

**Analyse fonctionnelle et EDP,  
Partiel, avril 2009  
ENS, FIMFA, première année.**

**Exercice 1 Première partie: principe variationnel d'Ekeland**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet,  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction s.c.i minorée non identiquement égale à  $+\infty$ . Pour tout  $x \in X$  on pose

$$S(x) := \{y \in X : f(y) \leq f(x) - d(x, y)\}.$$

1. Soit  $x \in X$ , montrer que  $S(x)$  est un fermé non vide et que si  $y \in S(x)$  alors  $S(y) \subset S(x)$ .
2. Soit  $K_0 := X$ , on définit par récurrence  $K_n := S(x_n)$  où

$$x_{n+1} \in K_n, f(x_{n+1}) \leq \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in X$  tel que  $\{x_0\} = \bigcap_n K_n$ .

3. Montrer que

$$f(x) > f(x_0) - d(x, x_0), \forall x \in X \setminus \{x_0\}.$$

4. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $x_\varepsilon \in X$  tel que

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon$$

soit  $k > 0$  montrer qu'il existe  $y_\varepsilon \in X$  tel que

$$f(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon), d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{k}, f(x) > f(y_\varepsilon) - k\varepsilon d(x, y_\varepsilon), \forall x \in X \setminus \{y_\varepsilon\}.$$

**Deuxième partie: applications**

1. Soit  $E$  un espace de Banach et  $f \in C^1(E, \mathbb{R})$  minorée. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in X$  tel que  $f(x_\varepsilon) \leq \inf_E f + \varepsilon$  et  $\|f'(x_\varepsilon)\|_{E'} \leq \sqrt{\varepsilon}$ .
2. Soit  $E$  un espace de Banach et  $f \in C^1(E, \mathbb{R})$  telle qu'il existe  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) \geq a\|x\| + b$  pour tout  $x \in E$ . Montrer que  $f'(E)$  est dense dans  $aB_{E'}$ .

### Troisième partie: théorème de Bishop-Phelps

Soit  $E$  un espace de Banach,  $C$  une partie convexe fermée et bornée non vide de  $E$  et  $f \in E'$ . Soit enfin  $\varepsilon > 0$ , on déduit de la première partie qu'il existe  $x_0 \in C$  tel que

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|, \forall x \in C.$$

On définit

$$C_1 := \{(x, t) \in E \times \mathbb{R}, : t \leq f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|\}, C_2 := \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}.$$

1. Montrer que si  $E$  est réflexif alors  $f$  atteint son supremum sur  $C$ .
2. Trouver une forme linéaire sur  $C([0,1])$  n'atteignant pas son supremum sur  $B_{C([0,1])}$ .
3. Montrer que  $C_1$  et  $C_2$  sont convexes et que l'intérieur de  $C_1$  est disjoint de  $C_2$ .
4. Montrer qu'il existe  $g \in E'$  tel que  $\|g\| \leq \varepsilon$  et  $f + g$  atteint son supremum sur  $C$  en  $x_0$ .
5. En déduire que l'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$  qui atteignent leur supremum sur  $C$  est dense dans  $E'$ .

**Exercice 2** Soit  $I$  une partie finie de  $\mathbb{N}^d$ ,  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  des réels non tous nuls et  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  tel que  $\sum a_\alpha \partial^\alpha u = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  montrer que  $u = 0$ .

**Exercice 3** Soit  $E$  un espace de Banach et  $T$  un endomorphisme continu de  $E$ , on dit que  $T$  est séquentiellement compact si et seulement si l'image par  $T$  de toute suite faiblement convergente dans  $E$  est fortement convergente.

1. Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et  $T$  un endomorphisme continu de  $E$  séquentiellement compact. Montrer que  $T$  est compact.
2. Trouver un contre-exemple dans le cas non réflexif.