Université Paris Dauphine
2019-2020

Géométrie et systèmes dynamiques
Notes de cours

Table des matières

Avertissement. Les notes qui suivent ont pour objet d'indiquer les grandes lignes du cours. Elles ne sont en aucun cas un "polycopié" de cours : les énoncés sont sommaires et les preuves systématiquement omises. Le lecteur trouvera cependant des références sur chacun des chapitres. En particulier, nous faisons fréquemment référence aux ouvrages ou aux cours en ligne suivants :

- Benzoni S. Calcul différentiel et équations différentielles, SMAI Dunod, 2010
- Cartan H. Cours de calcul différentiel, Paris, Hermann, 1977.
- Féjoz J. "Calcul différentiel et optimisation." Cours de Université Paris-Dauphine
- Lecomte, P. "Courbes et surfaces."
  https://www.geothalg.ulg.ac.be/CourbesSurfaces.pdf
- Marle C.-M. Systemes dynamiques - une introduction. Ellipse, 2003.
- Pierron T. "Géométrie différentielle", cours ENS Ker Lann
  perso.eleves.ens-rennes.fr/ tpier758/cours/gedi.pdf
- Pierron T. "Équations différentielles et phénomènes de transport", cours ENS Ker Lann
  perso.eleves.ens-rennes.fr/ tpier758/cours/edph.pdf

- Texier B. "Géométrie différentielle"
  https://webusers.imj-prg.fr/ benjamin.texier/enseignement/geodiff/2015/cours-geodiff.pdf

Nous conseillons vivement au lecteur de consulter ces ouvrages pour les énoncés précis des résultats, le détail des démonstrations et d'éventuels approfondissements. Pour aller plus loin, quelques autres références classiques sur le sujet sont :

- Arnold V., Équations différentielles ordinaires. Éditions Mir, Moscow, 1974
- Berger M. et Gostiaux B., Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces. Collection Mathématiques. Puf, 1992
- Do Carmo, M. P. (2016). Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition. Courier Dover Publications.
- Mneimné, R. et Testard, F. (1986). Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques (Vol. 41). Hermann.
- Verhulst F. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer Science & Business Media, 2006.

1. Calcul différentiel

Références : Benzoni Chap. 1, Féjoz, Cartan Partie I.

Cette partie est un bref rappel de calcul différentiel : ces notions sont indispensables dans le reste des notes. Même si nous travaillerons pour l'essentiel en dimension finie dans la suite, il est plus simple de considérer ici des espaces un peu plus généraux.

1.1. **Differentiabilité.** Soient E, F deux EVN (EVN=espaces vectoriels normés). On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires *continues* de E dans F. On rappelle que $L(E,F)$ est un EVN pour la norme habituelle:

$$\|L\|_{L(E,F)} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Si $F = E$, on pose $L(E) = L(E,E)$. Rappelons que, si F est complet, alors $L(E,F)$ l'est aussi.

Définition 1.1. *Soit E, F deux EVN, U un ouvert de E et $x \in U$. Une application $f : U \to F$ est différentiable en x s'il existe $L \in L(E,F)$ telle que*

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

La fonction L est unique et on pose $df(x) = L$.

A bien connaître : dérivée de composées de fonctions, fonction de classe C^1, théorème des accroissements finis, dérivées partielles, dérivées d'ordre supérieur.

1.2. **Inversion locale et fonction implicite.** On rappelle qu'un isomorphisme de E dans F est un élément $u \in L(E,F)$ tel qu'il existe $v \in L(F,E)$ avec $u \circ v = id_F$ et $v \circ u = id_E$.

Définition 1.2. *Soient U et V des ouverts de E et F respectivement. On dit que $f : U \to V$ est un difféomorphisme si*
i) f est une bijection de U dans V,
ii) f est C^1 de U dans V
iii) f^{-1} est C^1 de V dans U.

Rappelons que l'on peut exprimer la différentielle de f^{-1} en fonction de celle de f :

Proposition 1.3. *Si f est un difféomorphisme de U dans V, alors pour tout $x \in U$, $df(x)$ est un isomorphisme de E dans F et pour tout $y \in V$,*

$$df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}.$$

A partir de maintenant, on suppose que E et F sont complet (et donc que E et F sont deux espaces de Banach). On rappelle que dans ce cas, si $u \in L(E,F)$ est bijective, alors u^{-1} est automatiquement continue. Autrement dit, si u est linéaire, continue et bijective de E dans F, alors u est un isomorphisme de E dans F (voir par exemple Brézis, "Analyse fonctionnelle et applications", Masson 1983, Cor. II.6). De plus, l'ensemble $Isom(E,F)$ des isomorphismes de E dans F est un sous-ensemble ouvert de $L(E,F)$. Une remarque centrale pour montrer cela, est que si $u \in L(E)$ et si $\|u - id_E\|_{L(E)} < 1$, alors u est un isomorphisme de E.

Théorème 1.4 (Inversion locale)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ de classe C^1 sur U et $x_0 \in U$. On suppose que $df(x_0)$ est un isomorphisme de E dans F. Alors il existe un ouvert U_{x_0} contenant x_0 (et contenu dans U), un ouvert V_{y_0} contenant $y_0 = f(x_0)$ tels que $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$ est un difféomorphisme.*

Théorème 1.5 (Fonctions implicites)**.** *Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to G$ de classe C^1 et $(x_0, y_0) \in U$ avec $f(x_0, y_0) = 0$. Si $\partial_y f(x_0, y_0)$ est bijective de F dans G, alors il existe des ouverts U', V de U et E respectivement, avec $(x_0, y_0) \in U'$ et $x_0 \in V$, et une application $g : V \to F$ de classe C^1 tels que, pour tout $(x, y) \in U$,*

$$\Big[(x,y) \in U' \text{ et } f(x,y) = 0\Big] \iff \Big[x \in V \text{ et } y = g(x)\Big].$$

Idée de preuve. On considère l'application $\phi : \begin{cases} U \to E \times G \\ (x,y) \to (x, f(x,y)) \end{cases}$. Alors ϕ est C^1 et $d\phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} id_E & 0 \\ \partial_x f(x_0,y_0) & \partial_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ est bijective. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. □

1.3. **Immersions, submersions.**

Définition 1.6. *Soient $n, p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et $x_0 \in U$. On dit que f est une immersion (resp. submersion) en x_0 si $df(x_0)$ est injective (resp. surjective) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

Remarque : immersion $n \leq p$, submersion $n \geq p$.

Théorème 1.7 (Forme normale des immersions)**.** *Ici, $n \leq p$. Si f est une immersion en 0 et telle que $f(0) = 0$, alors il existe un difféomorphisme local ψ d'un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ avec $\psi(0) = 0$ tel que*

$$\psi \circ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Les conditions $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$ sont juste ici pour fixer les idées. Le théorème affirme qu'au voisinage de 0, f ressemble à l'injection canonique $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par $\iota(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

Idée de preuve. A un changement de variable près, on peut supposer que $Im(df(x_0)) = Vect\{e_1, \ldots, e_n\}$. Puis on considère $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie par

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots 0, x_{n+1}, \ldots, x_p).$$

etc... □

Théorème 1.8 (Forme normale des submersions)**.** *Ici $n \geq p$. Si f est une submersion en 0 avec $f(0) = 0$, alors il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et*

$$f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p).$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Autrement dit, f ressemble à la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Ce chapitre est une brève introduction à la géométrie des courbes et surfaces, et, plus généralement, aux sous-variétés d'espaces de dimension finie.

2.1. **Sous-variétés générales.**

Références : Texier Chap. 2.

2.1.1. *Definitions équivalentes.*

Définition 2.1. *On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété (sans bord) de dimension m (avec $m < n$) si, pour tout $x \in M$, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ avec $x \in U$ et $0 \in V$ et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que*

$$\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}).$$

On dit que U est de classe C^k ($k \geq 1$) si ϕ est de classe C^k.

Afin de manipuler mieux les sous-variétés, il est nécessaire de posséder des définitions équivalentes (même si cela peut semble à première vue un peu fastidieux).

Théorème 2.2 (Le point de vue des submersions)**.** *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $m < n$. Alors M est une sous-variété de dimension m si et seulement si, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ telle que*

$$f^{-1}(\{0_{n-m}\}) = M \cap U.$$

De plus, M est de classe C^k, si et seulement si, f est de classe C^k.

Théorème 2.3 (Le point de vue des graphes)**.** *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $m < n$. Alors M est une sous-variété de dimension m si et seulement si, pour tout $x \in M$, il existe un système de coordonnées de $\mathbb{R}^n$, un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $x = (x_1, \dots, x_n)$, un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ contenant $(x_1, \dots, x_m)$ et une application $h : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 avec $h(x_1, \dots, x_m) = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ et*

$$M \cap U = \{(y, h(y)),\ y \in V\}$$

De plus, M est de classe C^k, si et seulement si, h est de classe C^k.

Théorème 2.4 (Le point de vue des paramétrages)**.** *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $m < n$. Alors M est une sous-variété de dimension m si et seulement si, pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ contenant 0, une application $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\psi(0) = x$, $\psi(V) = M \cap U$ et $d\psi(0)$ injective.*

De plus, M est de classe C^k, si et seulement si, ψ est de classe C^k.

2.1.2. *Espace tangent.* Un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un couple (I, γ) où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m. Un arc paramétré de M est un arc paramétré (I, γ) tels que $\gamma(I) \subset M$.

Définition 2.5. *Soit $x \in M$. On appelle espace tangent à M en x l'ensemble des vecteurs $\gamma'(t)$ où (I, γ) est un arc de M, $t \in I$ et $\gamma(t) = x$. Cet ensemble est noté $T_x(M)$.*

Théorème 2.6. *L'espace tangent T_xM à M en x est un espace vectoriel de dimension m. De plus il est donné par*

(i) (en utilisant la définition) $T_xM = d\phi(x)^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$,

(i) (en terme de submersion) $T_xM = Ker(df(x))$,

(ii) (en terme de graphe) $T_xM = \{(v, dh(0) \cdot v),\ v \in \mathbb{R}^m\}$,

(iii) (en terme de paramétrage) $T_xM = Im(d\psi(0))$.

2.2. **Courbes.**
Références : Lecomte, Partie 1.

2.2.1. *Définitions.* Une sous-variété de dimension $m = 1$ de $\mathbb{R}^n$ est appelée une courbe. Par définition d'une variété, cette notion est directement liée à celle d'arc paramétré que nous détaillons maintenant.

Définition 2.7. *1) Un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un coupe (I, γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1. L'arc est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$) si γ est C^k.*
2) On dit que deux arcs paramétrés (I, x) et (J, y) définissent un même arc géométrique s'il existe un difféomorphisme $\theta : J \to I$ tel que $y(t) = x(\theta(t))$ pour tout $t \in J$. On parle d'arc géométrique orienté si, de plus, θ est croissante.

Proposition 2.8. *Soit (I, γ) un arc paramétré, $t \in I$ et $x = \gamma(t)$. On dit que x est un point régulier de γ si $\gamma'(t) \neq 0$. Dans ce cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C := \gamma(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$ est une variété de dimension 1 d'espace tangent*

$$T_x C = \mathbb{R}\gamma'(t).$$

Si tous les points d'un arc paramétrés sont réguliers, on dira que cet arc est régulier.

Attention, un arc paramétré régulier n'est pas une variété en général, car l'arc peut avoir des points multiples, c'est-à-dire des points $s < t$ dans I tels que $\gamma(s) = \gamma(t)$ mais $\gamma(\cdot)$ et $\gamma(\cdot - t + s)$ ne coïncident pas dans un voisinage de s. Typiquement, c'est le cas si $\gamma(s) = \gamma(t)$ et $\gamma'(s) \neq \gamma'(t)$.

2.2.2. *Longueur d'une courbe.* Soit (I, γ) un arc paramétré (pas nécessairement régulier) et $[a, b] \subset I$. On note par Δ l'ensemble des partitions $\delta = (t_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. On pose

$$L_\delta(\gamma) := \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

(ici et dans toute la suite, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). La longueur de la courbe γ sur $[a, b]$ est donnée par

$$L(\gamma, [a, b]) = \sup_{\delta \in \Delta} L_\delta(\gamma).$$

Théorème 2.9. *Soit (I, γ) un arc paramétré (de classe C^1) et $[a, b] \subset I$. Alors*

$$L(\gamma, [a, b)) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

La longueur d'arc ne dépend pas du choix de la paramétrisation, au sens où, si (J, y) est une autre paramétrisation de (I, x) avec $y = x \circ \theta$ et $\theta : J \to I$ difféomorphisme, alors

$$L(\tilde{\gamma}, \tilde{a}, \tilde{b}) = L(\gamma, a, b)$$

si $\theta(a) = \tilde{a}$, $\theta(b) = \tilde{b}$.

2.2.3. *Abscisse curviligne et courbure.*

Théorème 2.10 (Absisse curviligne). *Soit (I,γ) un arc paramétré régulier. Alors il existe un paramétrage équivalent $(J,\tilde{\gamma})$ de (I,γ), tel que, pour tout $[a,b] \subset J$,*

$$L(\tilde{\gamma},a,b) = b-a.$$

Autrement dit $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ pour tout $t \in J$.

Idée de preuve. Pour fixer les idées, on suppose que $0 \in I$. Soit $\phi(t) = \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds$. Comme $\phi' > 0$, ϕ est un difféomorphisme de I sur son image J. On pose alors $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi^{-1}(s))$ et on a bien

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(\phi^{-1}(s))/\phi'(\phi^{-1}(s))\| = 1.$$

□

Définition 2.11 (Courbure d'un arc). *Soit $A = (I,\gamma)$ un arc régulier paramétré par abscisse curviligne. Si $x = \gamma(t)$ avec $t \in I$, la courbure de l'arc A en x est $K_A(t) := \|\gamma''(t)\|$.*

Remarque : la définition ne dépend pas du paramétrage (par abscisse curviligne) choisi.

Remarque 2.12. En général, il est difficile de calculer une abscisse curviligne d'un arc régulier $A = (I,\gamma)$. En utilisant le fait que, si $\theta'(t) = 1/\|\gamma'(\theta(t))\|$, alors $\gamma \circ \theta$ est paramétré par abscisse curviligne, on obtient

$$K_A(t) = \left\| \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} - \frac{\tau\langle\gamma''(t),\tau\rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \right\| \text{ où } \tau = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Définition 2.13. *On suppose que $A = (I,\gamma)$ est un arc de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$. On dit que cet arc est bi-régulier en $x = \gamma(t)$ si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas, le plan osculateur à A en $\gamma(t)$ est l'espace vectoriel engendré par $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$.*

Remarque 2.14. *Si de plus $A = (I,\gamma)$ est paramétré par abscisse curviligne, alors on appelle $\tau(t)$ la tangente à A en $\gamma(t)$, $n(t) = \gamma''(t)/\|\gamma''(t)\|$ la normale à A en $\gamma(t)$. On a la relation $\tau'(t) = K_A(t)n(t)$ (puisque $\tau'(t) = \gamma''(t)$).*

Si la courbe est plane et de classe C^3, alors on a également la relation : $n'(t) = -K_A(t)\tau(t)$. En effet, comme $\|n(t)\| = 1$, $n'(t)$ est orthogonal à $n(t)$ et donc parallèle à $\tau(t)$ (on en en dimension 2). Or en dérivant la relation $n(t)\cdot\tau(t) = 0$, on obtain

$$0 = n'(t)\cdot\tau(t) + n(t)\cdot\tau'(t) = n'(t)\cdot\tau(t) + K_A(t)\|n(t)\|^2 = n'(t)\cdot\tau(t) + K_A(t).$$

Proposition 2.15 (Cercle osculateur). *Soit $A = (I,\gamma)$ un arc régulier paramétré par abscisse curviligne et $x = \gamma(t)$ un point birégulier de A. Alors il existe un unique cercle $(\mathbb{R},\tilde{\gamma})$ osculateur à A en p, c'est-à-dire tel que*

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t),\ \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t),\ \|\tilde{\gamma}(s) - \gamma(s)\| = o((s-t)^2).$$

C'est le cercle contenu dans le plan osculateur, de rayon $1/K_A(t)$ et de centre (le centre de courbure) $x + (K_A(t))^{-2}\gamma''(t)$.

2.2.4. *Théorie globale.*

Définition 2.16. *On dit qu'un arc paramétré (I, γ) est simple si $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ $\forall s \neq t$.*

Lemme 2.17. *Si C est une courbe de $\mathbb{R}^n$ et est fermée (au sens topologique), alors il existe un arc paramétré régulier et simple (I, γ) tel que*

- soit $I = \mathbb{R}$ et $\gamma(I) = C$. Dans ce cas, C n'est pas compacte,

- soit $I = (a, b)$, γ et γ' sont prolongeables par continuité sur $[a, b]$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ et $C = \gamma(I) \cup \{\gamma(a)\}$. Dans ce cas C est compacte. On dit alors que la courbe C est une courbe fermée simple (attention à l'ambiguïté de la terminologie).

Les résultats suivants, qui jouent un rôle important en analyse et en géométrie, seront énoncés sans démonstration (celles-ci sont assez délicates).

Théorème 2.18 (Théorème de Jordan)**.** *Soit C une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathbb{R}^2 \backslash C$ possède deux composantes connexes distinctes, l'une étant bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe C.*

En fait le résultat est également vrai lorsque la courbe est seulement de classe C^0.

Une extension : le théorème de Jordan-Brouwer. Soit n un entier (supérieur ou égal à 1) et f une application continue et injective de la sphère S^n de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors le complémentaire de $f(S^n)$ est formé de deux composantes connexes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière $f(S^n)$.

Théorème 2.19. *Si $A = (]a, b[, \gamma)$ est une courbe simple de $\mathbb{R}^2$, paramétrée par abscisse curviligne et telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, alors*

$$\int_a^b K_A(t)dt = 2\pi.$$

De façon générale, si A n'est pas une courbe simple, alors $\int_a^b K_A(t)dt$ est un multiple entier de 2π.

2.3. **Surfaces de $\mathbb{R}^3$.**

Références : Lecomte, Partie 2.

Dans cette partie on s'intéresse aux surfaces (= variétés de dimension 2) dans $\mathbb{R}^3$.

2.3.1. *Première forme fondamentale.*

Définition 2.20. *Soit Σ une surface. Un système de coordonnées (U, f) de Σ en un point $p \in \Sigma$ est la donnée d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant p et d'une immersion $f : U \to V$ tel que $f(0,0) = p$.*

On rappelle qu'un tel système de coordonnées existe en tout point $p \in \Sigma$ (théorème 2.4).

Etant donné un point $p \in \Sigma$, on considère la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ à l'espace tangent $T_p\Sigma$:

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y\rangle \qquad \forall X, Y \in T_p\Sigma.$$

C'est la première forme fondamentale de Σ en p.

Dans le repère (U, f), une base de $T_p\Sigma$ est $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\}$. Donc une matrice de la forme bilinéaire I_p est dans cette base

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \langle\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\rangle & \langle\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\rangle \\ \langle\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\rangle & \langle\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\rangle \end{pmatrix} = (J_f(x))^T J_f(x),$$

où $J_f(x)$ est la matrice Jacobienne de ϕ en x.

Remarque : si (V, g) est un autre système de coordonnées de Σ au point p, alors (quitte à restreindre les ouverts U et V, il existe un difféomorphisme $\phi : V \to U$ tel que $g = f \circ \phi$. Alors

$$\alpha_g(x) = (J_\phi(x))^T \alpha_f(\phi(x)) J_\phi(x)$$

où $J_\phi(x)$ est la matrice Jacobienne de ϕ en x (par formule de changement de variable).

Application : longueur et angles en coordonnées. Soit (I, γ) un arc paramétré de Σ. On sait que la longueur de γ entre a et b (où $a, b \in I$) est donnée par

$$L(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \| \gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle^{1/2} dt.$$

Si (U, f) est un système de coordonnées et si $\gamma(I) \subset f(U)$, alors on aimerait pouvoir calculer la longueur de la courbe $\tilde{\gamma}(t) := f^{-1}(\gamma(t))$ (qui est aussi une courbe de classe C^1) qui est dans U. Comme $\gamma(t) = f \circ \tilde{\gamma}(t)$,

$$\gamma'(t) = df(\tilde{\gamma}(t))(\tilde{\gamma}'(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}_2'(t)$$

et donc
$$L(\gamma,[a,b]) = \int_a^b \left((\tilde\gamma'(t))^T\alpha_f(\tilde\gamma(t))\tilde\gamma'(t)\right)^{1/2} dt.$$
Cela explique comment (l'expression en coordonnées de) la première forme fondamentale est liée à la longueur d'une courbe sur la surface.

Mesure des angles : Si X, Y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, l'angle entre X et Y est donné par $\arccos\langle X/\|X\|, Y/\|Y\|\rangle$. Si on définit V et W dans $\mathbb{R}^2$ tels que $J_f(x)V = X$, $J_f(x)W = Y$, alors cet angle est égal à
$$\arccos\left(\frac{V^T}{(V^T\alpha_f(x)V)^{1/2}}\alpha_f(x)\frac{W}{(W^T\alpha_f(x)W)^{1/2}}\right).$$

Exemple : dans la portion de S^2 définie par $\phi(x_1,x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$ dans $U = \{x_1^2+x_2^2 < 1\}$, on a
$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x_1}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} & \frac{-x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} \end{pmatrix},$$
et donc
$$\alpha_f(x) = \frac{1}{1-x_1^2-x_2^2}\begin{pmatrix} 1-x_2^1 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}$$
Noter que $\alpha_f(x)$ n'est proportionnelle à l'identité qu'en $(0,0)$ et donc les longueurs calculées sur la carte U ne sont jamais égales à celles sur la surface S^1.

Projections de Mercator. On représente S^2 par $g(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ dans $V =]-\pi/2, 3\pi/2[\times]-\pi/2,\pi/2[$. On montre que
$$\alpha_g(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour le cylindre, que l'on peut localement paramétrer par $f(x,\theta) = (x, \cos(\theta), \sin(\theta))$ pour $(x,\theta) \in \mathbb{R}\times]-\pi/2, 3\pi/2[$, on a
$$\alpha_f(x,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On peut mesurer les longueurs et les angles en coordonnées comme si le cylindre étant plan.

2.3.2. *Application de Gauss.*

Définition 2.21. *Une application de Gauss est une application continue ν de Σ dans la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ telle que ν_p est orthogonal à $T_p\Sigma$ en tout point $p \in \Sigma$.*

Si (f,U) est un paramétrage de Σ, alors une application de Gauss est donnée par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}.$$

Remarque : il est clair que si ν est une application de Gauss, alors $-\nu$ aussi et que ν et $-\nu$ sont les seules possibles. La donnée d'une application de Gauss définit une orientation de la surface.

Par exemple, sur S^2, on peut prendre $\nu_p = p$.

2.3.3. *Seconde forme fondamentale, Courbure.* On considère une application de Gauss $\nu : \Sigma \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (donc une orientation de Σ). Sa différentielle en un point $p \in \Sigma$ est l'application de $T_p\Sigma$ dans lui-même définie, pour tout $X \in T_p\Sigma$ par

$$d_p\nu \cdot X = (\nu \circ \gamma)'(0)$$

où (I,γ) est un arc paramétré de Σ avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Noter que, comme $\|\nu_p\| = 1$ pour tout p, $(\nu \circ \gamma)'(0)$ est orthogonal à ν_p et donc appartient à $T_p\Sigma$.

Cette définition ne dépend pas du choix de γ puisqu'en coordonnées, on a

$$d_p\nu \cdot X = dN_f(x) \cdot [df(x)]^{-1}X.$$

Par exemple, pour S^2, on a

$$d_p\nu \cdot X = X.$$

Proposition 2.22. *L'application $d_p\nu$ est linéaire et symétrique sur $T_p\Sigma$, au sens où*

$$\langle d_p\nu X, Y\rangle = \langle X, d_p\nu Y\rangle \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3.$$

Preuve. En effet, il suffit de montrer la symétrie en coordonnées, c'est-à-dire

$$\langle d_p\nu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), d_p\nu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\rangle.$$

Par définition,

$$d_p\nu \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x).$$

D'autre part, comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_p\Sigma$, on a

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), N_f(x)\rangle = 0.$$

Donc, en dérivant par rapport à x_1:

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x), N_f(x)\rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)\rangle = 0.$$

Comme d'après le théorème de Schwarz le membre de gauche est symétrique par rapport à x_1 et x_2, il en est de même pour le membre de droite. $\square$

La second forme fondamentale est la forme bilinéaire sur $T_p\Sigma$:

$$II_p(X,Y) = -\langle d_p\nu \cdot X, Y\rangle.$$

Par exemple, sur S^2, on a

$$II_p(X,Y) = -\langle X, Y\rangle.$$

Proposition 2.23. *Soit (I,γ) un arc de classe C^2 sur M avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X \in T_p\Sigma$. Alors*

$$\langle \gamma''(0), \nu_p\rangle = II_p(X,X).$$

Preuve. On a

$$\langle \gamma'(t), \nu \circ \gamma(t)\rangle = 0.$$

Donc, en dérivant en $t = 0$,

$$\langle \gamma''(0), \nu_p\rangle + \langle X, d_p\nu \cdot X\rangle = 0.$$

□

Définition 2.24. *On appelle courbure de Gauss en p le déterminant de la matrice associée à II_p (comme forme bilinéaire symétrique).*

(la courbure est indépendante de l'orientation).

Par exemple, sur S^2, la matrice associée à II_p est $-I_2$ (l'identité de $\mathbb{R}^2$) et donc la courbure est 1.

Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dite isométriques s'il existe des systèmes de coordonnées (U,ϕ) et (V,ψ) sur Σ_1 et Σ_2 tels que $\alpha_\phi = \alpha_\psi$.

Par exemple, le cylindre est (localement) isométrique au plan.

Théorème 2.25 (Theorema Egregium de Gauss, admis)**.** *Deux nappes isométriques ont même courbure.*

En particulier, la sphère n'est pas (même localement) isométrique au plan.

3. Equations différentielles

La seconde partie du cours est consacrée aux équations différentielles. Après un rappel des théorie d'existence et d'unicité (théorie de Cauchy-Lipschitz), on discutera de la différentiabilité de la solution par rapport à la donnée initiale et le lien avec les équations de transport. Puis on revisitera la théorie des équations différentielles linéaires, avant d'étudier la stabilité des solutions au voisinage d'un équilibre.

3.1. **Flot d'une équation différentielle.**

Références : Benzoni, Chap. 5, Marle Chap. II.

3.1.1. *Le problème de Cauchy.*

Lemme 3.1 (Gronwall)**.** *Soient $T > 0$ et $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant une inégalité du type :*

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds \qquad \forall t \in [0,T],$$

où a et c sont des applications continues et positives sur $[0,T]$. Alors

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)\exp\{\int_s^t a(\tau)d\tau\}ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Preuve. On pose $U(t) = \int_0^t a(s)u(s)ds$. Alors U est de classe C^1 et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\exp\{-\int_0^t a(s)ds\}U(t)\right] &= \exp\{-\int_0^t a(s)ds\}\left[-a(t)U(t) + a(t)u(t)\right] \\ &\leq \exp\{-\int_0^t a(s)ds\}\left[-a(t)U(t) + a(t)c(t) + a(t)U(t)\right] \\ &= \exp\{-\int_0^t a(s)ds\}a(t)c(t).\end{aligned}$$

On intègre cette inégalité entre 0 et T. Comme $U(0) = 0$, on obtient :

$$\exp\{-\int_0^t a(s)ds\}U(t) \leq \int_0^t \exp\{-\int_0^s a(\tau)d\tau\}a(s)c(s)ds.$$

Par conséquent,

$$u(t) \leq c(t) + U(t) \leq c(t) + \exp\{\int_0^t a(s)ds\}\int_0^t \exp\{-\int_0^s a(\tau)d\tau\}a(s)c(s)ds,$$

d'où le résultat. □

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert d'un espace de Banach E et $(t_0, x_0) \in I \times E$ une condition initiale. Soit $f : I \times U \to E$ une application continue telle qu'il existe $L > 0$ avec

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|_E \qquad \forall (t,x,y) \in I \times U \times U.$$

On dit dans ce cas que f est globalement lipschitzienne dans $I \times U$.

Théorème 3.2. *Il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ avec $t_0 \in J$ et une trajectoire $x : J \to U$ de classe C^1 solution de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) & t \in J \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

De plus, si (J_1, x_1) et (J_2, x_2) sont deux solutions comme ci-dessus, alors $x_1 = x_2$ dans $J_1 \cap J_2$.

A partir de maintenant, on ne suppose plus que f est globalement lipschitzienne, mais seulement localement lipschitzienne : pour tout $(t, x) \in I \times U$, il existe un ouvert J inclus dans I et un ouvert V inclus dans U et une constante $L_{t,x}$ tels que $(t, x) \in J \times V$ et

$$\|f(s, y) - f(s, y')\| \leq L_{t,x} \|y - y'\|_E \qquad \forall (s, y, y') \in J \times V \times V.$$

On appelle solution maximale une solution (J, x) qui n'est prolongeable sur aucun ouvert strictement plus grand que J. Notons qu'elle existe et est unique (cela vient de Cauchy-Lipschitz, appliqué sur les petits ouverts (J, V) définis ci-dessus.

Théorème 3.3 (Comportement aux extrémités)**.** *Soit (J, x) solution maximale de l'équation. Si b est la borne supérieure de J, alors*

- *soit $b = +\infty$ ou $b \notin I$,*
- *soit, pour tout compact K de U, il existe $t_K \in J$ tel que $x(t) \notin K$ pour tout $t \in [t_K, b[$.*

Voici maintenant un résultat typique d'existence globale.

Théorème 3.4. *On suppose que E est de dimension finie, que f est définie, continue et localement Lipschitzienne dans $I \times E$ et, de plus, qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que*

$$\|f(t, x)\| \leq A\|x\| + B \qquad \forall (t, x) \in I \times U.$$

Alors toute solution maximale est globale (i.e., définie sur I).

3.1.2. *Flot d'une équation différentielle.*

Théorème 3.5. *On suppose que $f : I \times U \to E$ est de classe C^2. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage ouvert $J \subset I$ de t_0, un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_0 et une application $\phi^{t_0} \in C^1(J \times V, U)$ vérifiant, pour tout $x \in V$,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^{t_0}(t, x) = f(t, \phi^{t_0}(t, x)), & t \in J \\ \phi^{t_0}(t_0, x) = x \end{cases}$$

L'application ϕ^{t_0} est le flot de l'équation différentielle. Noter que le flot est de classe C^1 également par rapport à la donnée initiale. Sa différentielle par rapport à la donnée initiale $\psi := D_x \phi^{t_0}$ est solution (dans $L(E)$) de l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t, x) = D_x f(t, \phi^{t_0}(t, x)) \circ \psi(t, x), & t \in J \\ \psi(t_0, x) = Id_E \end{cases}$$

3.1.3. *Application aux équations de transport.* On s'intéresse aux équations aux dérivées partielles (EDP) de la forme

$$\partial_t u(t,x) + f(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = h(t,x) \tag{1}$$

où l'inconnue est la fonction u, dont on désigne par $\partial_t u$ sa dérivée par rapport à la variable temporelle $t \in \mathbb{R}$ et par ∇u son gradient par rapport à la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^n$. Le champs de vecteurs $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est donné, ainsi que le membre droit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et la valeur de u en $t = 0$: $u(0,x) = u_0(x)$ où $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

La remarque cruciale pour résoudre cette équation est l'idée suivante, qui est une conséquence directe du théorème de dérivation des fonctions composées :

Lemme 3.6. *On suppose que f et h sont continues et que u est une solution de classe C^1 de l'EDP. Soit $x : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de l'EDO*

$$x'(t) = f(t,x(t)), \qquad t \in I,$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\frac{d}{dt} u(t,x(t)) = h(t,x(t)), \qquad t \in I. \tag{2}$$

A partir de maintenant, on suppose que le flot $\phi^0(t,x)$ de l'EDO associée à f (avec pour donnée initiale x en $t = 0$) est défini sur $\mathbb{R}_+$. Si on suppose toujours que u est une solution de classe C^1 de l'EDP, on obtient, en intégrant la relation (2) entre 0 et t et en tenant compte du fait que $u(0,x) = u_0(x)$:

$$u(t,\phi^0(t,x)) = u_0(x) + \int_0^t h(s,\phi^0(s,x))ds.$$

En remplaçant x par $\phi^t(0,t)$ on déduit de la propriété de flot la représentation de u :

$$u(t,x) = u_0(\phi^t(0,x)) + \int_0^t h(s,\phi^t(s,x))ds. \tag{3}$$

Théorème 3.7. *On suppose que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, que h et u_0 sont de classe C^1 et que le flot $\phi^0(t,x)$ de l'EDO associée à f est défini sur $\mathbb{R}_+$. Alors u défini par (3) est l'unique solution de classe C^1 de l'EDP (1) avec condition initiale $u(0,\cdot) = u_0$.*

3.2. **Equations différentielles linéaires.**
Références : [Benzoni, chap.6]

Dans cette partie, nous nous intéressons aux EDO linéaires, c'est-à-dire de la forme :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

où $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ et $b : I \times \mathbb{R}^n$ sont continues. On peut déduire directement du théorème de Cauchy-Lipschitz l'existence globale d'une unique solution pour une donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

3.2.1. *Résolvente.* Nous considérons ici l'EDO dans l'espace des matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$: pour $t_0 \in I$,

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \qquad t \in I \\ M(t_0) = I_n \end{cases}$$

L'unique solution à cette EDO est la résolvante du problème et est notée $R(t, t_0)$.

Principales propriétés :
Semi-groupe : $R(t, s)R(s, t_0) = R(t, t_0)$ pour tout $s, t, t_0 \in I$.
En particulier, $R(t, t_0)$ est inversible pour tout $t, t_0 \in I$ et d'inverse $R(t_0, t)$.
De plus,

$$\frac{d}{ds}R(t, s) = -A(s)R(t, s)$$

Cas autonome : si $A(t) = A$ ne dépend pas de t, alors $R(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Proposition 3.8 (Formule de Liouville)**.** *Soit* $\Delta(t, t_0) = det(R(t, t_0))$*. Alors*

$$\Delta(t, t_0) = \exp\{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds\}.$$

Proposition 3.9 (Formule de Duhamel)**.** *La solution x de l'EDO*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \qquad t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est donnée en fonction de la résolvante par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds$$

3.2.2. *Stabilité.* On considère maintenant le cas autonome où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et l'EDO

$$x'(t) = Ax(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et sont données par $t \to e^{At}x$ où $x \in \mathbb{R}^d$ est la position initiale en $t = 0$. On cherche à comprendre le comportement de ces solutions lorsque $t \to \pm\infty$.

Définition 3.10. *On dit que A est hyperbolique si les valeurs propres (réelles ou complexes) de A ont toutes une partie réelle non nulle.*

Théorème 3.11. *On suppose que A est hyperbolique. Alors les ensembles*

$$E^s := \{x \in \mathbb{R}^d,\ \lim_{t\to+\infty} e^{At}x = 0\} \qquad \text{et} \qquad E^u := \{x \in \mathbb{R}^d,\ \lim_{t\to-\infty} e^{At}x = 0\}$$

sont appelés espaces stables et instables de A. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par A, qui sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ ($E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$). De plus il existe des projections Π^s et Π^u sur E^s et E^u, commutant avec A et telles que

$$\Pi^s + \Pi^u = I_n.$$

Enfin, il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $C > 0$ telles que

$$\|e^{At}\Pi^s\| \leq Ce^{-\varepsilon t} \qquad \forall t \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \|e^{At}\Pi^u\| \leq Ce^{\varepsilon t} \qquad \forall t \leq 0.$$

3.3. **Equilibres d'une équation différentielle autonome.**
Références : Benzoni, 8.2 et 8.3, Marle Chap. III et V.

On dit qu'une EDO est autonome lorsque le champs de vecteurs f ne dépend pas du temps :

$$x'(t) = f(x(t))$$

où f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U que l'on supposera égal à $\mathbb{R}^n$ pour fixer les idées. On note ϕ^x la solution maximal de l'EDO avec pour donnée initiale x_0 en $t_0 = 0$.

Un équilibre de l'EDO (ou de f) est un zero de f.

3.3.1. *Stabilité asymptotique.* On dit qu'un équilibre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in U_{x_0}$, ϕ^x est défini sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} \phi^x(t) = x_0$.

Voici un critère simple de stabilité asymptotique :

Théorème 3.12. *On suppose que f est de classe C^2 et que toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de $df(x_0)$ sont de partie réelle strictement négative. Alors x_0 est asymptotiquement stable.*

3.3.2. *Equilibre hyperbolique.* On dit qu'un équilibre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de f est hyperbolique si les les valeurs propres (réelles ou complexes) de $df(x_0)$ sont de partie réelle non nulle. Autrement dit, x_0 est hyperbolique si la matrice $df(x_0)$ est hyperbolique (au sens de la définition 3.10).

Le théorème de Hartman-Grobman affirme que, si x_0 est un point fixe hyperbolique, alors l'allure du flot de l'EDO associée à f au voisinage de x_0 est la même[1] que celle du flot de l'EDO linéaire associé à la matrice $df(x_0)$ au voisinage de 0.

Le résultat suivant va également dans ce sens :

Théorème 3.13 (de la variété stable)**.** *Soit f tel que le flot de l'EDO est complet (i.e., défini sur $\mathbb{R}$ pour toute donnée initiale) et x_0 un équilibre hyperbolique de f. On note E^s et E^u les espaces stables et instables associés à la matrice hyperbolique $df(x_0)$ (cf. le théorème 3.11). Alors il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que les ensembles*

$$\mathcal{W}^s_{loc} := \{x \in U_{x_0} \text{ tq } \phi^x(t) \in U_{x_0} \qquad \forall t \geq 0\}$$

et

$$\mathcal{W}^u_{loc} := \{x \in U_{x_0} \text{ tq } \phi^x(t) \in U_{x_0} \quad \forall t \leq 0\}$$

sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, d'espace tangent respectifs E^s et E^u en x_0. De plus

$$\mathcal{W}^s_{loc} := \{x \in U_{x_0} \text{ tq } \lim_{t\to+\infty} \phi^x(t) = x_0\}$$

et

$$\mathcal{W}^u_{loc} := \{x \in U_{x_0} \text{ tq } \lim_{t\to-\infty} \phi^x(t) = x_0\}.$$

[1] Au sens où il existe un homomorphisme local entre les deux flots.

Les sous-variétés $\mathcal{W}^s_{loc}$ et $\mathcal{W}^u_{loc}$ sont appelées variétés stables et instables au voisinage de x_0.