_s - X'_s|^p ds\right)^{1/p}.$$

(Indication : on pourra vérifier que

$$Z_T = \left(\int_0^T \left(z 1_{s \leq t} t^{-1/p} + |X_s| 1_{s>t}\right)^p ds\right)^{1/p}$$

(idem pour Z') et utiliser l'inégalité de Minkowski

$$|\|f\|_p - \|g\|_p| \leq \|f - g\|_p \text{ où } \|f\|_p = \left(\int_0^T |f(s)|^p ds\right)^{1/p}\Big).$$

En déduire que v_p est Lipschitzienne en x.

(On rappelle l'existence d'une constante C_p telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^p\right]^{1/p} \leq C_p |x - x'|.)$$

(I.2) On suppose $z > 0$. Montrer que Z satisfait l'équation différentielle

$$dZ_s = \frac{Z_s}{p}\left(\frac{|X_s|}{Z_s}\right)^p ds.$$

Le couple (X, Z) est donc solution d'une EDS contrôlée, et on est ramenés à la situation d'un problème de contrôle standard.

(I.3) (Question de cours)

(i) Rappeler le principe de programmation dynamique satisfait par v_p.

(ii) Montrer que v_p est sur-solution de viscosité de l'équation de HJB

$$F(t, x, \partial_t v_p, \partial_x v_p, \partial_{xx} v_p) + G_p(x, z, \partial_z v_p) = 0 \quad \text{sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \tag{1}$$

où

$$F(t, x, q_t, q_x, q_{xx}) = -q_t - \sup_{a \in A}\left(b(t, x, a) q_x + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, a) q_{xx}\right),$$

$$G_p(x, z, q_z) = -q_z \frac{z}{p}\left(\frac{|x|}{z}\right)^p.$$

Dans la suite de l'énoncé on admet que v_p est solution de viscosité de (1).

Partie II : Un (demi-)théorème de vérification

Dans cette partie, on fixe une fonction w $C^{1,2}$ et à dérivées partielles $\partial_t w$, $\partial_x w$, $\partial_{xx} w$, $\partial_z w$ bornées sur $[0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$. On suppose de plus que w satisfait :

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w, \partial_x w, \partial_{xx} w) \geq 0 & \text{sur } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| \leq z\} \\ -\partial_z w \geq 0 & \text{sur } (0,T) \times \{(x,z) \mid |x| \geq z\} \\ w(T,x,z) \geq \psi(z) & \end{cases}$$

On veut montrer qu'alors $w \geq v$.

On rappelle l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tous (t,x,α),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left|X_s^{t,x,\alpha}\right|\right] \leq C(1+|x|).$$

Fixons $\alpha \in \mathcal{A}$, $(t,x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et notons $X = X^{t,x,\alpha}$ et $Z^p = Z^{t,x,z,\alpha,p}$, $Z = Z^{t,x,z,\alpha}$.

(II.1) Montrer que pour on a pour tout $s \in (t,T]$

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\,|Z_s^p - Z_s|\right] = 0$$

et en déduire

$$\lim_{p\to\infty} J_p(t,x,z;\alpha) = J(t,x,z;\alpha).$$

(II.2) Soit $s \in (t,T]$. On admet que $\mathbb{P}(|X_s| = Z_s) = 0$. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(|X_s| > Z_s^p) = 0.$$

((II.3) Montrer à l'aide de la formule d'Itô qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous (t,x,z,α),

$$w(t,x,z) \geq \mathbb{E}\left[\psi\left(Z_T^p\right)\right] - C\mathbb{E}\left[\int_t^T 1_{\{|X_s|>Z_s^p\}} ds + \int_t^T 1_{\{|X_s|\leq Z_s^p\}} \frac{Z_s^p}{p} ds\right].$$

(II.4) Conclure que $w \geq v$.

Partie III: Equation de HJB pour v

Dans cette partie on admet que v_p converge vers v localement uniformément quand $p \to \infty$.

On rappelle que si w_p sont des solutions de viscosité pour les équations $H_p = 0$ et que w_p converge vers w localement uniformément, alors w est sur-solution de viscosité de $H^* = 0$ et sous-solution de viscosité de $H_* = 0$, où

$$H^*(\xi) = \limsup_{p\to\infty, \zeta\to\xi} H_p(\zeta), \quad H_*(\xi) = \liminf_{p\to\infty, \zeta\to\xi} H_p(\zeta).$$

(Ici $\xi = (t,x,z,q_t,q_x,q_{xx},q_z)$ désigne l'argument pris par H).

(III.1) Soit $H_p = F + G_p$, calculer H^* et H_*.

(Indication : on distinguera suivant les cas $|x| < z$, $|x| > z$ et $|x| = z$, et suivant le signe de q_z).

(III.2) En déduire que v satisfait au sens des solutions de viscosité :

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w,\partial_x w,\partial_{xx} w)=0 & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|<z\} \\ -\partial_z w=0 & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|>z\} \\ \min\{F(t,x,\partial_t w,\partial_x w,\partial_{xx} w),-\partial_z w\}\le 0 & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|=z\}\,. \\ \max\{F(t,x,\partial_t w,\partial_x w,\partial_{xx} w),-\partial_z w\}\ge 0 & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|=z\}\,. \end{cases}$$

Partie IV : Un résultat de comparaison C^2

Dans cette partie on se donne u et w C^2 sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, bornées, et telles que

$$\begin{cases} F(t,x,\partial_t w,\partial_x w,\partial_{xx} w)\ge 0\ge F(t,x,\partial_t u,\partial_x u,\partial_{xx} u) & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|\le z\} \\ -\partial_z w\ge 0\ge -\partial_z u & \text{sur } (0,T)\times\{(x,z)\mid |x|\ge z\} \\ w(T,\cdot,\cdot)\ge u(T,\cdot,\cdot) & \text{sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

On veut alors montrer que $u\le w$.

(IV.1) Montrer qu'il existe $\gamma>0$ tel que pour $\psi(t,x)=e^{\gamma(T-t)}\left(|x|^2+1\right)$, on ait

$$F(t,x,\partial_t\psi,\partial_x\psi,\partial_{xx}\psi)\ge 1 \text{ sur } [0,T)\times\mathbb{R}.$$

(On rappelle que b et σ sont bornées.) Dans la suite on fixe un tel γ.

On fixe également une fonction ϕ C^1 bornée et telle que $\phi'>0$ sur $\mathbb{R}$.

(IV.2) On considère alors pour $\alpha,\eta,\beta\in(0,1)$

$$M_{\alpha,\eta,\beta}=\sup_{(t,x,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\left(u(t,x,z)-w(t,x,z)-\alpha\psi(t,x)+\eta\phi(z)-\beta|z|^2\right).$$

(i) Montrer que $M_{\alpha,\eta,\beta}$ est atteint en un $(\hat t,\hat x,\hat z)$ (dépendant de (α,η,β)) et qu'il existe $C>0$ telle que

$$|\hat x|\le C\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

(ii) Montrer que pour tous ξ, $\tilde\xi\in\mathbb{R}^3$ et $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, on a

$$F(t,x,\xi+\alpha\tilde\xi)\ge F(t,x,\xi)+\alpha F(t,x,\tilde\xi).$$

(iii) On suppose que $\hat t<T$ et $|\hat x|<\hat z$. En utilisant des relations entre les dérivées au point de maximum et la question précédente, montrer qu'on est conduit à la contradiction

$$\alpha\le 0.$$

(iv) On suppose que $\hat t<T$ et $|\hat x|\ge\hat z$. Montrer de même que dans ce cas

$$-\eta K_\alpha+2C\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\ge 0$$

où C est la même constante que dans la question (i) et $K_\alpha=\inf_{[0,C\alpha^{-1/2}]}\phi'$.

(v) Déduire des questions précédentes qu'il existe une suite $(\alpha_n,\eta_n,\beta_n)\to(0,0,0)$ telle que pour les $(\hat t^n,\hat x^n,\hat z^n)$ correspondants, on ait $\hat t^n=T$ et en déduire

$$\lim_{n\to\infty}M_{\alpha_n,\eta_n,\beta_n}=0.$$

(IV.3) Conclure.

Université Paris-Dauphine
Masters MASEF et A&P
Année 2017-2018

Written exam : Stochastic control
Wednesday, March 21, 2018 — 3h.

No documents are allowed.

All the questions can be treated independently, as long as the results from previous questions are assumed true.

The goal of this problem is to study the asymptotic behaviour of an infinite horizon control problem when the discounting parameter goes to 0.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ be a filtered probability space, on which is defined an n-dimensional Brownian motion $(B_t)_{t\geq 0}$.

Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be a compact, and denote $\mathcal{A}$ the set of A-valued progressively measurable processes.

We will say that a function $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is *periodic* if for all $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $h(x+k) = h(x)$.

Let $b : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^{n\times n}$ be bounded continuous functions, periodic in x, and Lipschitz in (x,a). Given $x \in \mathbb{R}^n$, and $\alpha \in \mathcal{A}$, we denote $X^{x,\alpha}$ the unique solution to the SDE

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dB_t, \quad X_0 = x.$$

Let $f : \mathbb{R}^n \times A$ be continuous and periodic in x (and therefore bounded), we define for a given $\rho > 0$ and $\alpha \in \mathcal{A}$

$$J_\rho(x;\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t)dt\right],$$

and we consider the value function

$$v_\rho(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_\rho(x;\alpha).$$

Furthermore, we define for $(x,p,A) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ the function

$$F(x,p,A) = -\sup_{a\in A}\left(b(x,a)\cdot p + \frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T(x,a)A) + f(x,a)\right).$$

In order to study the behaviour as $\rho \to 0$, we will be led to considering the equation

$$\lambda + F(x, Du, D^2u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \tag{E}$$

with unknowns (λ, u) where $\lambda \in \mathbb{R}$ and $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is periodic.

Preliminary question :

(0.1) Show that v_ρ is a periodic and bounded function.

Part I : A verification approach

In this part we assume to be given $\lambda \in \mathbb{R}$ and $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ periodic satisfying equation (E). We want to show that ρv_ρ converges uniformly to the constant λ as $\rho \to 0$.

(I.1) Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $\alpha \in \mathcal{A}$ be fixed. Show that for all $T \geq 0$ one has

$$u(x) \geq \mathbb{E}\left[e^{-\rho T} u(X_T^{x,\alpha}) + \int_0^T e^{-\rho t}\left(f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t) - \lambda + \rho u(X_t^{x,\alpha})\right) dt\right].$$

Deduce that for all $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) \geq v_\rho(x) - \frac{\lambda}{\rho} - \|u\|_\infty.$$

(I.2) We assume there exists a Lipschitz function $\hat{a} : \mathbb{R}^n \to A$ such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x, Du(x), D^2u(x)) = -b(x, \hat{a}(x))\cdot Du(x) - \frac{1}{2} Tr(\sigma\sigma^T(x, \hat{a}(x)) D^2 u(x)) - f(x, \hat{a}(x)).$$

Show that for all $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) \leq v_\rho(x) - \frac{\lambda}{\rho} + \|u\|_\infty.$$

(I.3) Conclude that (assuming the hypothesis of the previous question), $\rho v_\rho \to \lambda$ uniformly as $\rho \to 0$.

Part II : Uniqueness of the ergodic constant

In this part we want to show that there exists at most one λ such that (E) has a solution.

We therefore consider $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, and u, w continuous and periodic, respective solutions (in a sense to be precised) to

$$\lambda + F(x, Du, D^2 u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n, \tag{E_λ}$$

$$\mu + F(x, Dw, D^2 w) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{E_μ}$$

(II.1) We assume that u and w are C^2 on $\mathbb{R}^n$, and solutions to (E_λ)-(E_μ). By considering the points of maximum and minimum of $u - w$, show that $\lambda = \mu$.

We now assume that u and w are viscosity solutions to (E_λ)-(E_μ), and we want to show again that $\lambda = \mu$.

(II.2) Does the equation (E_λ) satisfy a comparison theorem ? (Hint : $u + c$, $c \in \mathbb{R}$). What assumption from the lectures is not satisfied by this equation ?

(II.3) We assume that $\lambda < \mu$, fix $\delta \in (\lambda, \mu)$ and given $\varepsilon > 0$ we consider the equation

$$\delta + \varepsilon v + F(x, Dv, D^2 v) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{$E_{\delta,\varepsilon}$}$$

We recall that this equation admits a comparison principle (for continuous and bounded viscosity solutions on $\mathbb{R}^n$).

Show that there exists $\varepsilon > 0$ such that u and w are respectively viscosity super-solution and sub-solution of $(E_{\delta,\varepsilon})$, and deduce that it must hold that $u \geq w$.

(II.4) Deduce from the previous question that we must have $\lambda = \mu$.

Part III: Convergence of ρv_ρ under equicontinuity

In this part, we assume that the functions v_ρ, $\rho > 0$ are equicontinuous, and more precisely that

$$\exists C > 0, \quad \forall \rho > 0, \quad v_\rho \text{ is } C\text{-Lipschitz}.$$

We recall that by Arzelà-Ascoli's theorem, a family of periodic functions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ which is equicontinuous and uniformly bounded admits a converging subsequence (with respect to uniform convergence).

(III.1) (As seen in class) Recall the Dynamic Programming Principle satisfied by v_ρ. Show that v_ρ is a viscosity super-solution to

$$\rho v + F(x, Dv, D^2 v) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{HJB}$$

In the remaining questions, we assume known that v_ρ is also a viscosity sub-solution to this equation.

(III.2) Show that there exists a subsequence $\rho_n \to 0$ such that $v_{\rho_n}(x) - v_{\rho_n}(0) \to u$ uniformly and $\rho_n v_{\rho_n}(0) \to \lambda$ as $n \to \infty$ (for some periodic continuous function $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and a constant $\lambda \in \mathbb{R}$).

(III.3) Show that with (u, λ) given by the previous question, u is a viscosity solution to (E).

(III.4) Using the result from Part II, show that ρv_ρ converges to λ uniformly as $\rho \to 0$.

Part IV: A few examples

We want to study the convergence of ρv_ρ as ρ goes to 0 in three specific cases. In all these exemples, we assume that the dimension n is equal to 1 and that $f(x, a) = f(x)$ for all x, a (we recall that f is continuous and periodic).

(IV.1) In this question, we suppose that

$$A = \{0\}, \quad b(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = \sqrt{2},$$

$$f(x) = \sin(2\pi k x), \qquad \text{pour un } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Find an explicit formula for v_ρ (by using (HJB)). Show that ρv_ρ and $v_\rho - v_\rho(0)$ converge uniformly to a pair $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R})$ to be determined.

(IV.2) In this question, we suppose that

$$A = [-1, 1], \quad b(x, a) = a\,|\sin(\pi x)|\,, \quad \sigma(x, 0) = 0,$$

$$f(0) = \inf f < \sup f = f(1/2).$$

Reasoning directly on the control problem, compute $v_\rho(0)$ and $v_\rho(1/2)$. Deduce that ρv_ρ does not converge uniformly to a constant. Show that nevertheless $\rho v_\rho(x)$ converges to $f(1/2)$ for almost every x in $\mathbb{R}$.

(IV.3) In this question, we suppose that

$$A = \{0, 1\}, \quad b(x, a) = 0, \quad \sigma(x, a) = \sqrt{2}a.$$

Show that ρv_ρ converges uniformly to a constant λ (depending on f) to be determined.

Université Paris-Dauphine
Masters MASEF et A&P
Année 2017-2018

Examen de contrôle stochastique
Mercredi 21 Mars 2018 — durée 3h.

Aucun document n'est autorisé.

Toutes les questions sont indépendantes, à condition d'admettre le résultat des questions précédentes.

Le but de ce sujet est l'étude asymptotique d'un problème de contrôle stochastique en horizon infini lorsque le paramètre d'actualisation tend vers 0.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini un mouvement Brownien n-dimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un compact, et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des processus progressivement mesurables à valeurs dans A.

On dira qu'une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *périodique* si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $h(x+k) = h(x)$.

Soit $b : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^{n\times n}$ des fonctions continues bornées, périodiques par rapport à la variable x, et Lipschitziennes en (x, a). Etant donnés $x \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $X^{x,\alpha}$ l'unique solution de l'EDS

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dB_t, \quad X_0 = x.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \times A$ continue, périodique en x (et donc bornée), on définit pour $\rho > 0$ et $\alpha \in \mathcal{A}$

$$J_\rho(x; \alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t)dt\right],$$

et on considère la fonction valeur

$$v_\rho(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_\rho(x; \alpha).$$

De plus, on définit pour $(x, p, A) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ la fonction

$$F(x, p, A) = -\sup_{a\in A}\left(b(x, a)\cdot p + \frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T(x, a)A) + f(x, a)\right).$$

Pour étudier le comportement quand $\rho \to 0$, on sera amené à considérer l'équation

$$\lambda + F(x, Du, D^2u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \tag{E}$$

d'inconnues (λ, u) où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est périodique.

Question préliminaire :

(0.1) Montrer que v_ρ est une fonction périodique et bornée.

Partie I : Une approche par vérification

Dans cette partie on suppose donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ périodique satisfaisant l'équation (E).

On veut montrer que ρv_ρ converge uniformément vers la constante λ quand $\rho \to 0$.

(I.1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathcal{A}$ fixés. Montrer que pour tout $T \geq 0$ on a

$$u(x) \geq \mathbb{E}\left[e^{-\rho T} u(X_T^{x,\alpha}) + \int_0^T e^{-\rho t}\left(f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t) - \lambda + \rho u(X_t^{x,\alpha})\right) dt\right].$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) \geq v_\rho(x) - \frac{\lambda}{\rho} - \|u\|_\infty.$$

(I.2) On suppose qu'il existe une fonction $\hat{a} : \mathbb{R}^n \to A$ Lipschitzienne et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x, Du(x), D^2u(x)) = -b(x, \hat{a}(x)) \cdot Du(x) - \frac{1}{2} Tr(\sigma\sigma^T(x, \hat{a}(x)) D^2 u(x)) - f(x, \hat{a}(x)).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) \leq v_\rho(x) - \frac{\lambda}{\rho} + \|u\|_\infty.$$

(I.3) Conclure que (sous l'hypothèse de la question précédente), $\rho v_\rho \to \lambda$ uniformément lorsque $\rho \to 0$.

Partie II : Unicité de la constante ergodique

Dans cette partie on veut montrer qu'il existe au plus une constante λ telle que (E) admette une solution.

On va donc considérer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et u, w continues et périodiques, solutions (dans un sens à préciser) respectives de

$$\lambda + F(x, Du, D^2u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n, \qquad (E_\lambda)$$

$$\mu + F(x, Dw, D^2w) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \qquad (E_\mu)$$

(II.1) On suppose que u et w sont C^2 sur $\mathbb{R}^n$, et solutions de (E_λ)-(E_μ). En considérant les points où $u - w$ atteint son maximum et minimum, montrer que $\lambda = \mu$.

Dans la suite on suppose que u et w sont solutions de viscosité des équations (E_λ)-(E_μ), et on veut montrer qu'on a encore $\lambda = \mu$.

(II.2) L'équation (E_λ) admet-elle un théorème de comparaison ? (Indication : $u + c$, $c \in \mathbb{R}$). Quelle hypothèse du cours n'est pas satisfaite par cette équation ?

(II.3) On suppose que $\lambda < \mu$, on fixe $\delta \in (\lambda, \mu)$ et on considère pour $\varepsilon > 0$ l'équation

$$\delta + \varepsilon v + F(x, Dv, D^2 v) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{$E_{\delta,\varepsilon}$}$$

On rappelle que cette équation admet un principe de comparaison (pour les solutions de viscosité continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$).

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que u et w soient respectivement sur-solution et sous-solution de viscosité de $(E_{\delta,\varepsilon})$, et en déduire que nécessairement $u \geq w$.

(II.4) Déduire de la question précédente que nécessairement on a $\lambda = \mu$.

Partie III: Convergence de ρv_ρ sous une hypothèse d'équicontinuité

Dans cette partie, on suppose que les fonctions v_ρ, $\rho > 0$ sont équicontinues, et plus précisément

$$\exists C > 0, \quad \forall \rho > 0, \ \ v_\rho \text{ est } C\text{-Lipschitzienne.}$$

On rappelle que par le théorème d'Arzelà-Ascoli, une famille de fonctions périodiques $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ équicontinue et bornée uniformément admet une sous-suite convergente (pour la convergence uniforme).

(III.1) (Question de cours) Rappeler le principe de programmation dynamique satisfait par v_ρ. Montrer que v_ρ est sur-solution de viscosité de

$$\rho v + F(x, Dv, D^2 v) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n. \tag{HJB}$$

On admet dans la suite du problème que v_ρ est également sous-solution de viscosité de cette équation.

(III.2) Montrer qu'il existe une sous-suite $\rho_n \to 0$ telle que $v_{\rho_n}(x) - v_{\rho_n}(0) \to u$ uniformément et $\rho_n v_{\rho_n}(0) \to \lambda$ quand $n \to \infty$ (pour une certaine fonction périodique continue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une constante $\lambda \in \mathbb{R}$).

(III.3) Montrer que pour (u, λ) donnés par la question précédente, u est solution de viscosité de (E).

(III.4) En utilisant le résultat de la partie II, montrer que ρv_ρ converge vers λ uniformément quand $\rho \to 0$.

Partie IV: Quelques exemples

On veut étudier la convergence de ρv_ρ quand ρ tend vers 0 dans trois cas particulier. Dans tous ces exemples, on suppose que la dimension n est égale à 1 et que $f(x, a) = f(x)$ pour tous x, a (on rappelle que f est continue et périodique).

(IV.1) Dans cette question, on suppose

$$A = \{0\}, \quad b(x, 0) = 0, \ \ \sigma(x, 0) = \sqrt{2},$$

$$f(x) = \sin(2\pi k x), \qquad \text{pour un } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Déterminer v_ρ explicitement (on pourra utiliser (HJB)). Montrer que ρv_ρ et $v_\rho - v_\rho(0)$ convergent uniformément vers un couple $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R})$ à déterminer.

(IV.2) Dans cette question, on suppose

$$A = [-1,1], \quad b(x,a) = a\left|\sin(\pi x)\right|, \ \ \sigma(x,0) = 0,$$

$$f(0) = \inf f < \sup f = f(1/2).$$

En raisonnant directement sur le problème de contrôle, déterminer $v_\rho(0)$ et $v_\rho(1/2)$. En déduire que ρv_ρ ne converge pas uniformément vers une constante. Montrer ensuite que néanmoins $\rho v_\rho(x)$ converge vers $f(1/2)$ pour presque tout x de $\mathbb{R}$.

(IV.3) Dans cette question, on suppose

$$A = \{0,1\}, \quad b(x,a) = 0, \ \ \sigma(x,a) = \sqrt{2}a.$$

Montrer que ρv_ρ converge uniformément vers une constante λ (dépendant de f) à déterminer.

Université Paris-Dauphine
Master MASEF and Master MATH
2020-2021

Stochastic control
December 18, 2020 - 3 hours
No document allowed

The aim of this problem is to investigate an optimal control problem with a final constraint in law. Namely, given a finite horizon $T > 0$ and $(t_0, x_0) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$ an initial condition, we consider the controlled dynamics

$$dX_t = \alpha_t dt + dW_t,\ t \in [t_0, T], \qquad X_{t_0} = x_0,$$

where (W_t) is a $d-$dimensional Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ endowed with the filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfying the usual conditions and where the control (α_t) belongs to the set $\mathcal{A}(t_0)$ defined as

$$\mathcal{A}(t_0) = \left\{ \alpha : [t_0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d \text{ progressively measurable, } \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T |\alpha_s|^2 ds\right] < +\infty \right\}.$$

We denote by $X^{t_0,x_0,\alpha}$ the solution of this equation.

Given two Lipschitz continuous and bounded maps $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, our aim is to solve the problem

$$(\mathcal{P}(t_0, x_0)) \qquad \inf \left\{ \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T (\frac{1}{2}|\alpha_s|^2 + \ell(X_s^{t_0,x_0,\alpha}))ds\right] \text{ under the constraint } \mathbb{E}\left[g(X_T^{t_0,x_0,\alpha})\right] \le 0 \right\}.$$

This kind of question is loosely inspired by quantile hedging problems in finance.

A key assumption made throughout the exam (at least from Section 2 on) is:

$$\text{There exists } \bar{x} \in \mathbb{R}^d \text{ such that } g(\bar{x}) < 0. \tag{1}$$

We recall that a map $w = w(t, x)$ is in $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ if w is one time differentiable in all variables and two times with respect to the space variable x, and if the time derivative $\partial_t w$, the space gradient Dw and the space Hessian matrix $D^2 w$ are continuous on $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. We denote by $\Delta w(t, x)$ the Laplacian of $w(t, x)$, that is the trace of the $d \times d-$matrix $D^2 w(t, x)$.

Part 1: A verification theorem

In this part, we fix $(t_0, x_0) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$ and $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}(t_0)$. We assume that the solution $(X^{t_0,x_0,\bar{\alpha}})$ satisfies $\mathbb{E}\left[\ g(X_T^{t_0,x_0,\bar{\alpha}})\right] \le 0$. Our aim is to show that a sufficient condition for $\bar{\alpha}$ to be optimal in problem $(\mathcal{P}(t_0, x_0))$ is that there exists $\lambda \ge 0$ and a map $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, globally Lipschitz continuous in space uniformly in time, solution to

$$\begin{cases} -\partial_t v(t,x) - \frac{1}{2}\Delta v(t,x) + \frac{1}{2}|Dv(t,x)|^2 - \ell(x) = 0 & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d \\ v(T,x) = \lambda g(x) & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2}$$

such that $\bar{\alpha}_t = -Dv(t, X_t^{t_0,x_0,\bar{\alpha}})$ for a.e. $t \in [t_0, T]$ and a.s., as well as $\lambda \mathbb{E}\left[\, g(X_T^{t_0,x_0,\bar{\alpha}})\right] = 0$.

Throughout this part, we assume the existence of λ and v as above and, for simplicity, we set $\bar{X}_t = X_t^{t_0,x_0,\bar{\alpha}}$.

I.1) Let $\alpha \in \mathcal{A}(t_0)$ be such that $\mathbb{E}\left[g(X_T^{t_0,x_0,\alpha})\right] \leq 0$. Show that

$$v(t_0, x_0) \leq \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T (\frac{1}{2}|\alpha_s|^2 + \ell(X_s^{t_0,x_0,\alpha}))ds\right]. \tag{3}$$

I.2) Show that an equality holds in (3) if and only if $\alpha_t = \bar{\alpha}_t$ for a.e. $t \in [t_0, T]$ and a.s.

I.3) Infer from the previous questions that $\bar{\alpha}$ is optimal in problem $(\mathcal{P}(t_0, x_0))$.

I.4) In the particular case where $d = 1$, $\ell = 0$ and $g(x) = x$, compute the solution of (2) for any $\lambda \in \mathbb{R}$, find the optimal solution of problem $(\mathcal{P}(t_0, x_0))$ and the corresponding minimal cost $W(t_0, x_0)$ (we will admit that the results above generalize to the case where g has at most a linear growth). Does the map W satisfy a dynamic programming principle?

Part 2: Existence of an admissible control

Recall assumption (1). Fix $(t_0, x_0) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$. The aim of this part is to show that there exists a control $\alpha \in \mathcal{A}(t_0)$ such that $\mathbb{E}\left[g(X_T^{t_0,x_0,\alpha})\right] < 0$.

II.1) Show that the SDE

$$dX_t^c = c(\bar{x} - X_t^c)dt + dW_t, \; t \in [t_0, T], \qquad X_{t_0}^c = x_0$$

has a unique solution X^c and compute it explicitly.

II.2) Show that, if $c > 0$ is large enough, then X^c satisfies

$$\mathbb{E}\left[g(X_T^c)\right] < 0.$$

II.3) Conclude that there exists a control $\alpha \in \mathcal{A}(t_0)$ such that $\mathbb{E}\left[g(X_T^{t_0,x_0,\alpha})\right] < 0$.

II.4) For any $\lambda \in \mathbb{R}$, we consider the optimal control problem

$$u_\lambda(t_0, x_0) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t_0)} \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T (\frac{1}{2}|\alpha_s|^2 + \ell(X_s^{t_0,x_0,\alpha}))ds + \lambda g(X_T^{t_0,x_0,\alpha})\right]. \tag{4}$$

Show that $u_\lambda(t_0, x_0) \to -\infty$ as $\lambda \to +\infty$.

Part 3: Dynamic programming, HJ equations and existence of a solution

In this part we study the value function u_λ defined by (4) and derive the existence of a solution to problem $(\mathcal{P}(t_0, x_0))$.

III.1) Show that u_λ is bounded in $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ and Lipschitz continuous in space uniformly in time (the bound and the Lipschitz constants can depend on λ and T).

III.2) State without proof the dynamic programming principle for u_λ.

III.3) From the dynamic programming principle, *prove* that u_λ is a viscosity subsolution of the Hamilton-Jacobi equation

$$\left\{\begin{array}{ll} -\partial_t u_\lambda(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u_\lambda(t,x) + \frac{1}{2}\left|Du_\lambda(t,x)\right|^2 - \ell(x) = 0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d \\ u_\lambda(T,x) = \lambda g(x) & \end{array}\right.$$

We will admit in the sequel that u_λ is actually $C^{1,2}$, is a classical solution of this Hamilton-Jacobi equation and that the map $\lambda \to u_\lambda(t_0,x_0)$ is of class C^1 on $\mathbb{R}$.

III.4) Fix $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Prove that the map $\lambda \to u_\lambda(t_0,x_0)$ is concave on $\mathbb{R}$ and show that, for any $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\partial_\lambda u_\lambda(t_0,x_0) = \mathbb{E}\left[g(X_T^{t_0,x_0,\bar{\alpha}_\lambda})\right]$$

where $\bar{\alpha}_{\lambda,t} = -Du_\lambda(t,\bar{X}_{\lambda,t})$, $(\bar{X}_\lambda)$ being the solution to

$$d\bar{X}_{\lambda,t} = -Du_\lambda(t,\bar{X}_{\lambda,t})dt + dW_t,\ t\in[0,T], \qquad \bar{X}_{\lambda,0} = x_0.$$

(Hint: note that $\bar{\alpha}_\lambda$ is the unique optimal control for $u_\lambda(t_0,x_0)$)

III.5) Show that problem $(\mathcal{P}(t_0,x_0))$ has one and only one solution and that such a solution satisfies the sufficient condition of the first part.
(Hint: look at maximum points of the map $\lambda \to u_\lambda(t_0,x_0)$ on $[0,+\infty)$.)