Université Paris Dauphine
M1 MMD
Analyse fonctionnelle et EDP

TD 2. Espaces de Sobolev et théorème de Lax-Milgram

Exercice 1.

1. Soit $I =]-1, 1[$. Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $W^{1,2}(I)$?

(i) $a(x) = |x|$, (ii) $b(x) = 0$, si $x \leq 0$, 1, sinon, (iii) $c(x) = x^\alpha$ si $x \geq 0$, 0 sinon, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soit $I =]0, 1[$, et $1 \leq p \leq +\infty$. Pour quelles valeurs de p, les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace $W^{1,p}(I)$?

(i) $d(x) = |2x - 1|$, (ii) $e(x) = x^\beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$, (iii) $f(x) = |\ln(x)|^\gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Montrer que, si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ existe et vaut 0.
(on pourra montrer que, pour toute suite (x_n) qui tend vers $+\infty$, $(u(x_n))$ est de Cauchy).
2. On suppose que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty[$.
   (i) Montrer que u est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   (ii) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ existe et vaut 0.
3. On suppose que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. A-t-on encore $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$?

Exercice 3 *Une caractérisation de $H^1(I)$.*
Soit $I :=]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Pour tout $0 < \alpha < (b-a)/2$, on note $I_\alpha :=]a + \alpha; b - \alpha[$.

1. (i) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([a; b])$, alors pour tout α comme ci-dessus :

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq h^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2 ds \qquad \forall x \in I_\alpha,\ h \in \mathbb{R},\ |h| < \alpha\ .$$

   (ii) En déduire que pour toute fonction $u \in H^1(I)$, pour tout intervalle I_α et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$:

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq \|u'\|_{L^2(I)}$$

   où $\tau_h u(x) = u(x+h)$.

2. Réciproquement, on suppose que $u \in L^2(I)$ est telle qu'il existe une constante $C > 0$ avec, pour tout intervalle I_α et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$:

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_{L^2(I_\alpha)} \leq C\ .$$

(i) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ et $\alpha > 0$ tel que ϕ a un support dans I_α. Montrer que, si $|h| < \alpha$,

$$\int_{I_\alpha} (u(x+h) - u(x))\phi(x)dx = \int_I u(x)(\phi(x-h) - \phi(x))dx \, .$$

En déduire que

$$\left| \int_I u(x)\phi'(x)dx \right| \leq C\|\phi\|_2 \, .$$

On pose $T(\phi) = | \int_I u(x)\phi'(x)dx$ pour $\phi \in \mathcal{C}_c^1(I)$.

(ii) Soit $\phi \in L^2(I)$. Montrer que, si (ϕ_n) est une suite de $\mathcal{C}_c^1(I)$ qui converge vers ϕ, alors la suite $(T(\phi_n))$ converge.

(iii) En utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^1(I)$ dans $L^2(I)$, montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue Φ sur $L^2(I)$ telle que

$$\Phi(v) = \int_I u(x)v'(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^1(I) \, .$$

(iv) En conclure que $u \in H^1$.

Exercice 4. Soit $I =]0,1[$ et $u \in W^{1,1}(I)$. L'objectif de l'exercice est de prouver que $u'(x) = 0$ pour presque tout x appartenant à l'ensemble $E = \{x \in I \mid u(x) = 0\}$.

1. Montrer que, pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que g et g' sont bornées sur $\mathbb{R}$, la fonction $g(u)$ appartient encore à $W^{1,1}(I)$ et $(g(u))' = g'(u)u'$.
   (on pourra utiliser le fait que $\mathcal{C}^1([0,1])$ est dense dans $W^{1,1}(I)$).

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathrm{th}(nu(x))$ où $\mathrm{th}(s) = \dfrac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}$ est la tangente hyperbolique.
   (on rappelle que $|\mathrm{th}(s)| \leq 1$ et $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$, que $\lim_{s\to+\infty} \mathrm{th}'(s) = \lim_{s\to-\infty} \mathrm{th}'(s) = 0$)

2. Montrer que v_n appartient à $W^{1,1}(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $|v_n'(x)| \leq |u'(x)|$ pour presque tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que (v_n) tend vers 0 dans $L^\infty(I)$.
4. Montrer que, pour presque tout $x \in I$, la limite $f(x) := \lim_{n\to+\infty} v_n'(x)$ existe et vaut 0 si $x \notin E$ et $u'(x)$ si $x \in E$.
5. Montrer qu'en fait (v_n') tend vers f dans $L^1(I)$.
6. Vérifier alors que, pour toute fonction test ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans I, on a $\displaystyle\int_I f(x)\phi(x)dx = 0$.
7. En déduire que $f = 0$ pour presque tout $x \in I$ et conclure.

Exercice 5.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. On rappelle que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\forall (x,y) \in H^2, < x, y >_H = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Les fonctions bilinéaires suivantes sont-elles continues et coercives sur H ?

(i) $a(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_{n+1}$, (ii) $b(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+1}y_{n+1}$,

(iii) $c(x,y)=x_0y_0+\sum_{n=0}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)(y_{n+1}-y_n)$, (iv) $d(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(x_{n+1}y_{n+1}+2x_ny_{n+1}+2x_ny_n\Big)$.

Exercice 6. *Problème de Dirichlet.*

Soit $I=]0,1[$. On se donne deux fonctions p et q de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha>0$ tel que

$$\text{p.p.t. } x\in I, p(x)\geq\alpha \text{ et } q(x)\geq 0.$$

1. On pose:

$$\forall (u,v)\in H_0^1(I)^2, a(u,v)=\int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t)+q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H_0^1(I)$.
b. Soit $f\in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u\in H_0^1(I)$ telle que:

$$\forall v\in H_0^1(I), a(u,v)=\int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H^1(I)$ et que:

$$-(pu')'+qu=f.$$

b. On se donne une fonction v de $H_0^1(I)$, telle que la fonction pv' appartienne à l'espace $H^1(I)$ et qui vérifie

$$-(pv')'+qv=f.$$

Montrer que:

$$u=v.$$

3. On suppose de plus que la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que les fonctions q et f sont continues sur I. Montrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et qu'elle est solution de l'équation:

$$-pu''-p'u'+qu=f,\ \ u(0)=u(1)=0.$$

Exercice 7. *Problème de Neumann.*

Soit $I=]0,1[$. On se donne deux fonctions p et q de $L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha>0$ tel que

$$\text{p.p.t. } x\in I, p(x)\geq\alpha \text{ et } q(x)\geq \alpha.$$

1. On pose:

$$\forall (u,v)\in H^1(I)^2, a(u,v)=\int_0^1 \big(p(t)u'(t)v'(t)+q(t)u(t)v(t)\big)dt.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $H^1(I)$.
b. Soit $f\in L^2(I)$. En déduire qu'il existe une unique fonction $u\in H^1(I)$ telle que:

$$\forall v\in H^1(I), a(u,v)=\int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

2.a. Montrer que la fonction pu' appartient à l'espace $H_0^1(I)$ et que:

$$-(pu')' + qu = f.$$

b. On se donne une fonction v de $H^1(I)$, telle que la fonction pv' appartienne à l'espace $H_0^1(I)$ et vérifie

$$-(pv')' + qv = f.$$

Montrer que:

$$u = v.$$

3. On suppose de plus que la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que les fonctions q et f sont continues sur I. Montrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et qu'elle est solution de l'équation:

$$-pu'' - p'u' + qu = f,\ u'(0) = u'(1) = 0.$$

Exercice 8. *Conditions de Neuman non homogènes*
Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, borné de $\mathbb{R}$. On chercher à résoudre le problème

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ dans } [a, b], \qquad u'(a) = \alpha,\ u'(b) = \beta$$

où f est une application continue sur $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si u est une solution de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour toute application $v \in H^1(I)$ on a
$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\ dx = \int_I f(x)v(x)\ dx + \beta v(b) - \alpha v(a)\ .$$
2. Montrer que la forme linéaire $\Phi(v) = \displaystyle\int_I f(x)v(x)\ dx + \beta v(b) - \alpha v(a)$ est continue sur $H^1(I)$.
3. En déduire l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(I)$ telle que
$$\int_I u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\ dx = \int_I f(x)v(x)\ dx + \beta v(b) - \alpha v(a) \qquad \forall v \in H^1(I)\ .$$
4. Montrer finalement que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation demandée.

Exercice 9. Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$ et $B_0 = B \backslash \{0\}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\psi(x) = 0$ dans B, $\psi(x) = 1$ si $\|x\| \geq 2$.

   Pour $\epsilon > 0$, on pose $\psi_\epsilon(x) = \psi(x/\epsilon)$.
2. On fixe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ et on pose $\phi_\epsilon(x) = \phi(x)\psi_\epsilon(x)$. Montrer que ϕ_ϵ tend vers ϕ dans $H^1(B)$ lorsque $\epsilon \to 0$.
3. En déduire que $H_0^1(B) = H_0^1(B_0)$. Commenter.

Exercice 10. *Problème de Dirichlet homogène en dimension supérieure.*
On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On admet l'inégalité de Poincaré qui affirme l'existence d'une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

où $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^N \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$. On veut résoudre le problème

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \ ,$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est continue.

1. On suppose, dans cette question seulement, que $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et que u est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème. Montrer que

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \ .$$

   On dit que u est une solution faible du problème si $u \in H_0^1(\Omega)$ et si

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \ .$$

2. Montrer que le problème possède une unique solution faible u_f qui est le minimum dans $H_0^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx - \int_\Omega f(x) u(x) \ dx \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \ .$$

3. Montrer que l'application qui à f associe la solution u_f est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice 11. *Problème de Dirichlet inhomogène en dimension supérieure.*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une application continue $A : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^{N \times N}$ où, pour tout $x \in \Omega$, $A(x) = (A_{ij}(x))$ est une *matrice symétrique* de format $N \times N$. On suppose qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\langle A(x)v, v \rangle \geq C_0 \|v\|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N, \ \forall x \in \Omega \ .$$

(autrement dit, la matrice $A(x)$ est définie positive). On considère l'équation

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) + c(x)u(x) = f(x), \qquad u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \ ; ,$$

où c et f sont des applications continues de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, avec $c > 0$ dans $\bar{\Omega}$.

1. Montrer que, si u est une solution de classe C^2 du problème, alors

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega \left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in C_c^1(\Omega)\ .$$

   On dit que u est une solution faible du problème si $u \in H_0^1(\Omega)$ et u vérifie

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega \left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

2. Montrer que le problème possède une unique solution faible qui est le minimum dans $H_0^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega \left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)(u(x))^2 - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx\ .$$