3) $\{x_0\} = \bigcap_n K_n \implies S(x_0) = \{x_0\}$

et donc $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ on a

$$f(x) > f(x_0) - d(x, x_0).$$

4) $\varepsilon > 0$, $x_\varepsilon \in X$ / $f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon$ et $k > 0$

Soit $Y := \{y \in X : f(y) \leq f(x_\varepsilon) - k\varepsilon d(y, x_\varepsilon)\}$

appliquant 2) - 3) à $(Y, k\varepsilon d)$ (complet), on en déduit qu'il existe $y_\varepsilon \in Y$ t.q

$$f(y) > f(y_\varepsilon) - k\varepsilon d(y, y_\varepsilon) \; ; \; \forall y \in Y \setminus \{y_\varepsilon\} \quad (1)$$

Comme $y_\varepsilon \in Y$ on a $\begin{cases} f(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) & (2) \\ k\varepsilon d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon) \leq \varepsilon \end{cases}$

et donc $d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq 1/k$ (3)

Enfin si $y \notin Y$ on a ; en appliquant (1) à x_ε :

$$\begin{aligned} f(y) &> f(x_\varepsilon) - k\varepsilon d(y ; x_\varepsilon) \\ &\geq f(y_\varepsilon) - k\varepsilon [d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, y)] \\ &\geq f(y_\varepsilon) - k\varepsilon d(y_\varepsilon, y) \end{aligned}$$

$\forall y \in X \setminus Y$.

et donc (1) est aussi vérifiée