**Université Paris Dauphine**
**Master 1 MMD**
**Analyse fonctionnelle et EDP**

# **TD 3.** Distributions tempérées.

**Exercice 1.** (Dérivées de distributions)

a) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside ($H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$) et $T_H(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)dx$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}$. Montrer que $T_H$ est une distribution tempérée et calculer $T'_H$.

b) Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\delta_0$ la distribution associée à la masse de Dirac en 0. Montrer que

$$(\psi\delta_0)' = \psi(0)\delta'_0$$

c) (Formule des sauts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (i.e., il existe $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$, $]-\infty, a_0[$ et $]a_n, +\infty[$, et admet une limite à gauche et à droite en tout point). On suppose que $f$ et $f'$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}\{a_i\}$ respectivement. Montrer que la forme linéaire

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

est une distribution tempérée et vérifier que

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)\delta_{a_i}$$

**Exercice 2.** Soit $T$ l'application linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, -x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\ .$$

a) Vérifier que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ et calculer son ordre.

b) Quel est son support ?

c) Calculer au sens des distributions $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y}$.

**Exercice 3.** (Calcul de transformées de Fourier) Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées suivantes :

a) $\delta_0^{(p)}$ et de $x^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c) $e^{iax}$ (où $a \in \mathbb{R}$), $\cos(x)$, $x\sin(x)$.

**Exercice 4.** (Valeur principale)

a) Montrer que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

existe. On note appelle valeur principale, et on note $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})(\phi)$ cette limite.

b) Montrer alors que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et déterminer l'ordre de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

c) Soit $f(x) = \ln(|x|)$. Montrer que $f$ définit une distribution tempérée $T_f$ et calculer $T_f'$.

d) Montrer que $x \; \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

e) Montrer que toutes les distributions tempérées $T$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = 0$ sont de la forme $T = \lambda\delta_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) En déduire toutes les distributions tempérées $T$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telles que $T' = 0$ (on pourra étudier ce que vérifie $\mathcal{F}(T)$).

g) Quelles sont les distributions tempérées $T$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telles que $xT' + T = 0$ (Indication : poser $S = xT$).