Université Paris Dauphine
2019-2020

Géométrie et systèmes dynamiques
Feuilles d'exercices

Table des matières

Les exercices qui suivent sont largement empruntés aux ouvrages ou aux cours en ligne :

- Benzoni S. Calcul différentiel et équations différentielles, SMAI Dunod, 2010
- Marle C.-M Systemes dynamiques - une introduction. Ellipse, 2003.
- Texier B. "Géométrie différentielle"
  https://webusers.imj-prg.fr/ benjamin.texier/enseignement/geodiff/2015/cours-geodiff.pdf

1 Calcul différentiel

Exercice 1.1 Soient f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $f'(x) \neq g'(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (x+y, f(x)+g(y)) \end{cases}$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 1.2 Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$F(x,y) = \left(\int_0^{x+y} \phi(t)dt, \int_0^{xy} \phi(t)dt \right).$$

(i) Montrer que l'application F est de classe C^1 et calculer dF.

(ii) On suppose que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(1) \neq 0$. Montrer que F est un difféomorphisme local en $(0,1)$ et en $(1,0)$.

(iii) On suppose que $\phi'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que F est un difféomorphisme de $D := \{(x,y),\ x < y\}$ sur son image.

Exercice 1.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ avec $|f'(x)| \leq \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$.

(i) Montrer que $dF(x,y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = (a - f(y), b - f(x))$ est contractante sur $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne). En déduire que F est surjective.

(iii) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.4 Soient X, Y deux espaces de Banach et $Isom(X,Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur Y. On pose $Isom(X) := Isom(X,X)$.

(i) Soit $u \in L(E)$ tel que $\|u\|_{L(E)} < 1$. Montrer que $u \in Isom(X)$.

(ii) En déduire que $Isom(X,Y)$ est un ouvert de $L(X,Y)$.

(iii) Montrer que l'application $\Phi : Isom(X,Y) \to L(Y,X)$ définie par $\Phi(f) = f^{-1}$ est continue sur $Isom(X,Y)$.

(iv) Montrer que Φ est de classe C^1 sur $Isom(X,Y)$ et que, pour tout $f \in Isom(X,Y)$,

$$d\Phi(f)(v) = -f^{-1} \circ v \circ f^{-1} \qquad v \in L(X,Y).$$

Exercice 1.5 Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$, $M_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices de format $n \times n$ et $O(n)$ est le groupe orthogonal :

$$M \in O(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad MM^T = I_n.$$

Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et telle que $df(x) \in O(n)$ pour tout x, alors f est affine (i.e., df est constante).

Exercice 1.6 Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une application de classe C^∞. On note $P(x,\lambda) = \det(\lambda I - M(x))$. On suppose que les valeurs propres de $M(0)$ sont réelles et on fixe λ_0 un de ces valeurs propres. On suppose que

$$\partial_\lambda P(0,\lambda_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_x P(0,\lambda_0)\partial_\lambda^2 P(0,\lambda_0) \neq 0.$$

(en particulier, λ_0 est une valeur propre double de $M(0)$). Décrire le spectre (réel) de $M(x)$ au voisinage de $(x,\lambda) = (0,\lambda_0)$.

Exercice 1.7 Soient U, V et W trois ouverts d'espaces de Banach E, F et G respectivement. On suppose que $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des immersions (respectivement des submersions). Que peut-on dire de $g \circ f$?

Exercice 1.8 Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est de rang constant r au voisinage de 0 (i.e., $dim(Im(df(x)) = r$ pour tout x dans un voisinage de 0). Prouver qu'il existe deux difféomorphismes locaux ϕ et ψ, ϕ dans $\mathbb{R}^n$ et ψ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\phi(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$, tels que

$$\psi \circ f \circ \psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots 0).$$

Exercice 1.9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et de rang constant égal à 1 (c'est-à-dire que $dim(Im(df(x,y)) = 1$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). On suppose que $f(x,0) = (x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un voisinage V de $(x,0)$ avec $f(V) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1 Sous-variétés générales

Exercice 2.1 Soit M_1 (resp. M_2) une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{n_2}$) de dimension m_1 (resp. m_2) où $n_1, n_2 \geq 1$. Montrer que $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et déterminer sa dimension. En déduire que $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 (où S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2.2 Montrer que $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension.

Exercice 2.3 (Plongement de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$) On considère, dans $\mathbb{R}^3$, la partie

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2 = 1\}.$$

(i) Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$; préciser sa dimension.

(ii) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(\phi, \theta) = ((2 + \cos(\phi)) \cos(\phi), (2 + \cos(\theta)) \sin(\theta), \sin(\phi)).$$

Montrer que $M = g(\mathbb{R}^2)$.

(iii) En déduire un difféomorphisme entre M et $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Exercice 2.4 On fixe un nombre $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et on définit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ (avec des notations complexes) par

$$\gamma(t) = (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi ct})$$

où $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(i) Montrer que γ est une immersion en tout point de $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $\gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

(iii) L'ensemble $\gamma(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2.5 (Les variétés SL_n et O_n) Dans $M_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices réelles de format $n \times n$, vu comme $\mathbb{R}^{n \times n}$), on note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles, $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 et $O_n(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales. Soit $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

On rappelle que $\det(\exp(M)) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$ et que $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent.

(i) Montrer que exp est différentiable en 0 et calculer $d\exp(0)$.

(ii) Vérifier que exp est un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 de $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr(M)} = 0\}$. Montrer de même que la restriction à E de exp à E est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 de E et un voisinage de I_n dans $SL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent au point I_n *(on pourra fixer M dans $SL_n(\mathbb{R})$ et utiliser l'application $X \to M\exp(X)$).*

(iv) Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \ M + M^T = 0\}$. Montrer de même que la restriction de exp à F est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 de F et un voisinage de I_n dans $O_n(\mathbb{R})$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent au point I_n.

2.2 Courbes

Exercice 2.6 (Cycloïde) Un cercle roule sans glisser sur l'axe des abscisses. La figure décrite par un point de ce cercle est appelée une cycloïde.

(i) Trouver une courbe paramétrée décrivant la cycloïde.

(ii) Déterminer la longueur complète de la courbe lorsque le cercle a effectué un tour complet.

Exercice 2.7 (Spirale logarithmique) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (ae^{-bt}\cos(t), ae^{-bt}\sin(t))$, où $a, b > 0$ sont des constantes.

(i) Montrer que $\gamma(t)$ tend vers 0 en spiralant lorsque $t \to +\infty$.

(ii) Montrer que γ a une longueur finie pour $t \in [0, +\infty)$.

Exercice 2.8 Soit $\gamma(t) = (t, t\sin(\pi/t))$ pour $t \neq 0$ et $\gamma(0) = 0$. Montrer que la longueur de courbe comprise entre $t = 1/(n+1)$ et $t = 1/n$ est au moins égale à $(2n+1)/(n(n+1))$. En déduire que la longueur de la courbe entre $t = 0$ et $t = 1$ est infinie.

Exercice 2.9 Soit (I, γ) une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ et $\gamma(t)$ (pour $t \in I$) un point birégulier. Dans $\mathbb{R}^3$, la distance entre deux espaces vectoriels de dimension 2, P_1 et P_2, est définie comme la distance entre leur vecteur normal $(\min\{\|\nu_1 - \nu_2\|, \|\nu_1 + \nu_2\|\}$.

(i) Montrer que, pour s proche de t, $\gamma(s) - \gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ sont linéairement indépendants.

(ii) Montrer alors le plan engendré par $\gamma(s) - \gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ converge vers le plan osculateur à (I, γ) en $\gamma(t)$ lorsque s tend vers t.

Exercice 2.10 Soit $A = (I, x)$ et $B = (I, y)$ deux arcs de $\mathbb{R}^n$ paramétrés par abscisse curviligne. On suppose que $K_A(t) < K_B(t)$ pour un $t \in I$ (où $K_A(t)$ et $K_B(t)$ sont la courbure à A et à B en $x(t)$ et $y(t)$ respectivement). Montrer que, pour tout $s \in I$ suffisamment proche de t, on a

$$\|x(t) - x(s)\| < \|y(t) - y(s)\|.$$

Exercice 2.11 Soit (I, γ) une courbe courbe paramétrée plane et de classe C^2. On suppose qu'il existe un point du plan tel que, pour tout $t \in I$, la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $n(t)$ (où $n(t)$ est la normale à γ en t) passe par ce point. Montrer que la courbe paramétrée est incluse dans un cercle.

2.3 Surfaces

Exercice 2.12 (Géodésiques) Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'un arc paramétré régulier (I,γ) de Σ est une géodésique de Σ si γ est de classe C^2 et si $\gamma''(s) \in (T_{\gamma(s)}\Sigma)^\perp$ pour tout $s \in I$.

1. Montrer que toute géodésique (I,γ) est parcourue à vitesse constante : $\|\gamma'(s)\|$ est indépendant de s.

2. Soit (I,γ) une géodésique de la sphère $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\}$. Montrer que $\{\gamma(t),\ t \in I\}$ est inclus dans un plan passant par 0.

3. Soit (U,f) des coordonnées locales de Σ et ν une application de Gauss. On suppose que f est de classe C^3. Pour $i,j,k \in \{1,2\}$, on note $\Gamma_{ij}^k(x)$ la composante suivant $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Montrer que, si (I,c) est un arc paramétré régulier et de classe C^2 dans U et si $\gamma = f \circ c$ est une géodésique de Σ, alors
$$c_k''(t) = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c(t))c_i'(t)c_j'(t)$$

4. En déduire qu'étant donné un couple $(x_0, v_0) \in U \times \mathbb{R}^2$, il existe un unique arc paramétré maximal (I,c) avec $c(0) = x_0$ et $c'(0) = v_0$ tel que $\gamma := f \circ c$ soit une géodésique de Σ.

Exercice 2.13 On dit que deux surfaces S_1 et S_2 de $\mathbb{R}^3$ sont isométriques au voisinage de deux points $\bar{x}_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$ s'il existe des coordonnées locales (U,f) pour S_1, avec $f(0) = \bar{x}_1$ et (V,g) sur S_2 avec $g(0) = \bar{x}_2$ telles que $\alpha_f = \alpha_g$ sur $U \cap V$. Le Theorema Egregium de Gauss affirme que deux surfaces isométriques ont nécessairement même courbure.

1. Montrer que le cylindre (paramétré par $(u,v) \to (\cos(u), \sin(u), v)$) et le plan sont isométriques en tout point. Quelle est leur courbure ?

2. Montrer à l'inverse que la nappe paramétrée
$$f : (u,v) \to (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u)) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi,\pi[)$$
et l'hélicoïde paramétrée par
$$g : (u,v) \to (u\cos(v), u\sin(v), v) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi,\pi[)$$
ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

3 Equations différentielles

3.1 Flot d'une équation différentielle

Exercice 3.1 (Non existence en dimension infinie) Soit E l'espace des suites réelles tendant vers 0 à l'infini et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (c'est un sous-ensemble fermé de $L^\infty(\mathbb{N})$, donc un Banach) et $f : E \to E$ défini par

$$f(x) = y, \qquad \text{où } y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Montrer que f est continue sur E.

(ii) On suppose que $t \to x(t)$ est une solution du problème de Cauchy

$$x' = f(x(t)), \qquad x(0) = 0_E$$

sur un intervalle $[0, a]$ $(a > 0)$. Montrer qu'alors

$$x_n(t) > 0 \text{ et } \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, a]$.

(iii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, a]$, $x_n(t) \geq t^2/4$ et conclure.

Exercice 3.2 Soit $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\|f(t, x)\| \leq F(\|x\|)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (où $\|\cdot\|$ est la norme euclienne) et, pour tout $a > 0$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} < +\infty.$$

Soit (I, x) une solution maximale du problème de Cauchy associé à f.

(i) On note $r(t) = \|x(t)\|$. Vérifier que $r(t_2) \leq r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(r(s))ds$ pour tout $[t_1, t_2] \subset I$.

(ii) En déduire que la solution (I, x) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3.3 (Hadamard-Lévy) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. On suppose que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et qu'il existe des constantes $A, B \geq 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|(df(x))^{-1}\| \leq A\|x\| + B.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

(i) Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (df(y(t)))^{-1}x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note y^x cette solution.

(ii) Montrer que l'application $x \to y^x(1)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

(iii) Calculer $f(y^x(1))$ et en déduire l'existence d'une application continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = id$.

(iv) Montrer que l'image de g est ouverte.

(v) Montrer que l'image de g est fermée.

(v) Conclure.

Exercice 3.4 On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) - 3\partial_{tx}^2 u(t,x) - 4\partial_{xx} u(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2,\ \partial_x u(0,x) = 0 \qquad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

1. Soit $u : [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to R$ une fonction de classe C^2. Montrer que

$$(\partial_t - 4\partial_x)((\partial_t + \partial_x)u)(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x) - 3\partial_{tx}^2 u(t,x) - 4\partial_{xx} u(t,x).$$

2. Trouver toutes les fonctions $v : [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to R$ de classe C^2 telles que

$$(\partial_t - 4\partial_x)v(t,x) = 0 \qquad (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}.$$

3. Trouver toutes les solutions w de classe C^1 de

$$(\partial_t + \partial_x)w(t,x) = f(4t+x)$$

(on pourra faire le changement de variables $x' = 4t + x$, $t' = x - t$ et déterminer l'équation satisfaite par $\tilde{w}(t',x') := w(t,x)$).

4. Déterminer la solution du problème initial.

Exercice 3.5 Soit $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que la fonction $u(t,x) = u_0(t+x)$ est solution, au sens des distributions, de l'équation

$$(EDP) \quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0 \qquad (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

(c'est-à-dire que u est continue sur $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ et que, pour tout fonction $\phi\in C_c^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0,x)dx + \int_0^{+\infty}\int_R (\partial_t\phi(t,x) + \partial_x\phi(t,x))u(t,x)dxdt = 0.\ )$$

2. Soient u une solution au sens des distribution de (EDP) et $\phi\in C^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ telle que, pour tout $T>0$, $\phi\in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$. L'objectif de cette question est de montrer que la fonction

$$I_\phi(t) := \int_{\mathbb{R}} \phi(t,x)u(t,x)dx \qquad t\geq 0,$$

est de classe C^1 avec

$$I_\phi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t\phi(t,x) + \partial_x\phi(t,x))u(t,x)dx.$$

   (a) Soit $t_0>0$, $\epsilon>0$, $\phi\in C_c^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ et $\psi_\epsilon\in C_c^\infty([0,+\infty))$ décroissante, telle que $\psi_\epsilon(t) = 1$ sur $[0,t_0]$ et $\psi_\epsilon(t) = 0$ sur $[\epsilon,+\infty)$ avec $\|\psi_\epsilon'\|\leq 2/\epsilon$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{t_0}^{t_0+\epsilon}\int_{\mathbb{R}} \partial_t\psi_\epsilon(t)\phi(t,x)u(t,x)dxdt = -\int_{\mathbb{R}}\phi(t_0,x)u(t_0,x)dx.$$

(b) En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(0,x)u_0(x)dx + \int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t\phi(t,x) + \partial_x\phi(t,x))u(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \phi(t_0,x)u(t_0,x)dx = 0.$$

(c) Conclure.

3. Montrer que l'équation (EDP) possède une unique solution au sens des distributions. (Indication : déterminer l'équation satisfaite par la différence entre deux solutions et la tester contre $\phi(t,x) := v_0(t+x)$ où $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$).

3.2 Equation différentielles linéaires

Exercice 3.6 Soit $B \in C(\mathbb{R}; M_n(\mathbb{R}))$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \|B(s)\| ds < +\infty$. On pose $\Delta(t,s) := \det(R(t,s))$, où R est la résolvante du système $u'(t) = B(t)u(t)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\Delta(t,s) \geq \delta$ quels que soient t et $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.7 Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application $T-$périodique (avec $T > 0$). Trouver $b \in \mathbb{R}$ et $q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ une application $T-$périodique tels que u est solution de $u'(t) = f(t)u(t)$, si seulement si, $v : t \to q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = bv(t)$.

Exercice 3.8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$x''(t) - x(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que cette équation admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$. On se propose de calculer cette solution.

2. Écrire l'équation sous forme d'un système $u'(t) = Au(t) + F(t)$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continue. Calculer e^{tA} et en déduire que toute solution de l'équation de départ s'écrit sous la forme
$$x(t) = ae^t + be^{-t} + \int_0^t sh(t-\tau) f(\tau) d\tau, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$
(où sh est le sinus hyperbolique).

3. On fixe $L > 0$. Trouver a_L et b_L pour que $x(L) = x(-L) = 0$. Montrer que les coefficients a_L et b_L ont des limites quand $L \to +\infty$. En déduire que l'unique solution bornée cherchée s'écrit
$$x(t) = -\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{t-s} f(s) ds \right), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.3 Stabilité

Exercice 3.9 On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = -y + xy \\ y' = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$$

1. Déterminer tous les points critiques du système. Quels sont les points critiques hyperboliques ?
2. Montrer que les variétés stables et instables associées aux points fixes hyperboliques sont des droites.
3. Montrer qu'il existe une fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que H est constante le long du flot et
$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -y + xy.$$
4. Montrer que H possède un maximum local en $(0, 0)$.
5. Déterminer l'allure générale des trajectoires (portrait de phase).

Exercice 3.10 (Variété invariante par un flot) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $m < n$ de classe C^2 et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champs de vecteurs de classe C^2. L'objectif de cet exercice est de montrer que, si

$$f(t, v) \in T_v M \qquad \forall (t, v) \in \mathbb{R} \times M,$$

alors, pour toute donnée initiale (t_0, v_0) avec $v_0 \in M$, la solution maximale (x, I) du problème de Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v_0 \end{cases}$$

reste dans M : $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$.

On notera $dist(v, M)$ la distance d'un point $v \in \mathbb{R}^n$ à M :

$$dist(v, M) = \min_{w \in M} \|v - w\|$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $v_0 \in M$, V un voisinage ouvert de v_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $h : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ une submersion en v_0 de classe C^2 telle que $f(v_0) = 0$ et $V \cap M = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que, quitte à réduire V, il existe une constante $C > 0$ telle que
$$dist(v, M) \le C|h(v)| \qquad \forall v \in V.$$
(on pourra raisonner par l'absurde, en utilisant le fait que, si $v \in V \backslash M$ et $w \in M$ vérifie $\|v - w\| = dist(v, M)$, alors $v - w \perp T_w M$).
2. Soit (x, I) la solution maximale du problème de Cauchy (*). Déduire de la question précédente l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $t \in I$ proche de t_0, on a
$$\frac{d}{dt}(h(x(t))^2 \le C'(h(x(t))^2.$$
3. Conclure.

4 Annales de partiels et d'examens

Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Systèmes différentiels et géométrie

Partiel du 02/11/2018.
Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 (Un théorème des fonctions implicites global)

1. (Préliminaire) Soit E un espace de Banach. On note par $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E et id_E l'application identité de E. Soit $T \in L(E)$ telle que $\|T\|_{L(E)} < 1$. Démontrer que $id_E - T$ est bijective et que $(id_E - T)^{-1}$ est continue.
(Indication : on pourra remarquer que $(id_E - T)(Id_E + T + T^2 + \dots T^n) = id_E - T^{n+1}$).

   Soient E et F des espaces de Banach et $f : F \times E \to E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que, pour tout $(\lambda, x) \in F \times E$, on a $\|d_2 f(\lambda, x)\|_{L(E)} \leq k$ (où $d_2 f(\lambda, x)$ est la différentielle partielle de $f = f(\lambda, x)$ par rapport à la seconde coordonnée x).

2. Montrer que, pour tout $\lambda \in F$, il existe un unique $x(\lambda) \in E$ tel que $f(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$ (i.e., il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de l'application $x \to f(\lambda, x)$).

   Nous cherchons à montrer que l'application $\lambda \to x(\lambda)$ est de classe C^1 sur F.

3. Soit $g : F \times E \to E$ définie par
$$g(\lambda, x) = x - f(\lambda, x) \qquad \forall (\lambda, x) \in F \times E.$$
Montrer que, pout tout $(\lambda, x) \in F \times E$, la dérivée $d_2 g(\lambda, x)$ est un isomorphisme de E sur lui-même (où $d_2 g(\lambda, x)$ est la différentielle partielle de g par rapport à la seconde coordonnée x).

4. Soit $\lambda_0 \in F$. On pose $x_0 = x(\lambda_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de λ_0 dans F, un voisinage V de (λ_0, x_0) dans $F \times E$ et une application $\psi : F \to E$ de classe C^1 telle que $\forall (\lambda, x) \in V$,
$$[g(\lambda, x) = 0] \quad \Leftrightarrow \quad [\lambda \in U \text{ et } \; x = \psi(\lambda)].$$

5. En déduire que l'application $\lambda \to x(\lambda)$ est de classe C^1 sur F.

Exercice 2 Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m (avec $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $m < n$). L'espace tangent à M en un point x de M est noté $T_x M$. On rappelle que $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace normal $N_x M$ à M en $x \in M$ comme étant l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ de $T_x M$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:
$$N_x M := (T_x M)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n, \; \langle v, w \rangle = 0 \;\; \forall w \in T_x M\}.$$

1. Quelle est la dimension de N_xM (pour $x \in M$) ?

2. On suppose, dans cette question seulement, que $M = S^{n-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$: $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ (où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). Démontrer que S^{n-1} est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, déterminer sa dimension et calculer T_xS^{n-1} et N_xS^{n-1} en tout point $x \in S^{n-1}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 3$. Soit $(\mathbb{R}, \gamma)$ l'arc paramétré de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $t \to \gamma(t)$ est injective et que $M := \gamma(\mathbb{R})$ est une variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. Calculer T_xM et N_xM pour $x = (1, 0, 0)$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose que f admet un minimum sur M en un point $\bar{x}$ de M :
$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in M.$$
   (i) Soit (I, γ) un arc paramétré de M avec I ouvert, $\bar{t} \in I$ et $\gamma(\bar{t}) = \bar{x}$. Montrer que $\langle \nabla f(\bar{x}), \gamma'(\bar{t}) \rangle = 0$ (où ∇f est le gradient de f).
   (ii) En déduire que $\nabla f(\bar{x}) \in N_xM$.

5. On suppose dans cette question que $m = n - 1$. En utilisant la formulation d'une variété par une submersion, ainsi que la question précédente, montrer que, pour tout $\bar{x} \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $\bar{x}$ et une application continue $\nu : U \to \mathbb{R}^n$ telle que $\|\nu(x)\| = 1$ et $N_xM = \mathbb{R}\nu(x)$ pour tout $x \in U \cap M$.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points. Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 Mathématiques et Applications
Systèmes différentiels et géométrie

Examen du 18/01/2019.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 3 (Un problème de perturbation singulière) Soient $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On supposera que f et g sont globalement lipschitziennes et que f est bornée. Etant donné $\epsilon > 0$, on considère le système différentiel

$$(S_\epsilon) \qquad \begin{cases} \dot{x}^\epsilon(t) = f(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t)) \\ \dot{y}^\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon} g(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t)) \end{cases}$$

(où, dans tout l'exercice, $\dot{z}$ désigne la dérivée temporelle d'une fonction $z = z(t)$). Le but de l'exercice est de comprendre, dans un cas simple, la limite des solutions du système (S_ϵ) lorsque $\epsilon \to 0$. Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante sur g : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \leq -\alpha \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ tel que $g(x, \varphi(x)) = 0$.

2. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que φ est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que φ est globalement lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n$.

4. Vérifier que
$$(y - \varphi(x))g(x, y) \leq -\alpha(y - \varphi(x))^2 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

   Etant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, soit (x^ϵ, y^ϵ) la solution du système (S_ϵ) avec donnée initiale $(x^\epsilon(0), y^\epsilon(0)) = (x_0, y_0)$ et soit x la solution de l'équation différentielle
$$(S) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), \varphi(x(t)))$$
   de donnée initiale $x(0) = x_0$. On pose
$$\rho^\epsilon(t) = (x^\epsilon(t) - x(t))^2 + \sqrt{\epsilon}(y^\epsilon(t) - \varphi(x(t)))^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. (question assez calculatoire) Montrer qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\epsilon_0 > 0$, dépendant des constantes de Lipschitz de f et de φ, de $\|f\|_\infty$ et de α, telles que
$$\dot{\rho}^\epsilon(t) \leq C\rho^\epsilon(t) + \epsilon \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[.$$
   (indication : on pourra utiliser l'inégalité $ab \leq (a^2 + b^2)/2$).

6. En déduire que x^ϵ tend vers x uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, T]$, où $T > 0$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2. On suppose que f vérifie les conditions suivantes : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\mathbf{C1}) \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle < 0 \text{ si } x^2+y^2=4 \qquad \text{et} \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle > 0 \text{ si } x^2+y^2=1$$

ainsi que

$$(\mathbf{C2}) \qquad \langle f(x,y),(-y,x)\rangle > 0 \qquad \text{si } 1 \le x^2+y^2 \le 4.$$

Etant donné $r \in [1,2]$, on considère la solution maximale $(I^r,(x^r,y^r))$ de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} (\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = f(x(t),y(t)) & t \in I \\ (x(0),y(0)) = (r,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $R(t,r) := \sqrt{(x^r(t))^2+(y^r(t))^2}$ vérifie :

   $$R(t,r) \in [1,2] \qquad \forall t \in I^r,\ t \ge 0.$$

   (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\frac{d}{dt}(R(t,r))^2$ au temps t où $R(\cdot,r)$ de sort de l'intervalle $]1,2[$).

2. Déduire de la question précédente que $[0,+\infty[\subset I^r$.

   Soit

   $$\Theta(t,r)) = \int_0^t \frac{\langle f(x^r(s),y^r(s)),(-y^r(s),x^r(s))\rangle}{(R(s,r))^2}ds, \qquad \forall t \in I^r.$$

   On admettra que

   $$(x^r(t),y^r(t)) = R(t,r)(\cos(\Theta(t,r)),\sin(\Theta(t,r))) \qquad \forall t \in I^r.$$

3. Montrer que $R : \mathbb{R}\times[1,2] \to \mathbb{R}$ et $\Theta : \mathbb{R}\times[1,2] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[\times[1,2]$.

4. Montrer que, pour tout $r \in [1,2]$ il existe un unique $\tau(r) \ge 0$ tel que $\Theta(\tau(r),r) = 2\pi$.

5. Montrer que l'application $r \to \tau(r)$ est continue dans $[1,2]$.

6. On pose $P(r) = R(\tau(r),r)$. Montrer que P est continue et en déduire l'existence de $\bar{r} \in [1,2]$ point fixe de P.

7. Conclure que l'équation différentielle (*) possède au moins une solution périodique.

Barème indicatif : Exercice 1 : 10 points. Exercice 2 : 10 points.