Université Paris Dauphine
2017-2018

Analyse fonctionnelle approfondie
Feuille d'exercices

1 Compacité, théorème d'Ascoli

1.1 Ensembles compacts

Exercice 1.1 Soit (E, d) un espace métrique compact non vide et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y, \qquad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f possède une unique point fixe.
(Indication : On pourra étudier la fonction $x \to d(f(x), x)$.)

Exercice 1.2 Soit (X, d) est un espace métrique non vide compact. On note

$$diam(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y).$$

(a) Montrer que $diam(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $diam(X) = d(x, y)$.

(b) Montrer que, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X, alors $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un compact non vide de X et $diam(F) = \lim_{n\to+\infty} diam(F_n)$.

(c) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite décroissante de fermés d'un espace complet, $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est-il nécessairement non vide ?

Exercice 1.3 Soit (X, d) un espace métrique compact et Y l'ensemble des sous-ensembles fermés non vides de X. On définit

$$\delta(K_1, K_2) := \max\left(\sup_{y_1\in K_1} d(y_1, K_2)\ ,\ \sup_{y_2\in K_2} d(y_2, K_1) \right) \qquad \forall K_1, K_2 \in Y.$$

(a) Montrer que δ est une distance sur Y.

(b) Soit $\epsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que la famille des boules fermées $(B(x_i, \epsilon))_{i=1,\dots,N}$ recouvre X. Montrer que Y peut être recouvert par le nombre fini des boules (pour δ) de rayon 2ϵ dont le centre est un élément de Y de la forme $B(x_{i_1}, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_{i_k}, \epsilon)$, où $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Soit (K_n) une suite décroissante de sous-ensembles fermés de K. Montrer que la suite (K_n) converge vers $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ pour la distance δ.

(d) Montrer que, si (K_n) est une suite de Cauchy de Y pour δ, alors (K_n) converge (toujours pour δ) vers $\bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{p\geq n} K_p}$.

(e) En déduire que Y est compact pour δ.

Exercice 1.4 Soit (K_n) une famille de sous-ensembles d'un espace métrique (X, d). On note

$$K_\infty = \{x \in X \mid \exists \text{ une sous-suite } (n_k) \text{ et } x_{n_k} \in K_{n_k} \text{ avec } x_{n_k} \to x\}.$$

En utilisant le procédé diagonal de Cantor, montrer que K_∞ est fermé.

1.2 Théorème d'Ascoli

Exercice 1.5 Soient E, F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications équicontinues de E dans F. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, est un fermé.

Exercice 1.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n(x) = f(x-n)$. Montrer que la famille (f_n) est équi-continue et bornée, mais n'est pas compacte pour la norme uniforme sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il si on considère la restriction à $[0,1]$ des fonctions f_n?

Exercice 1.7 Soit E un sous-ensemble borné de $L^1([0,1])$ et $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonctions continue. Montrer que l'ensemble de fonctions $F := \{x \to \int_0^1 k(x,y)u(y)dy,\ u \in E\}$ est pré-compact dans $C^0([0,1])$.

Exercice 1.8 Soient (E,d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{H}(x)$ l'ensemble des $f(x)$ avec $f \in \mathcal{H}$. Etablir :

1. L'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si E est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

Exercice 1.9 On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$? Que dit le théorème d'Ascoli?

Exercice 1.10 (Théorèmes de Dini) (i) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement en croissant vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. (le résultat persiste-t-il si on ne suppose par f continue?)

(ii) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues croissantes qui converge simplement vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. (le résultat persiste-t-il si on ne suppose par f continue?)

(iii) Soit P_n la suite de polynômes définie sur $[0,1]$ par récurrence par : $P_0(x) = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$. Vérifier que $P_n(x) \le \sqrt{x}$ (pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que $P_{n+1} \ge P_n$. En déduire que (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \to \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Exercice 1.11 (Un compact de $C^\infty([0,1])$) On munit l'ensemble $X := C^\infty([0,1])$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min\{1, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty\}}{2^n} \qquad \forall f,g \in X.$$

(i) Montrer que, pour tout suite (f_k) de X et pour tout $f \in X$, on a $d(f_k, f) \to 0$, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_k^{(n)})$ converge vers $f^{(n)}$ uniformément sur $[0,1]$.

(ii) Vérifier que d est bien une distance sur X et que X est complet pour d.

(iii) Montrer que, pour tout $M > 0$, l'ensemble $E_M := \{f \in X \; ; \; \|f^{(n)}\|_\infty \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}\}$ est compact pour la distance d.

Exercice 1.12 Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $C^0([0,1])$ dont tous les éléments sont de classe C^1.

(i) En utilisant le théorème du graphe fermé (voir section 2), montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f'\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.

(ii) En déduire que E est de dimension finie.

2 Convergence faible

Exercice 2.1 Déterminer si les fonctions suivantes convergent fortement ou faiblement dans $L^2([0,1])$:

$$a_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}, \qquad b_n(x) = \cos(2\pi n x), \qquad c_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes convergent fortement ou faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$d_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \qquad e_n(x) = \sqrt{n}e^{-(nx)^2}.$$

Exercice 2.2 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note $\tau_n f$ la fonction de $L^2(\mathbb{R})$ définie par $\tau_n f(x) = f(x-n)$.

(i) Montrer que $(\tau_n f)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$. (on pourra utiliser le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$).

(ii) On suppose que $(\tau_n f)$ converge fortement vers 0. Que vaut f ?

Exercice 2.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $1-$périodique : (i.e., $f(x+1) = f(x)$ p.p.) et de carré localement intégrable (i.e, ici, $\int_0^1 f^2(x)dx < +\infty$). On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) := f(nx)$ et $\bar{f} = \int_0^1 f(x)dx$.

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact.

(i) Montrer que la suite de fonctions $x \to \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \phi\left(\frac{x+n}{N}\right)$ converge uniformément vers $\int_0^1 \phi(x)dx$ sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. (la suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?)

(ii) En déduire que

$$\int_0^1 \phi(x)f_n(x)dx \to \bar{f}\int_0^1 \phi(x)dx.$$

(iii) Conclure que (f_n) converge faiblement vers $\bar{f}$ dans $L^2([0,1])$.

Exercice 2.4 Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non nulle, à support compact. On pose $\phi_n(x) := \sqrt{n}\phi(nx)$. Montrer que (ϕ_n) tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas fortement.
(On pourra utiliser le fait que les fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 2.5 Soit H un Hilbert de dimension infinie.

(i) Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H.

(ii) Montrer que la suite (e_n) tend faiblement vers 0 dans H (on pourra montrer que, pour tout $x \in H$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n, x\rangle^2 < +\infty$).

(iii) En déduire que l'adhérence faible de la sphère unité de H est la boule unité fermée de H.

Exercice 2.6 (Convergence faible et convexité) Soit C un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H.

(i) On suppose que C est un demi-espace fermé de H, i.e., qu'il existe $z \in H$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $C = \{y \in H \mid \langle y, z\rangle \leq c\}$. Montrer que C est fermé pour la convergence faible.

(ii) On rappelle le théorème de séparation : si C est sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x \notin H$, alors il existe $z \in H$ tel que $\sup_{y \in C} \langle y, z \rangle < \langle x, z \rangle$.

En déduire que si C est convexe fermé de H, alors C est séquentiellement fermé pour la convergence faible.

Exercice 2.7 (Banach-Saks) Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite qui tend faiblement vers 0 dans H. On rappelle que (x_n) est bornée.

(i) Montrer qu'il existe une suite extraite (n_k) telle que, si on pose $y_k := x_{n_k}$, alors $\langle y_k, y_{k'} \rangle \leq 1/k$ pour tout $0 < k < k'$.

(ii) Montrer alors que la suite $(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k)$ tend fortement vers 0 lorsque $N \to +\infty$.

(iii) Plus généralement, si (x_n) est une suite qui tend faiblement vers x dans H, montrer qu'il existe une suite extraite (x_{n_k}) telle que la suite $(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k})$ tend fortement vers x lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 2.8 Soient M et N deux espaces vectoriels orthogonaux et fermés d'un espace de Hilbert H. Montrer que $M + N$ est fermé.

3 Calcul des variations

Exercice 3.1 1. Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \neq 0$ la fonction $u_{\alpha,\beta}(t) := t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}$ est-elle dans $H^1([0,1])$?

2. On définit sur $H^1([0,1])$ les produits scalaires

$$\langle u, v\rangle_1 = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(s)v'(s)ds$$

et

$$\langle u, v\rangle_2 = \int_0^1 u(s)v(s) + u'(s)v'(s)\ ds$$

Montrer que les normes associées sont équivalentes.

Exercice 3.2 1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $e_t : H^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par $e_t(u) = u(t)$ pour tout $u \in H^1([0,1])$ est une forme linéaire continue.

2. En déduire qu'il existe un élément $v_t \in H^1([0,1])$, que l'on déterminera, tel que

$$u(t) = u(0)v_t(0) + \int_0^1 u'(s)v_t'(s)ds \qquad \forall s \in [0,1].$$

3. Même question pour la forme linéaire continue $u \to \int_0^1 u(s)ds$.

Exercice 3.3 On rappelle que $H_0^1([0,1])$ est le sous-espace vectoriel fermé de $H^1([0,1])$ constitué des éléments x de $H^1([0,1])$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. On considère le problème

$$I := \min\left\{\int_0^1 (x'(t))^2 dt \text{ avec } x \in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 (x(t))^2 dt = 1\right\}.$$

1. Montrer que le problème possède au moins une solution. On note x une telle solution.

2. Montrer que l'application

$$\Phi(y) = \frac{\int_0^1 (y'(t))^2 dt}{\int_0^1 (y(t))^2 dt}$$

est définie et différentiable dans un voisinage de x dans $H_0^1([0,1])$.

3. Montrer que

$$I = \inf\left\{\Phi(y) \text{ avec } y \in H_0^1([0,1]),\ y \neq 0\right\}$$

et que l'infimum du problème de droite est atteint en x.

4. Calculer la diférentielle de Φ en x et en déduire que

$$\int_0^1 x'(t)h'(t) - \int_0^1 (x'(t))^2 dt \int_0^1 x(t)h(t)dt = 0.$$

5. Montrer alors que $x' \in H^1([0,1])$ et que

$$(x')'(t) = -\lambda x(t) \text{ p.p.} \qquad \text{où } \lambda = \int_0^1 (x'(t))^2 dt.$$

6. En déduire que x est de classe au moins C^2 et le calculer.

Exercice 3.4 On rappelle que $H_0^1([0,1])$ est le sous-espace vectoriel fermé de $H^1([0,1])$ constitué des éléments de $H^1([0,1])$ tels que $x(0)=x(1)=0$. On considère le problème

$$I := \sup\left\{\int_0^1 x(t)dt \text{ avec } x\in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 (x'(t))^2dt \le 1\right\}.$$

1. Montrer que $I>0$.
2. Montrer que le problème possède au moins une solution.
3. Vérifier que si x est une solution, alors $\displaystyle\int_0^1 (x'(t))^2dt = 1$.
4. Montrer alors que la solution est unique. On note x cette solution.
5. Soit $h\in H_0^1([0,1])$. Soit $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(a,b) := \left(\int_0^1 ax(t)+bh(t)\ dt\ ,\ \int_0^1 (ax'(t)+bh'(t))^2\ dt\right) \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

   (i) Expliquer pourquoi Φ ne peut pas être une bijection d'un voisinage de $(1,0)$ dans un voisinage de $(\int_0^1 x(t)dt, \int_0^1 (x'(t))^2dt)$.

   (ii) Déduire du théorème d'inversion locale que la différentielle de Φ en $(1,0)$ n'est pas inversible et donc que

$$\lambda\int_0^1 x'(t)h'(t)\ dt = \int_0^1 h(t)\ dt \qquad \text{où } \lambda = \int_0^1 x(t)\ dt = I.$$

   (iii) En déduire que $x'\in H^1$ avec $(x')' = -\lambda^{-1}$ p.p.

   (iv) En conclure que x est de classe au moins C^2 et le calculer.

Exercice 3.5 Soit $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe continue telle qu'il existe $C>0$ avec

$$(\mathcal{C}) \qquad C^{-1}p^2 - C \le L(p) \le C(1+p^2) \qquad \forall p\in\mathbb{R}.$$

Pour $b\in\mathbb{R}$, on considère le problème

$$(\mathcal{P}_b) \qquad I(b) := \inf\left\{\int_0^1 L(x'(t))\ dt \text{ avec } x\in H^1([0,1]),\ x(0)=0,\ x(1)=b\right\}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que L est convexe. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_b)$ a (au moins) une solution donnée par $x(t)=bt$.
   (on pourra utiliser le fait que, comme L est convexe sur $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ il existe $q_\alpha\in\mathbb{R}$ avec $L(\beta)\ge L(\alpha)+q_\alpha(\beta-\alpha)$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$).

2. Soit $a<b<c\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in]0,1[$ tels que $b=(1-\lambda)a+\lambda b$. Montrer qu'il existe une suite x_n de $H^1([0,1])$ telle que $x_n'(s)\in\{a,c\}$ pour presque tout $s\in[0,1]$, $x_n(0)=0$, $x_n(1)=b$ et (x_n') converge faiblement vers b dans L^2.

   En déduire que $I(b)\ge(1-\lambda)L(a)+\lambda L(c)$.

3. On pose $L^{**}(b)=\inf\{(1-\lambda)L(a)+\lambda L(c) \text{ avec } \lambda\in[0,1],\ a,c\in\mathbb{R},\ b=(1-\lambda)a+\lambda b\}$. Montrer que L^{**} est convexe, continue, vérifie $L^{**}\le L$ ainsi que la propriété de croissance $(\mathcal{C})$.

4. Conclure que $I(b)=L^{**}(b)$ pour tout $b\in\mathbb{R}$.

5. (plus délicat) En s'inspirant de la question 1., montrer que le problème $(\mathcal{P}_b)$ admet une solution, si et seulement si, $L(b)=L^{**}(b)$.

4 Opérateurs compacts

Exercice 4.1 Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ compact et (x_n) une suite qui converge faiblement vers x dans H. Montrer que $(K(x_n))$ converge fortement vers $K(x)$.
(Rappel : on sait déjà que, comme K est linéaire continue, $(K(x_n))$ converge faiblement vers $K(x)$.)

Exercice 4.2 Soit H un espace de Hilbert et $K \in \mathcal{L}(H)$ opérateur compact. Montrer que si l'image de K est fermée, alors elle est de dimension finie.

Exercice 4.3 Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Rappelons que $K^* \in \mathcal{L}(H)$ est défini par

$$\langle K^*(x), y\rangle = \langle x, K(y)\rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

On veut montrer que K^* est également un opérateur compact. Soit (x_n) une suite bornée de H.

1. Soit E la fermeture dans H de $K(B_1)$, où B_1 est la boule unité fermé de H. Montrer que la famille de fonctions $\phi_n : E \to \mathbb{R}$ défini par $\phi_n(y) = \langle x_n, y\rangle$ est équicontinue.
2. En déduire qu'elle admet une sous-suite (ϕ_{n_k}) qui converge uniformément sur E.
3. Montrer que, pour tout k, k',
$$\sup_{x\in E} \left|\phi_{n_k}(x) - \phi_{n'_k}(x)\right| = \left\|K^*(x_{n_k}) - K^*(x_{n_{k'}})\right\|.$$
4. Conclure.

Exercice 4.4 Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive sur $[0,1]$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Rappelons que $H_0^1([0,1])$ est le sous-ensemble fermé de H^1 défini comme l'ensemble des $x \in H^1$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. A tout $f \in L^2$, on associe l'unique solution $u \in H_0^1$ de

$$-(au')' + bu = f \text{ dans } [0,1], \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

(i) Montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram que u est bien défini de façon unique et que l'application $f \to u$ est linéaire continue de L^2 dans H_0^1.

(ii) En déduire que $K : L^2 \to L^2$ qui à f associe $u := K(f)$ est compact et auto-adjoint.

(iii) Montrer qu'il existe une base de hilbertienne de L^2 constituée de vecteurs propres de K.

Exercice 4.5 Soit H un espace de Hilbert et $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. On pose $T = I - K$. Montrer que

$$Im(T) = Ker(T^*)^\perp.$$

Exercice 4.6 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires continue de H dans H. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est de rang fini si $Im(T)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que, si C est un compact de H, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un espace vectoriel de dimension finie $F \subset H$ telle que
$$\sup_{x\in C} dist(x, F) \le \epsilon.$$
2. En déduire que tout opérateur compact de H est la limite d'opérateurs de rang fini.
(Penser à la projection orthogonale)

3. Inversement on suppose que K_n est une suite d'opérateurs de rang fini qui converge en norme vers un opérateur $K \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que K est compact.
(Indication : on pourra montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K(B(0,1))$ peut être recouvert par un nombre fini de boule de rayon ϵ).

Exercice 4.7 Soit (λ_n) une suite réelle bornée. On définit l'opérateur $T : \ell^2 \to \ell^2$ par

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in N} \qquad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

(i) Montrer que T est un opérateur linéaire continu.

(ii) Montrer que T est compact, si et seulement si, la suite (λ_n) tend vers 0.

(iii) Déterminer les valeurs propres et le spectre de T.

Exercice 4.8 Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $h : [0,1] \to [0,1]$. On définit l'opérateur $A : E \to E$ par

$$A(f) = f \circ h \qquad \forall f \in E.$$

1. Montrer que A est une application linéaire continue et calculer $\|A\|$.
2. A quelle condition sur h l'opérateur A est-il compact?

Exercice 4.9 Soit $H = L^2([0,1])$. On définit V sur H par

$$V(f)(t) = \int_0^t f(s)ds \qquad \forall f \in H.$$

L'opérateur V est appelé l'opérateur de Volterra.

1. Montrer que V est une application linéaire continue de H dans H.
2. A l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que V est un opérateur compact.
3. Montrer que V n'a pas de valeur propre.
4. Montrer que $\sigma(V) = \{0\}$.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du Vendredi 6 Novembre 2015.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 (Convergence faible)

1. Soit H un espace de Hilbert. Rappeler la définition de la convergence faible dans H.

2. Dans cette question seulement, on suppose que $f_n(x) = x\sin(nx)$, $x \in [0,1]$.

   (i) Démontrer que la suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,1])$.

   (ii) Démontrer que $((f_n)^2)$ converge faiblement dans $L^2([0,1])$ vers une fonction que l'on déterminera. (rappel : $\sin^2(t) = (1-\cos(2t))/2$).

   Dans toute la suite, on considère une suite (f_n) de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers une fonction $f \in L^2([0,1])$.

3. Soit (g_n) une autre suite de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers une fonction $g \in L^2([0,1])$. On suppose que $f_n \leq g_n$ p.p. pour tout n.

   (i) Soit $\phi \in L^2([0,1])$ avec $\phi \geq 0$ p.p. Montrer que
   $$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx \leq \int_0^1 g(x)\phi(x)dx.$$

   (ii) En déduire que $f \leq g$ p.p..

4. Montrer que la suite $(|f_n|)$ est bornée dans $L^2([0,1])$ et en déduire qu'il existe une sous-suite $(|f_{n_k}|)$ qui converge faiblement vers une fonction $g \in L^2([0,1])$.

5. Déduire alors de la question (3) que $|f| \leq g$ p.p.

6. Plus généralement, soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 telle que $(\Psi(f_n))$ est bornée dans $L^2([0,1])$. On suppose que $(\Psi(f_n))$ converge faiblement vers une fonction h dans $L^2([0,1])$.

   (i) Vérifier que, pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, $\Psi(s) \geq \Psi(t) + \Psi'(t)(s-t)$.
   (on pourra utiliser le fait que, comme Ψ est convexe, Ψ' est croissante sur $\mathbb{R}$).

   (ii) En utilisant la question (3), montrer que, si $k \in L^\infty([0,1])$, on a
   $$\Psi'(k(x))(f(x) - k(x)) + \Psi(k(x)) \leq h(x) \qquad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

   (iii) En déduire que $\Psi(f) \leq h$ p.p. (on soignera particulièrement la démonstration).

Exercice 2 (Compacité, Ascoli) Soit C^0 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de C^0 converge *localement uniformément* vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si, pour tout $M > 0$, la restriction à l'intervalle $[-M, M]$ de (f_n) converge uniformément vers f.

1. Montrer que, si une suite (f_n) de C^0 converge localement uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (f_n) la suite de C^0 définie par $f_n(x) := \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (i) Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) := e^x$ et que $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout $x > -n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (ii) Montrer que, pour tout $M > 0$, il existe une constante C_M telle que $|f_n'(x)| \leq C_M$ pour tout $x \in [-M, M]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > M$.

   (iii) Déduire du théorème d'Ascoli que la suite (f_n) converge localement uniformément vers f.

   (iv) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

   (v) Soit $g_n(x) := f_n(x)e^{-2|x|}$. Montrer que $|g_n(x)| \leq e^{-|x|}$ pour tout $x > -N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (vi) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g que l'on déterminera.

   On dit qu'un sous-ensemble E de C^0 est pré-compact si, pour toute suite (f_n) de C^0, il existe une fonction $f \in C^0$ et une suite extraite (f_{n_k}) qui converge localement uniformément f. On dira qu'une suite (f_n) de C^0 est pré-compacte si l'ensemble $E := \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est pré-compact dans C^0.

3. On suppose que l'ensemble E est pré-compact dans C^0. Montrer que l'ensemble $K := \{f(0) \mid f \in E\}$ est un ensemble borné.

4. Soit (f_n) une suite de C^0 telle que, pour tout $M > 0$, la restriction à $[-M, M]$ de la suite (f_n) est pré-compacte dans $C^0([-M, M])$. Montrer alors que la suite (f_n) est pré-compacte.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $|f_n(0)| + |f_n'(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que (f_n) est pré-compacte dans C^0.

Barême indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen de Janvier 2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soient $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, strictement positives sur $[0,1]$. On pose

$$A(u,v) = \int_0^1 \big(a(t)u'(t)v'(t) + b(t)u(t)v(t)\big)dt \qquad \forall u,v \in H^1([0,1]).$$

On rappelle que $A : H^1([0,1]) \times H^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, continue et coercive. On déduit alors du théorème de Lax-Milgram que, pour tout $f \in L^2([0,1])$, il existe un unique élément $u \in H^1([0,1])$ tel que

$$A(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2} \qquad \forall v \in H^1([0,1]).$$

On notera $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ l'application qui à f associe $K(f) := u$.

1. Montrer que K est une application linéaire.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^2([0,1])$, et si on pose $u = K(f)$, alors
$$\|u\|_{H^1} \le C\|f\|_{L^2}.$$
3. En déduire que K est continue et compacte sur $L^2([0,1])$.
4. Montrer que K est auto-adjoint.

   D'après le cours, on sait qu'il existe alors une base de hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ constituée de vecteurs propres de K. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note λ_k la valeur propre associée à e_k.

5. Montrer que
$$\lambda_k = \frac{1}{A(e_k,e_k)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
6. On pose $v_k = \lambda_k^{1/2} e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H^1([0,1])$ lorsque l'on munit $H^1([0,1])$ du produit scalaire A.
7. On suppose que $a(t) = b(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que, si $f \in C^0([0,1])$, alors $u := K(f)$ est de classe $C^2([0,1])$ et vérifie
   $$-u''(t) + u(t) = f(t) \quad \forall t \in [0,1], \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$
   (b) Déterminer alors le spectre de K et démontrer que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$e_0(t) = 1, \qquad e_k(t) = \sqrt{2}\cos(k\pi t) \qquad \forall t \in [0,1],\ k \in \mathbb{N}^*$$
   est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ constituée de vecteurs propres de K.

Exercice 2 On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{\int_0^1 (x'(t))^2 dt \text{ avec } x \in H^1([0,1]),\ \int_0^1 x(t)dt = 0,\ \int_0^1 (x(t))^2 dt = 1\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe $x \in H^1([0,1])$ tel que $\int_0^1 x(t)dt = 0$ et $\int_0^1 (x(t))^2 dt = 1$.

2. (Une inégalité de Poincaré)

   (a) Soit $x \in H^1([0,1])$ avec $\int_0^1 x(t)dt = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $x(c) = 0$ et vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$,
   $$|x(t)| \leq \|x'\|_{L^2} |t-c|^{\frac{1}{2}}.$$

   (b) En déduire que, pour tout $x \in H^1([0,1])$ avec $\int_0^1 x(t)dt = 0$,
   $$\|x\|_{L^2} \leq \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \ \leq \|x'\|_{L^2}.$$

3. Soit (x_n) une suite minimisante pour le problème $(\mathcal{P})$.

   (a) Montrer que (x_n) est bornée dans $H^1([0,1])$ et dans $L^\infty([0,1])$.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution.

4. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ définie par la dernière question de l'exercice 1. Montrer qu'une solution du problème $(\mathcal{P})$ est la fonction e_1.

Barême indicatif : Exercice 1 : 12 points, Exercice 2 : 8 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen de rattrapage du 11/07/2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

Exercice 1 Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive sur $[0,1]$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Rappelons que $H_0^1([0,1])$ est le sous-ensemble fermé de H^1 défini comme l'ensemble des $x \in H^1$ tels que $x(0) = x(1) = 0$. A tout $f \in L^2$, on associe l'unique solution (au sens distribution) $u \in H_0^1$ de

$$-(au')' + bu = f \text{ dans } [0,1], \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

1. Montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram que u est bien défini de façon unique.
2. Montrer que l'application $f \to u$ est linéaire continue de L^2 dans H_0^1.
3. Démontrer que l'application $K : L^2 \to L^2$ qui à f associe $u := K(f)$ est compacte.
4. Vérifier que K est auto-adjoint.

   Un théorème de cours affirme alors que qu'il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de L^2 constituée de vecteurs propres de K. On note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.

5. Montrer que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et que $\lambda_i \to +\infty$ lorsque $i \to +\infty$.
6. On suppose que $a = 1$ et $b = 0$. Déterminer les valeurs propres de K.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à montrer que l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possède une solution. Pour cela, on construit une suite de fonctions continues $x^n : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme suit : soit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On définit par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ la suite réelle (x_k^n) par

$$x_0^n = x_0, \qquad x_{k+1}^n := x_k^n + \frac{1}{n} f(k/n, x_k^n)$$

Puis on pose, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $t \in [k/n, (k+1)/n]$,

$$x^n(t) = (k + 1 - nt)\, x_k^n + (nt - k)\, x_{k+1}^n$$

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $|x_k^n| \le C$.
2. En déduire que $\sup_{t\in[0,1]} |x^n(t)| \le C$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s, t \in [0,1]$,

$$|x^n(t) - x^n(s)| \leq \|f\|_\infty |t-s|$$

(où $\|f\|_\infty = \sup_{(t,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}} |f(t,y)|$).

4. Conclure qu'il existe une fonction continue $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ et une sous-suite (x^{n_k}) de la suite de fonctions (x^n), telles que (x^{n_k}) converge uniformément vers x sur $[0,1]$.

5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$,

$$x^n(t) - x_0 = \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, x^n(\frac{k}{n})\right) \mathbf{1}_{[k/n,(k+1)/n[}(s)ds.$$

où, si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\mathbf{1}_I(s) = 1$ si $s \in I$ et $\mathbf{1}_I(s) = 0$ sinon.

6. En déduire finalement que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$x(t) - x_0 = \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Barême indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Partiel du Vendredi 4 Novembre 2016.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 3 Soit $p \geq 1$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tau_h f(x) = f(x+h) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que (f_n) est une suite dans $L^p(\mathbb{R})$ telle que

(i) (f_n) est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$,

(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $|h| \leq \sigma$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tau_h f_n - f_n\|_{L^p} \leq \epsilon,$$

(iii) Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a son support dans $[0, M]$.

L'objet de l'exercice est de montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ et une suite extraite de (f_n) qui converge vers f.

Pour cela on considère une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, positive sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_\mathbb{R} \phi(x)dx = 1$. Pour $\delta > 0$ on pose $\phi_\delta(x) = \delta^{-1}\phi(x/\delta)$. On rappelle que ϕ_δ a son support dans $[-\delta, \delta]$ et que $\int_\mathbb{R} \phi_\delta(x)dx = 1$. Enfin, on rappelle que, si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution

$$\phi_\delta * f(x) = \int_R \phi_\delta(x-y)f(y)dy = \int_R \phi_\delta(y)f(x-y)dy$$

est bien défini et que $\phi_\delta * f \in L^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité de Jensen que, pour tout $f \in L^p$,
$$|\phi_\delta * f(x) - f(x)|^p \leq \int_\mathbb{R} \phi_\delta(y) \, |f(x-y) - f(x)|^p \, dy.$$
2. En déduire que, si $f \in L^p$,
$$\|\phi_\delta * f - f\|_{L^p}^p \leq \int_\mathbb{R} \phi_\delta(y) \, \|\tau_{-y} f - f\|_{L^p}^p \, dy.$$
3. Montrer alors que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $\delta \in]0, \sigma]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\|\phi_\delta * f_n - f_n\|_{L^p} \leq \epsilon.$$
4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, le support de $\phi_\delta * f_n$ est inclus dans $[-\delta, M + \delta]$.
5. Montrer que, à $\delta > 0$ fixé, la famille $\{\phi_\delta * f_n\}$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$.

6. En déduire que, pour tout $\delta \in]0,1]$, il existe une fonction continue $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une sous-suite $(\phi_\delta * f_{n_k})$ qui converge uniformément vers g_δ dans l'intervalle $[-1, M+1]$.
7. Démontrer qu'en fait il existe une suite extraite (n_k) telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la suite $(\phi_{1/r} * f_{n_k})$ converge uniformément vers une fonction g_r dans l'intervalle $[-1, M+1]$. (On pourra utiliser un résultat du cours)
8. On étend g_r par 0 en dehors de $[-1, M+1]$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $(\phi_{1/r} * f_{n_k})$ converge vers g_r dans $L^p(\mathbb{R})$.
9. Montrer que la suite (g_r) est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R})$. On note f sa limite dans $L^p(\mathbb{R})$.
10. Montrer finalement que la suite (f_{n_k}) converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Il est possible d'étendre la notion de convergence faible aux espaces de Banach. Soit E un Banach, on note E' le dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E. Muni de la norme

$$|||f||| := \sup_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} f(x)$$

c'est aussi un espace de Banach. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$ si, pour tout $f \in E'$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x).$$

1. Montrer que si (x_n) converge fortement vers $x \in E$, alors (x_n) converge faiblement vers x.

   On rappelle le théorème de Banach-Steinhaus: si F et G sont des espace de Banach et si $(T_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'applications linéaires continues de F and G telle que

   $$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_G < +\infty \qquad \forall x \in F,$$

   alors la famille (T_i) est équi-continue : $\sup_{i \in I} |||T_i||| < \infty$.
   On rappelle aussi que, pour tout $x \in E$, on a

   $$\|x\| = \sup\left\{f(x), \qquad \text{où } f \in E',\ |||f||| \leq 1\right\}.$$

2. Démontrer que, si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors la suite (x_n) est bornée.
3. En déduire que, si (x_n) converge faiblement vers x, alors

   $$\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|.$$

4. On suppose que (f_n) converge fortement vers f dans E' et que (x_n) converge faiblement vers x dans E. Montrer que $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$.
5. On pose $E = L^1(]0,1[)$. Rappelons que $E' = L^\infty(]0,1[)$. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = n$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$.
   (i) Montrer que la suite (f_n) est bornée dans E.
   (ii) On suppose qu'il existe $f \in E$ et une sous-suite (f_{n_k}) qui converge faiblement vers f dans E. Démontrer que nécessairement $f = 0$ p.p.
   (iii) Montrer cependant que $\int_0^1 f(x)dx = 1$ et conclure que (f_n) n'admet pas de sous-suite faiblement convergente dans E.

Barême indicatif : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points.

Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle approfondie

Examen du Jeudi 12 Janvier 2017.

Durée 2h.

Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés. Dans les deux exercices, on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 5 Soit $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive sur $[0,1]$. On considère le problème de minimisation

$$\inf \left\{ \int_0^1 u(t)dt \qquad \text{sous contrainte } u \in H_0^1([0,1]),\ \int_0^1 a(t)(u'(t))^2 dt \le 1 \right\}.$$

On note I l'infimum du problème.

1. Soit (u_n) une suite minimisante du problème, c'est-à-dire, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H_0^1([0,1])$, $\int_0^1 a(t)(u_n'(t))^2 dt \le 1$ et $\lim_n \int_0^1 u_n(t)dt = I$.
Montrer que la suite (u_n) est bornée dans $H^1([0,1])$.

2. Soit (v_n) une suite de $L^2([0,1])$ qui converge faiblement vers $v \in L^2([0,1])$. On suppose que $\int_0^1 a(t)(v_n(t))^2 dt \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^1 a(t)\left(2v(t)v_n(t) - (v(t))^2\right) dt \le \int_0^1 a(t)(v_n(t))^2 dt.$$

   (ii) En déduire que $\int_0^1 a(t)(v(t))^2 dt \le 1$.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que le problème admet un minimum.

4. Montrer que I est strictement négatif (on ne cherchera pas à calculer I).

Exercice 6 On considère $H = L^2([0,1])$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, on note $|||T|||$ sa norme. On définit l'application $V : H \to H$ par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H.$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $V \in \mathcal{L}(H)$ et (surtout) de calculer sa norme.

1. Montrer que $V \in \mathcal{L}(H)$.

2. Montrer que V est un opérateur compact (on pourra utiliser le théorème d'Ascoli).

3. On rappelle que l'opérateur adjoint de V est l'opérateur linéaire continu $V^* \in \mathcal{L}(H)$ défini par
$$\langle V^*(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle \qquad \forall f, g \in H.$$
Montrer que
$$V^*(f)(x) = \int_x^1 f(t)dt \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H.$$

4. Vérifier que $\sup\limits_{\|g\|\leq 1} \langle f, g\rangle = \|f\|$ pour tout $f \in H$ et en déduire que
$$|||V||| = |||V^*|||.$$

A partir de maintenant on définit l'opérateur linéaire continu $T \in \mathcal{L}(H)$ par $T = V^* \circ V$.

5. Montrer que T est compact et auto-adjoint.

6. (i) Vérifier que $|||T||| \leq |||V^*|||\ |||V|||$.
   (ii) Vérifier aussi que $\langle T(f), f\rangle = \|V(f)\|^2$ pour tout $f \in H$, et en déduire que $|||V||| \leq |||T|||^{1/2}$.
   (iii) Conclure que $|||V||| = |||T|||^{1/2}$.

7. On pose $M = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} \langle T(f), f\rangle$ et on rappelle que M est une valeur singulière de T. Vérifier que M est la plus grande valeur propre de T et en déduire que $M = |||T|||$.

8. On rappelle que la primitive d'une fonction de $L^2([0,1])$ est une fonction de $H^1([0,1])$. En remarquant que
$$T(f)(x) = \int_x^1 \int_0^y f(t)dtdy \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in H,$$
vérifier que, pour tout $f \in H$, on a $T(f) \in H^1([0,1])$, $T(f)' \in H^1([0,1])$, $T(f)(1) = 0$ et $T(f)'(0) = 0$. Montrer aussi que $(T(f)')' = -f$.

9. Déterminer toutes les valeurs propres de T et en déduire $|||V|||$.

Barême indicatif : Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 14 points.