(1)

Ex 1 . Partie 1

(X,d) métrique complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

sci, minorée, $f \not\equiv +\infty$.

1). $S(x) = \{y \in X : f(y) \leq f(x) - d(x,y)\}$

. $x \in S(x)$; $S(x)$ fermé car $y \mapsto f(y) + d(x,y)$ sci

. $y \in S(x)$, $z \in S(y)$; $f(z) \leq f(y) - d(y,z)$

$\leq f(x) - d(x,y) - d(y,z)$

$\leq f(x) - d(x,z)$

$\Rightarrow S(y) \subset S(x)$.

2). $K_0 = X$; $K_n = S(x_n)$ $n \geq 1$ avec

$x_{n+1} \in K_n$ et $f(x_{n+1}) \leq \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}}$

. D'après la question précédente K_n est une suite décroissante de fermés non vides.

. Soit $x \in K_n$: $d(x, x_n) \leq f(x_n) - f(x)$

$\leq \inf_{K_{n-1}} f + \frac{1}{2^n} - f(x)$

$\leq 1/2^n$ car $x \in K_{n-1}$

On a dc $\text{diam}(K_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

. Comme (X,d) est complet on en déduit qu'$\exists\, x_0 \in X$: $\bigcap_n K_n = \{x_0\}$.