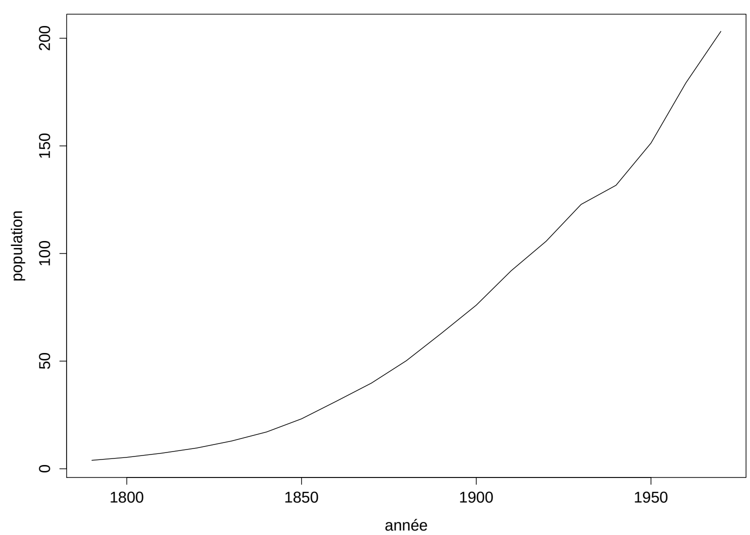
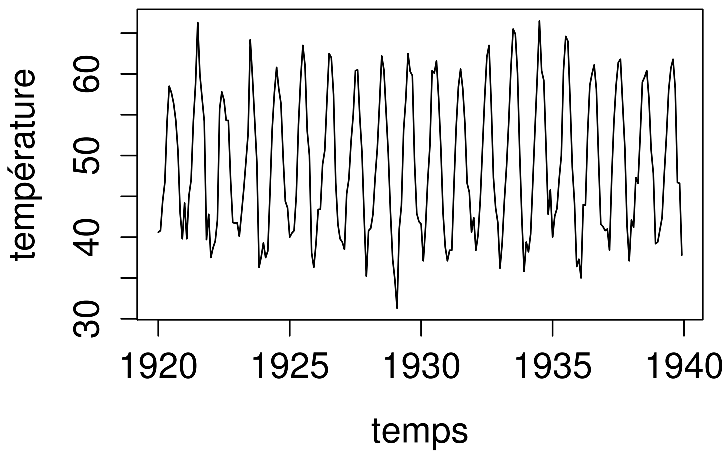
Université Paris Dauphine
2018-2019

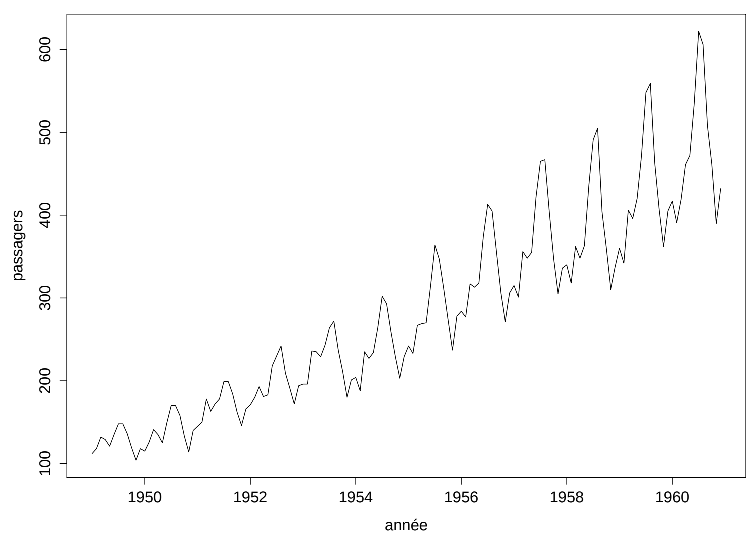
Introduction aux séries temporelles
Feuilles d'exercices

1 Tendance, stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Exercice 1.1 (Quelques exemples) Pensez-vous que les données représentées dans les trois figures suivantes (population des USA, température à Nottingham, nombre de passagers aériens) sont les réalisations de processus stationnaires ?







Pensez-vous qu'une droite horizontale est la réalisation d'un processus stationnaire ? Même question pour une sinusoïde.

Exercice 1.2 (Stationnarité et stationnarité stricte) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X.

1. Montrer que X et Y ont même loi;

2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes;

3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

Exercice 1.3 (Marche aléatoire) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire de dérive μ: $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \geq 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance γ_X de X. Est-ce que X est stationnaire?

2. Le processus $(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire?

Exercice 1.4 (Somme de processus stationnaires) Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires, décorrélés (c'est-à-dire que $\mathrm{cov}(X_t, Y_s) = 0$ pour tous s, t). Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et de Y.

Exercice 1.5 (Stationnarité de processus) Trouver les processus stationnaires parmi les processus suivants:

1. $X_t = Z_t$ si t est pair, et $X_t = Z_t + 1$ si t est impair, avec $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire;

2. $X_t = Z_1 + \cdots + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort;

3. $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in \mathbb{R}$ une constante;

4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort;

5. $Y_t = (-1)^t Z_t$ et $X_t = Y_t + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort.

Exercice 1.6 (Processus harmonique) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2, et où $\theta \in \mathbb{R}$ est une constante. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa fonction d'autocovariance.

Exercice 1.7 (Propriété de la fonction d'autocovariance)

1. Montrer que la fonction d'autocovariance $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ d'un processus stationnaire est paire et de type positif (en fait l'équivalence est vraie mais admise ici);

2. Montrer que la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \rho$ pour $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ sinon, est une fonction d'autocovariance ssi $|\rho| \leq 1/2$. Donner un exemple de processus stationnaire ayant une telle fonction d'autocovariance;

3. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance d'un processus stationnaire ?

   (a) $\gamma(h) = 1$ si $h = 0$ et $\gamma(h) = 1/h$ si $h \neq 0$;

   (b) $\gamma(h) = 1 + \cos(h\pi/2)$;

   (c) $\gamma(h) = (-1)^{|h|}$.

Exercice 1.8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis) On pose

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho & \ldots & \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

1. A quelle condition sur ρ la matrice σ_n est-elle une matrice de covariance pour tout n (indication: décomposer $\sigma_t = \alpha I + A$ où A a un spectre simple à calculer);

2. Construire un processus stationnaire de matrices d'autocovariance $(\sigma_n)_{n\geq 1}$

Exercice 1.9 (Estimation de tendance et de saisonnalité) On considère le processus modélisé par $Y_t = \beta t + s_t + U_t$ où $\beta \in \mathbb{R}$, où s_t est une fonction périodique de période 4, et où $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire?

2. Montrer que $Z = (1 - B^4)Y$ est stationnaire et calculer son autocovariance en fonction de celle de U.

Exercice 1.10 (Tendance) Soit X un processus avec tendance polynomiale d'ordre k:

$$X_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i + U_t,$$

où les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{R}$ et (U_t) est un processus stationnaire.

1. Montrer que le processus obtenu par l'application de $(1-B)$ à (X_t), où B désigne l'opérateur retard, admet une tendance polynomiale d'ordre $k-1$. Que se passe-t-il si on applique $(1-B)^p$ à (X_t) pour $p \in \mathbb{N}$?

2. On considère maintenant le processus $Y_t = X_t + S_t$ où S_t est une fonction d-périodique. Comment rendre le processus (Y_t) stationnaire?

2 Filtrage

Exercice 2.1 (Filtrage) On veut montrer la proposition suivante: si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire, et si $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels absolument sommables c'est-à-dire que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty$, alors $Y_t = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=-n}^{m} a_i X_{t-i}$ définit un nouveau processus stationnaire. Ceci nécessite de préciser en quel sens est prise la limite.

1. Montrer que $Y_t \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En déduire que Y_t est bien défini p.s.;

2. Montrer que $Y_t \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$;

3. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire tel que:

$$\mathbb{E}(Y) = \mu_Y = \mu_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i, \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h + j - i).$$

   En déduire la preuve de la proposition exprimée au départ.

Exercice 2.2 (Géométrique et processus MA) Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un $BB(0, \sigma^2)$ et, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}).$$

1. Discuter selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$;

2. Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire (Y_t) tel que

$$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to\infty]{L^2} 0.$$

Exercice 2.3 (Processus AR) On recherche un processus (X_t) solution de l'équation d'autorégression $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Lorsque $|\phi| < 1$, montrer qu'il existe une unique solution stationnaire;

2. A partir de cette solution stationnaire, montrer qu'il est possible de construire une infinité de solutions non-stationnaires;

3. Dans le cas où $|\phi| > 1$, montrer l'existence d'une unique solution stationnaire à cette équation. Cette solution est-elle causale ?

4. Lorsque $|\phi| = 1$, montrer qu'il ne peut pas exister de solution stationnaire.

Exercice 2.4 (Filtre gaussien) Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible, c'est-à-dire des variables aléatoires centrées, réduites, et décorrelées, et $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire $X_t := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est bien définie dans L^2 et est de variance $\|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. Montrer que si de plus $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus gaussien alors $X_t \sim \mathcal{N}(0, \|\alpha\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})})$.

Exercice 2.5 (Filtre à queues lourdes) 1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est α-**stable** lorsque pour tout entier $n \geq 1$ et toutes variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi μ, la variable aléatoire $n^{-1/\alpha}(X_1 + \cdots + X_n)$ est également de loi μ. Montrer que les lois gaussiennes centrées sont 2-stables et que les lois de Cauchy sont 1-stables;

2. Montrer que si X_1 est une v.a.r. telle qu'il existe des réels $c, \alpha > 0$ tels que $\Phi_X(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \mathrm{e}^{-c|t|^\alpha}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors la loi de X_1 est α-stable. On note $\mu_{\alpha,c}$ sa loi. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes de lois $\mu_{\alpha,c_1}, \ldots, \mu_{\alpha,c_n}$ alors pour tous $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n$ suit la loi $\mu_{\alpha,|\beta_1|^\alpha c_1 + \cdots + |\beta_n|^\alpha c_n}$;

3. Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de même loi $\mu_{\alpha,c}$ avec $c > 0$ et $\alpha \geq 1$. Montrer que pour tout $\eta \in \ell^\alpha(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{Z}$, il fait sens de dire que $F_\eta Z_t := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_k Z_{t-k}$ suit la loi $\mu_{\alpha,c\|\eta\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}}$. Que se passe-t-il pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$? Peut-on définir le filtre $(F_\eta Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en tant que processus stationnaire ?

Exercice 2.6 (Filtre de Kalman-Bucy)
(Tiré des petites classes de l'Ecole Polytechnique)

1. Montrer que si $(X, Z, Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$\mathrm{Loi}(X \mid Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi}(Z \mid X, Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(X, \delta^2)$$

alors

$$\mathrm{Loi}(X \mid Z, Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}\left(\rho^2\left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Z}{\delta^2}\right), \rho^2\right) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2};$$

2. Un mobile se déplace sur $\mathbb{R}$ avec un mouvement théoriquement perturbé défini par

$$X_0 = 0, \quad X_n = a + X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. L'observation du mobile est entachée d'erreur:

$$Y_n = X_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

où $(\eta_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$, indépendantes de $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Notre objectif est de construire la meilleure estimation de X_n étant donnée l'information $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ associée aux observations, ainsi que l'erreur associée à cette estimation:

$$\hat{X}_n := \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n), \quad \rho_n^2 := \mathbb{E}((X_n - \hat{X}_n)^2 | \mathcal{F}_n).$$

   (a) Déterminer la loi conditionnelle $\mathrm{Loi}(X_1 \mid Y_1)$ et en déduire $\hat{X}_1$ et ρ_1;

   (b) Montrer que $\mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_{n-1}, \rho_{n-1}^2)$;

   (c) En déduire les lois conditionnelles $\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ et $\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_n)$;

   (d) En déduire que

$$\hat{X}_n = \rho_n^2 \left(\frac{a + \hat{X}_{n-1}}{\sigma^2 + \rho_{n-1}^2} + \frac{Y_n}{\alpha^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_n^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\sigma^2 + \rho_{n-1}^2}.$$

Exercice 2.7 (Filtre de Kalman-Bucy multivarié)
(Tiré de Pardoux (2008) § 5.5.2)
On s'intéresse à la trajectoire à temps discret d'un point mobile dans $\mathbb{R}^d$, modélisée par une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$. On dispose d'observations instrumentales bruitées modélisées par une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$. On modélise la loi de ces suites en utilisant les équations de récurrence linéaires de premier ordre suivantes:

$$X_n = AX_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad Y_n = HX_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

où les matrices $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ sont déterministes, les vecteurs aléatoires $X_0, \varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_2, \ldots$ sont mutuellement indépendants, avec $X_0 \sim \mathcal{N}(m_0, P_0)$, et, pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $\eta_n \sim \mathcal{N}(0, R)$, avec R inversible (donc symétrique définie positive).

1. Complément de Schur en algèbre linéaire: dans une matrice par blocs

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \text{ avec } D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ inversible}$$

on appelle complément de Schur du bloc D la matrice $S := A - BD^{-1}C$. En utilisant

$$L := \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix},$$

montrer que M est inversible si et seulement si S est inversible. En utilisant

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

montrer que lorsque M est symétrique alors M est définie positive si et seulement si le bloc D et son complément de Schur S le sont;

2. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right)$$

est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^{d+k}$ avec Σ_{22} inversible alors

$$\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma})$$

où

$$\hat{X} := \bar{X} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}) \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma} := \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

3. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si $(X, Y, Z)^\top$ est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^{d+k+\ell}$ avec Y et Z indépendants alors

$$\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi}(X \mid Y, Z) = \mathcal{N}(\hat{\hat{X}}, \hat{\hat{\Sigma}})$$

où $\hat{X}$ et $\hat{\Sigma}$ sont comme dans la question précédente, et où, en notant $\bar{X} := \mathbb{E}(X)$,

$$\hat{\hat{X}} := \hat{X} + \mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z) \quad \text{et} \quad \hat{\hat{\Sigma}} := \hat{\Sigma} - \mathrm{Cov}(\mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z)).$$

4. Filtrage: montrer que $\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_1, \ldots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \Lambda_n)$ pour tout $n \geq 1$, où les suites $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ et $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ vérifient les équations de récurrence

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1}(Y_{n+1} - HA\hat{X}_n) \\ \Lambda_{n+1} &= \Sigma_n - \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1} H\Sigma_n \end{aligned}$$

   où $\Sigma_n := A\Lambda_n A^\top + Q$, avec les conditions initiales $\hat{X}_0 = m_0$ et $\Lambda_0 = P_0$;

5. La méthode est-elle utilisable si $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n)_{n\geq 1}$ ne sont plus stationnaires ?

3 Equations et processus ARMA

Exercice 3.1 (ARMAda ou ARMArtial) Soit (Z_t) un bruit blanc. Pour chacune des équations suivantes, existe-t-il un processus stationnaire (X_t) solution?

1. $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$;
2. $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$;
3. $X_t + 0.6X_{t-2} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$;
4. $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$.

Exercice 3.2 (ARMA$(1,1)$) On considère l'équation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et ϕ et θ sont des réels.

1. On suppose dans un premier temps que $|\phi| \neq 1$ et $|\theta| \neq 1$.
   (a) Existe-t'il un processus (X_t) stationnaire solution de l'équation ci-dessus?
   (b) Si oui, donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$ (en précisant la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$). En quel sens la somme précédente converge-t'elle ?
   (c) A quelles conditions cette solution est-elle causale ? inversible ?
   (d) Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t).
2. Que se passe-t'il si $|\varphi| = 1$ ou $|\theta| = 1$?

Exercice 3.3 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017) Soit $Z \sim BB(0, \sigma^2)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation ARMA$(1,2)$

   $$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

   et montrer qu'il existe une unique solution stationnaire;
2. Cette solution est-elle causale ? Est-ce que Φ s'annule sur le disque unité ?

3. Calculer explicitement cette solution en fonction de Z;

4. Cette solution est-elle inversible ?

Exercice 3.4 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017) Soit $p \geq 1$ un entier et $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation AR(p) $X_t - X_{t-p} = Z_t$. Est-ce que Φ s'annule sur le cercle unité ? Peut-on en déduire que l'équation n'a pas de solution ?

2. Démontrer par l'absurde que l'équation n'a pas de solution stationnaire.

Exercice 3.5 (Produit d'ARMA) On considère (X_t) et (Y_t) deux processus centrés et indépendants *i.e.* X_t et Y_s sont indépendants pour tous t, s. On définit le processus (Z_t) par $Z_t = X_t Y_t$. Soient (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs. On suppose que (X_t) et (Y_t) sont des ARMA(1,1) de paramètres respectifs ϕ_1, θ_1 et ϕ_2, θ_2 et de bruits blancs respectifs $(\epsilon_t), (\eta_t)$.

1. A quelles conditions peut-on écrire $X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \epsilon_{t-j}$ et $Y_t = \sum_{j \geq 0} \widetilde{\psi}_j \eta_{t-j}$? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite;

2. A quelles conditions X et Y sont inversibles?
   Supposons ces conditions vérifiées dans la suite;

3. Montrer que les processus (ϵ_t) et (η_t) sont décorrélés;

4. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus (Z_t).

Exercice 3.6 (ARMA(2,1)) On considère le processus (X_t) solution de

$$(1 - B + B^2/4)X_t = (1 + B)Z_t,$$

où (Z_t) est un bruit blan de variance σ^2.

1. Montrer que l'on peut écrire X_t sous la forme $X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k Z_{t-k}$.

2. Calculer les coefficients $(\psi_k)_{k \geq 0}$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $h \neq 0$,

$$\gamma_X(h) = \frac{\alpha h + \beta}{4^{|h|}}.$$

Exercice 3.7 (Solution MA(1) d'une équation AR(∞) à filtre exponentiel) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$ et soit $\varphi_k = -\lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit Z un $BB(0, \sigma^2)$. Montrer que processus MA(1) $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$ est solution de l'équation AR(∞)

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}.$$

Notons qu'en quelque sorte, dans cette équation AR(∞), on a $\Theta(z) = 1$, tandis que $\Phi(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1 - \lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme. L'équation $\Phi(z) = 0$ en z n'a pas de solution. La formule $\Theta(z)/\Phi(z) = 1 - \lambda z$ suggère bien que le processus linéaire $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de l'équation AR(∞). Nous savions qu'un AR(1) causal est un MA(∞). Nous avons le cas dual ici: un AR(∞) causal est un MA(1). Plus généralement, l'analyse des ARMA(∞, ∞) peut être menée en étudiant les inverses des suites sommables à support infini, ce qui conduit à utiliser des outils d'analyse complexe comme les fonctions méromorphes et les séries de Laurent.

Exercice 3.8 (Processus stationnaires vectoriels)
(Tiré de l'examen final 2015-2016)
Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ et tous $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ on a

$$\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}.$$

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2\to 2} := \max_{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation AR(1) vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir;

2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

4 Mesure et densité spectrales

Sauf mention explicite du contraire, les suites et les coefficients sont réels.

Exercice 4.1 (Processus AR(1)) Soit (X_t) une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où $(Z_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ avec $|\varphi| \neq 1$.

1. Calculer la densité spectrale de X;

2. Montrer qu'il existe un processus stationnaire $\widetilde{X}$ de même autocovariance que X, solution de l'équation AR(1) $\widetilde{X}_t = \phi^{-1}\widetilde{X}_{t-1} + Z'_t$, où $(Z'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit à préciser. Quelle est sa densité spectrale? Que se passe-t-il si Z et Z' sont gaussiens ?

Exercice 4.2 (Herglotz) Démontrer en utilisant le théorème de Herglotz que la fonction

$$h \in \mathbb{Z} \mapsto \rho(h) := \mathbf{1}_{h=0} + \alpha \mathbf{1}_{|h|=1} \in \mathbb{R},$$

est une fonction d'autocovariance si et seulement si $|\alpha| \leq 1/2$.

Exercice 4.3 (Somme) Soient (X_t) et (Y_t) deux processus stationnaires, centrés et indépendants.

1. Justifier la stationnarité du processus $S_t := X_t + Y_t$;

2. Calculer la mesure (et la densité le cas échéant) spectrale de S en fonction de celles de X et Y;

3. Montrer que le processus $Z_t := X_t Y_t$ est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance;

4. On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g supposées 2π-périodiques est défini par

$$f \star g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(x-u) du.$$

   On suppose que $\gamma_X \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ et $\gamma_Y \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$. Calculer $f_X \star f_Y$ et en déduire f_Z.

Exercice 4.4 (Harmonique) Soit (X_t) le processus défini par

$$X_t := A\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + Y_t,$$

où A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, et de variance σ^2 et où Y est un processus stationnaire indépendants de A et B.

1. Calculer la fonction d'autocovariance et la mesure spectrale de X lorsque Y est un bruit blanc de variance σ_Y^2. Indication: masses de Dirac.

2. Même question quand Y est un MA(1) de paramètre θ.

Exercice 4.5 (Bestiaire) Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent être des densités spectrales ?

1. $f(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$.

2. $f(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2}$.

3. $f(\lambda) = 476 + \cos(14\lambda)$.

Exercice 4.6 (Bande) Soit un processus stationnaire Y de densité spectrale $f(\lambda)$ t.q.

$$0 \leq m \leq f(\lambda) \leq M < +\infty.$$

Pour $n \geq 1$ on note γ_n la matrice de covariance de $(Y_1, ..., Y_n)$. Montrer que les valeurs propres de γ_n sont dans un intervalle dont on précisera les bornes.

5 Prédiction

Exercice 5.1 (Processus déterministes) 1. Montrer que pour tout processus du second ordre $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes (on dit alors que le processus est déterministe):

   (a) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t \in H_{t-1} := \overline{\mathrm{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}}$;

   (b) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, dans L^2, $X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})$.

2. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

   (a) X est déterministe;

   (b) il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;

   (c) pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;

3. Montrer qu'un processus harmonique est toujours déterministe;

4. Donner un exemple de processus non déterministe.

Exercice 5.2 (Lissage exponentiel) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. On veut prédire la valeur X_{n+1} située dans le futur de la série observée $X_1, \ldots, X_n$.

1. Considérons l'estimateur des moindres carrés pondérés

$$\arg\min_{a\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)^2$$

   où λ est un réel fixé tel que $0 < \lambda < 1$, qui joue le rôle de paramètre de lissage[1]. Montrer que cet estimateur des moindres carrés pondérés vaut

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}.$$

2. En pratique on utilise une formule approchée plus simple basée sur le fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} = 1 - \lambda$. Montrer que l'**estimateur de lissage exponentiel simple**

$$\hat{X}_n := (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}$$

[1] Les poids affectés à $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1$ sont décroissants $1 = \lambda^0, \ldots, \lambda^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

vérifie l'agréable formule de mise à jour récursive suivante:

$$\hat{X}_{n+1} = \lambda \hat{X}_n + (1-\lambda) X_{n+1} = \hat{X}_n + \underbrace{(1-\lambda)(X_{n+1} - \hat{X}_n)}_{\text{innovation}}.$$

3. Montrer la formule du **lissage exponentiel double**:

$$\hat{\hat{X}}_n = (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\lambda^k X_{n-k} = (1-\lambda)\hat{X}_n + (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k\lambda^k X_{n-k}.$$

Exercice 5.3 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance) On souhaite démontrer la propriété suivante : si $(\gamma_n)_{n\geq 1} = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$ sont les matrices d'autocovariance d'un processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'autocovariance γ telle que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to \infty$, alors γ_n est inversible pour tout n. Supposons donc qu'il existe $r \geq 1$ tel que γ_r soit inversible et γ_{r+1} soit singulière.

1. Montrer que pour tout $n \geq r+1$, il existe $b^{(n)} \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$X_n = \sum_{j=1}^{r} b_j^{(n)} X_j;$$

2. Montrer que les b_j sont uniformément bornés;

3. Conclure lorsque $\gamma(0) > 0$ et $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$.

Exercice 5.4 (Prédiction de processus autorégressifs) Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré et $H_n = \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$. On rappelle que le prédicteur à un pas $\hat{X}_{n+1}$ est défini par $\hat{X}_{n+1} = 0$ si $n = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n+1} = \varphi_{n,1} X_n + \cdots + \varphi_{n,n} X_1,$$

où les $\varphi_{n,i}$ vérifient les équations dites de Yule-Walker

$$\Gamma_n \varphi_n = \gamma_n$$

avec $\Gamma_n = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$, $\gamma_n = (\gamma(1), \ldots, \gamma(n))^\top$, et $\varphi_n = (\varphi_{n,1}, \ldots, \varphi_{n,n})^\top$.

1. Montrer que, si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus causal d'un bruit blanc Z, alors

$$\mathrm{Cov}(X_j, Z_k) = 0 \text{ pour tout } k > j.$$

2. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(1) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} = Z_t$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. Montrer de faÃ§on plus générale que $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n$ pour tout $n \geq 1$

3. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(2) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$

4. Lorsque $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un AR(p) causal, montrer que pour tout $n \geq p$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_{n-1} + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}$.

Exercice 5.5 (Prédiction de processus ARMA) Soient $\mathcal{M}_n = \overline{\mathrm{vect}(X_j : -\infty < j \leq n)}$ et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p,q) causal et inversible satisfaisant : $\Phi(B)X = \theta(B)Z$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. On pose : $\tilde{X}_t = \mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n} X_t$.

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a

$$\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j},$$

où $\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\theta(z)}$ et $\sum_{j\geq 0} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\Phi(z)} q$, $|z| \leq 1$. De plus, montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2;$$

2. Calculer $\tilde{X}_{n+1}$ pour un AR(p) causal et un MA(1) inversible.

Exercice 5.6 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations) On rappelle ci-dessous l'algorithme des innovations. Celui-ci est lié à l'algorithme de Gram-Schmidt et peut s'appliquer à un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non-stationnaire. On suppose que ce processus est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance

$$\kappa(i,j) = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

Rappelons que $\mathcal{H}_n = \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$ et $v_n = \left\| X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \right\|^2$. On a, en posant $\hat{X}_1 = 0$,

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{vect}(X_1 - \hat{X}_1, X_2 - \hat{X}_2, \ldots, X_n - \hat{X}_n), \text{ pour tout } n \geq 1$$

de telle sorte que

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j} \right).$$

L'algorithme des innovations est une méthode récursive de calcul de $(\theta_{n,j})_{1 \leq j \leq n}$ et v_n:

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 & = \kappa(1,1); \\ \theta_{n,n-k} & = v_k^{-1} \Big(\kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \\ v_n & = \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{cases}$$

Proposer une faÃ§on de prédire un MA(1) en utilisant l'algorithme des innovations.

6 Estimation

Exercice 6.1 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance) Soit $Y_t = \theta + X_t$, où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$ et les Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{loi}}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$

2. On choisit $\phi = 0.6$ et $\sigma^2 = 2$. Lorsqu'on observe $n = 100$ valeurs, on obtient $\widehat{\theta}_n = 0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta = 0$?

3. On propose un autre estimateur de θ défini par $\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)}$ où $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$, $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)^\top$ et γ_n est la matrice de covariance de $Y^{(n)}$. Justifier le choix de cet estimateur;

4. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n)$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 6.2 (Comparaison de différents estimateurs dans le cas d'un MA(1)) Soit un processus MA(1) défini par $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $|\theta| < 1$ et (Z_t) est un bruit blanc.

1. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ de θ en utilisant la méthode des moments (c'est-à-dire en utilisant un estimateur de la fonction d'autocorrélation);

2. Donner le comportement asymptotique de $\widehat{\rho}(1)$;

3. En déduire le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$;

4. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ obtenu en utilisant l'algorithme des innovations dont on admettra qu'il satisfait:

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{loi}}} \mathcal{N}(0, 1);$$

5. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(3)}$ obtenu obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance dont on admettra qu'il satisfait:

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(3)} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1-\theta^2).$$

- Auteurs principaux des exercices et solutions:
  - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2017)
  - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles:
  - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
  - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
  - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2017)
  - Angelina Roche (enseignante Paris-Dauphine, 2017–2018)
  - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–2017)