③ De (5) on déduit que

$$(g+f)(x) \geq g(x_0)+f(x_0) \quad \forall x \in C \quad (6)$$

et que $\forall h \in E$;

$$g(x_0+h)+f(x_0)-\varepsilon\|h\| \leq g(x_0)+f(x_0)$$

de sorte que $\|g\|_{E'} \leq \varepsilon$. Il existe

donc $g \in E'$, $\|g\|_{E'} \leq \varepsilon$ telle que

$f+g$ atteigne son minimum en $x_0 \in C$.

5) D'après la question précédente (en raisonnant sur $-f$), $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, f_\varepsilon \in E' \;/\; \|f-f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ et f atteint

son max sur C.

Ex 2 : $u \in \mathcal{E}' \;/\; \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha u = 0$

en passant en Fourier, il vient

$$\sum_\alpha a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = 0$$

$\Rightarrow$ supp $\hat{u} \subset \Sigma = \{\xi : \sum a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha = 0\}$

or, Σ est un fermé d'int. vide et $\hat{u} \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow \hat{u} = 0$ et donc $u = 0$.

N.B le fait que $\hat{u} \in \mathcal{E}$ provient ici de $\hat{u}(\xi) = \langle u, x \mapsto e^{-ix\xi} \rangle$.