Université Paris Dauphine
Master 1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

TD 1. Espaces de Hilbert et l'intégration.

Exercice 1. *Applications bilinéaires.* Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue telle que $a(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in H$. Montrer que l'application $Q(x) := a(x,x)$ est convexe et de classe C^1 sur H et calculer sa différentielle.

Exercice 2. *Applications bilinéaires.* Soit $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, doté de la norme de $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$, si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Montrer que l'application $a : F \times F \to \mathbb{R}$ définie par $a(x,y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ est bien définie, est bilinéaire et séparément continue pour chacune des deux variables (i.e. à x fixé $y \mapsto a(x,y)$ et à y fixé $x \mapsto a(x,y)$ sont continues), mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 3. *Projection dans ℓ^2.* On considère l'espace ℓ^2 des suites réelles de carrés sommables. On notera un élément de ℓ^2 (donc une suite de réels) u ou (u_n). On désignera par u_n sans parenthèse le n-ième terme de la suite u. On rappelle que l'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire : $\forall u, v \in \ell^2$, $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. On rappelle également que ℓ^2 peut être muni de la base hilbertienne $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la suite $e^k = (e^k_n)$ a pour terme général $e^k_n = \delta_{kn}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application
$$\begin{cases} \ell^2 \to \mathbb{R}, \\ u \mapsto u_n, \end{cases}$$
est une forme linéaire continue.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble
$$A_n := \{u \in \ell^2 \ / \ u_n \geq 0\},$$
est un fermé de ℓ^2. En déduire que
$$\mathcal{C} := \{u \in \ell^2 \ / \ \forall i \in \{0, \dots, 10\},\ u_i \geq 0\},$$
est un convexe fermé de ℓ^2.

3. Pour x un réel, on note $x^+ = \max(x, 0)$. Soit T l'application qui à $u \in \ell^2$ associe la suite $\tilde{u}$ de terme général :
$$\tilde{u}_n = u_n^+ \text{ pour } n \leq 10 \text{ et } \tilde{u}_n = u_n \text{ pour } n > 10.$$
Montrer que pour tout $u \in \ell^2$, $\tilde{u} \in \ell^2$. L'application $T : \ell^2 \to \ell^2$ est-elle linéaire ?

4. Montrer que pour tout $u \in \ell^2$, le projeté de u sur $\mathcal{C}$ est $T(u)$.

Exercice 4. *Somme d'espaces vectoriels dans des espaces de Hilbert.*

1. Soit H un espace de Hilbert, et M et N deux sous-espaces fermés de H, orthogonaux entre eux. On rappelle la notation

$$M + N := \{u + v \text{ lorsque } u \text{ parcourt } M \text{ et } v \text{ parcourt } N\}.$$

   a. Montrer que tout élément x de $M + N$ s'écrit **de manière unique** sous la forme

$$x = u + v,$$

   avec $u \in M$ et $v \in N$.

   b. Soit (x_n) une suite d'éléments de $M + N$, qui converge vers x dans H. Pour chaque n, on note $u_n \in M$ et $v_n \in \mathbb{N}$ les uniques élements de M et N respectivement tels que $x_n = u_n + v_n$ (grâce à la question précédente). Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

   c. En déduire que $M + N$ est fermé dans H.

2. Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On introduit

$$M := \{e_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp} \text{ et } N := \{e_{2n} - (2n + 2)e_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}.$$

   (a) Justifier rapidement que M et N sont des sous-espaces fermés de H.

   (b) Soit x une combinaison linéaire (sous entendu : finie !) des vecteurs e_n. Montrer qu'il existe $u \in M$ et $v \in N$ tels que

$$x = u + v.$$

   On pourra chercher u et v sous la forme de combinaisons linéaires des e_n, et commencer par déterminer les termes correspondant à indice impair pour v.

   (c) En déduire que $M + N$ est dense dans H.

   (d) Le vecteur

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} e_n,$$

   appartient-il à $M + N$?

   (e) En déduire que $M + N$ n'est pas fermé dans H.

Exercice 5. *Convergence dans des espaces de Hilbert.*

Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite d'éléments de H. On suppose qu'il existe $x \in H$ tel que

i) $||x_n|| \to ||x||$ quand $n \to \infty$,

ii) pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ quand $n \to \infty$.

Montrer alors que x_n converge vers x dans H.

Exercice 6. *Espaces ℓ^p.*

Soit $p \geq 1$. On définit les espaces de suites réelles ℓ^p, ℓ^∞et c_0 par

$$\ell^p = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty\Big\},$$
$$\ell^\infty = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\},$$
$$c_0 = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, |x_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0\Big\}.$$

On rappelle que tous ces espaces, munis de leur norme canonique (en particulier, la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour l'espace c_0), sont des espaces de Banach.

1. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pour quelles valeurs de α la suite $\big(u_n^{(\alpha)}\big)_{n\geq 1}$ appartient-elle à l'espace ℓ^p ?

2. Soit $1 < p < q < +\infty$, et $\mathcal{D}$ l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang :

$$\mathcal{D} := \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = 0\Big\}.$$

a. Montrer les inclusions

$$\mathcal{D} \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty.$$

b. L'une de ces inclusions est-elle une égalité ?

c. Montrer que

$$\bigcap_{p>1} \ell^p \neq \ell^1 \text{ et } \bigcup_{p\geq 1} \ell^p \neq c_0.$$

3. Soit $1 \leq p < +\infty$.

a. Déterminer l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ de l'espace $\mathcal{D}$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_p$, et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

b. Soit $p < q < \infty$. Quelle est l'adhérence de l'espace ℓ^p dans l'espace ℓ^q ?

c. Quelle est l'adhérence de l'espace c_0 dans l'espace ℓ^∞ ?

Exercice 7. *Densité dans les espaces de Hilbert.*

Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, et $V = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0\}$. On rappelle que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ désigne les fonctions C^∞ à support compact (i.e. nulles en dehors d'un compact), que $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel et que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

a. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 1$. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \phi_n(t) = \frac{1}{n}\phi\Big(\frac{t}{n}\Big).$$

(i) Montrer que

$$\phi_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ dans } H.$$

(ii) Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$h = g - \Big(\int_{\mathbb{R}} g(t)dt\Big)\phi_n.$$

Montrer que la fonction h appartient au sous-espace V.

b. En déduire que

$$V^\perp \subset C_c^\infty(\mathbb{R})^\perp.$$

c. Conclure que le sous-espace V est dense dans H.

Exercice 8. Soit $L^2_{\text{pér}}$, l'ensemble des fonctions mesurables, 2π-périodiques et de carré intégrable sur $[-\pi,\pi]$. On rappelle que $L^2_{\text{pér}}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g)\in (L^2_{\text{pér}})^2, < f,g >_{L^2_{\text{pér}}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

et que le sous-espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2_{\text{pér}}(\mathbb{R})$.

1. Soit $V := \left\{ f\in L^2_{\text{pér}}, \text{p.p.t.} x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)\right\}$, le sous-espace des fonctions paires de $L^2_{\text{pér}}$.
a. Montrer que V est un sous-espace fermé de $L^2_{\text{pér}}$.
b. En déduire que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< \, , \, >_{L^2_{\text{pér}}}$.

2. Soit $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times[-\pi,\pi], f_n(x)=\sqrt{2}\cos(2^n x)$.
a. Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de V.
b. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base hilbertienne de V.

3. Soit $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times[-\pi,\pi], e_n(x)=\sqrt{2}\cos(nx)$.
a. Vérifier que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de V.
b. Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}\cap V$ est dense dans V.
Indication. On pourra utiliser le fait que la partie paire d'une fonction f est égale à la fonction $x\mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
c. En déduire que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de V.

Exercice 9. *Système de Hermite.*

1.a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_n à coefficients réels tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}.$$

b. Calculer le coefficient de plus haut degré de H_n.

2. Soit $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}, \phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n\sqrt{\pi}n!}}H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
a. Montrer que la fonction ϕ_n appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ quel que soit l'entier n.
b. Calculer les produits scalaires $< \phi_n,\phi_m >_{L^2}$ pour tout couple d'entiers (n,m).
c. En déduire que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

3.a. Soit $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}, P_n^{\xi}(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{(-i\xi x)^k}{k!}.$$

Montrer que

(i) $\forall x\in\mathbb{R}, P_n^{\xi}(x) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} e^{-i\xi x}$,

(ii) $\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}, |P_n^{\xi}(x)|\le e^{|\xi x|}$.

b. Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall n\in\mathbb{N}, < \phi_n, f >_{L^2(\mathbb{R})} = 0$.
(i) Soit $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)$. Montrer que g appartient à $L^1(\mathbb{R})$.
(ii) Montrer que

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}g(x)dx = 0.$$

Indication. On pourra calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}} P_n^{\xi}(x)g(x)dx$.
(iii) En déduire que f est identiquement nulle.
c. Conclure que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 10. *Polynômes de Laguerre.*
Soit $H = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} / \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x}dx < +\infty\}$. On admet que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in H^2, < f,g >= \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx.$$

1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_n à coefficients réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}(x^n e^{-x}) = n! L_n(x) e^{-x}.$$

b. Calculer le degré, ainsi que le coefficient de plus haut degré de L_n.
c. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique de $\mathbb{C}[X]$.

2.a. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer le produit scalaire $< L_n, L_m >$.
b. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de H.
c. Conclure que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
Indication. On pourra admettre la densité du sous-espace des fonctions polynomiales dans l'espace H.

Exercice 11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit $1 \leq p \leq r \leq q \leq +\infty$ et $\alpha \in [0,1]$ défini par $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$. Montrer que

$$\forall f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega), \|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

2. *Application.* Soit $p < q$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ telle que

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^q(\Omega)$,

(ii) $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ dans $L^p(\Omega)$.

a. Montrer, à l'aide du lemme de Fatou, que la fonction f appartient à $L^q(\Omega)$.
b. Soit $p \leq r < q$. En déduire que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f \text{ dans } L^r(\Omega).$$

Exercice 12. (Dualité sur les espaces L^p dans le cas $p \in [1,2]$). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. Montrer que si $T \in L^2(\Omega)'$, alors il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que $T(\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx$ pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$. *(On rappelle que si X est un espace vectoriel normé, on note $X' = \mathcal{L}_c(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues sur X).*

2. Montrer que, étant donné $f \in L^{p'}(\Omega)$, l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi dx$ définit une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$.
Le but de la suite de l'exercice est d'établir une réciproque à cette question. Soit $T \in (L^p(\Omega))'$.

3. Montrer qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que $T(\varphi) = \int f\varphi dx$ pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$.

4. Montrer que la fonction f obtenue appartient à $L^{p'}(\Omega)$ (distinguer $p = 1$ et $p > 1$).

5. Montrer que $T(\varphi) = \int f\varphi dx$ pour tout $\varphi \in L^p(\Omega)$.

Exercice 13. *Version L^p du théorème de convergence dominée.*
Soit $1 \leq p < +\infty$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g \in L^p(\Omega)$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que

(i) $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ p.p. sur Ω,

(ii) $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\Omega, |f_n(x)| \leq g(x)$.

a. Que peut-on en conclure lorsque $p = 1$?
b. On suppose que $p > 1$.
(i) Montrer que f appartient à $L^p(\Omega)$.
(ii) Prouver que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |a-b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

(iii) Conclure que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

c. Cette conclusion demeurerait-elle vraie si l'on supposait que $p = +\infty$?
2. *Application.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des suites de $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ respectivement telles que

(i) $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ dans $L^p(\Omega)$,

(ii) $g_n \underset{n\to+\infty}{\to} g$ p.p.,

(iii) $\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|g_n\|_\infty \leq C$.

a. Prouver à l'aide de la question 1. que

$$(g_n - g)f \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ dans } L^p(\Omega).$$

b. En déduire que

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\to} fg \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Exercice 14. Soit $L^1_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ à support compact.
1.a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} -n \leq x \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$.
b. En déduire que $L^1_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.
2.a. Soit $f \in L^1_c(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big|f(x+t) - f(t)\Big| dt \underset{x\to+\infty}{\to} 2\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt.$$

b. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Quelle est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| f(x+t) - f(t) \Big| dt \ ?$$

Exercice 15. *Produit de convolution L^p-$L^{p'}$.*

1.a. Soit $1 \leq p < +\infty$, et F, une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. On note

$$\forall h \in \mathbb{R}, \tau_h F(.) = F(. + h).$$

Montrer que si F est continue à support compact, alors,

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h F - F\|_p = 0.$$

b. étendre ce résultat à $F \in L^p(\mathbb{R})$.

2. *Application.* Soit $1 < p' \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$.
a. établir que le produit de convolution $f * g$ définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, qui vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

b. Montrer que $f * g$ est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. *Produit de convolution et régularisation.*

1. Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})^2$.
a. Montrer que le produit de convolution $f * g$ définit presque partout une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, qui vérifie

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Indication. On pourra utiliser le théoréme de Fubini pour la fonction $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$.
b. On suppose de plus que g appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. *Application.* Soit $\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$. étant donné $\varepsilon > 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

a. Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \delta_\varepsilon - f\|_1 = 0.$$

Indication. On pourra utiliser l'uniforme continuité de la fonction f.
b. En déduire que $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.