Université Paris IX Dauphine
UFR Mathématiques de la décision

Notes de cours

ALGEBRE 2

Guillaume CARLIER

L1, année 2006-2007

Ce support de cours est basé sur le poly de Tristan Tomala des années précédentes.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

On traite dans ce qui suit le cas réel, le cas complexe se traitant de manière similaire.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1 *Un* **espace vectoriel** *sur* $\mathbb{R}$ *est un triplet* $(E,+,.)$ *où*

- E *est un ensemble,*
- *"+" une loi de composition interne :* $E \times E \to E$ *telle que*
  - *(élément neutre)* $\exists 0_E \in E$ *avec* $\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$
  - *(opposé)* $\forall x \in E,\ \exists(-x) \in E$ avec $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
  - *(associativité)* $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x + (y+z) = (x+y) + z$
  - *(commutativité)* $\forall (x,y) \in E^2,\ x + y = y + x$
- *"." est une loi externe :* $\mathbb{R} \times E \to E$ *telle que :* $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in E^2,$
  - *i)* $1.x = x$
  - *ii)* $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - *iii)* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
  - *iv)* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$

Les espaces vectoriels complexes, ou $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, sont définis de façon analogue, en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Il faut connaître les exemples suivants

1. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels réels.
2. Soit A un ensemble et $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; l'ensemble des applications de A dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. Si E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{R}$- espaces vectoriels, $E_1 \times E_2$ muni des lois "produit" est encore un espace vectoriel.

4. $(\mathbb{R}[X], +, .)$ est un espace vectoriel réel et $(\mathbb{C}[X], +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2 *Sous-espace Vectoriel S.E.V.*

$$F \text{ est un S.E.V de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \in F \\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Remarque :
- pour la seconde propriété, on peut se contenter de vérifier que

$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$$

ou encore que

$$\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ x + \mu y \in F\ .$$

Remarquons qu'une intersection de s.e.v. est encore un s.e.v. (évidemment une telle intersection est non vide puisqu'elle contient le vecteur nul).

Définition 1.3 *On appelle* **sous-espace vectoriel engendré par une partie** *A non vide de E le plus petit S.E.V. de E contenant A. On le note $Vect(A)$. On montre que*

$$Vect(A) = \{x \in E \mid x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ a_i \in A\}$$

Tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient également $Vect(A)$.

1.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1.4 *On dit que G, famille non vide de E, est une* **famille génératrice** *de E si et seulement si $E = Vect(G)$, c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire (finie) d'éléments de G.*

$$G \text{ famille génératrice de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \exists (g_1, \ldots, g_p) \in G^p \\ \qquad \text{avec } x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i\ . \end{cases}$$

Définition 1.5 – *On dit que L, famille non vide de E, est* **une famille libre** *de E si et seulement si*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in L^p,\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts } \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,$$
$$\text{si } \textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0, \text{ alors } \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 .$$

- *Si L, famille non vide de E, n'est pas libre, on dit que L est* **liée**.
- *On dit que B, famille non vide de E, est* **une base** *de E si et seulement si B est libre et génératrice.*

Propriété 1.1 1. *Toute partie contenant une partie génératrice de E est encore une partie génératrice.*
2. *Toute partie contenue dans une partie libre est libre.*
3. *Toute partie de E contenant le vecteur nul de E est liée.*
4. *Toute partie réduite à un vecteur non nul est une partie libre.*

On a la caractérisation suivante des bases :

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel et L une famille non vide de E, on a les équivalences :*
- *L est une base de E,*
- *L est une famille libre maximale,*
- *L est une famille génératrice minimale.*

Définition 1.6 *On dit que E est un* **espace vectoriel de dimension finie** *si et seulement si E admet une partie génératrice de cardinal fini (c'est-à-dire contenant un nombre fini d'éléments).*

L'important résultat suivant implique en particulier l'existence de bases (en dimension quelconque).

Théorème 1.1 Théorème de la base incomplète : *Tout espace vectoriel E admet une base. Plus précisément, si G est une partie génératrice de E et L une partie libre de E (ou si $L = \emptyset$), il existe alors une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et B une base de E de cardinal n.

Propriété 1.2 1. *Toute autre base de E contient exactement n éléments. On dit que E est de* **dimension** *n et on note : $dimE = n$. Par convention, on pose $dim(\{0\}) = 0$.*

2. *Toute partie libre contient au plus n éléments.*
3. *Toute partie génératrice contient au moins n éléments.*
4. *Toute partie libre (respectivement génératrice) de n éléments est une base.*

Bien noter que le point 4) donne une caractérisation utile en pratique des bases en dimension finie.

Propriété 1.3 Propriété fondamentale : *Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Tout élément x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ .$$

Les scalaires λ_i s'appellent **coordonnées** *de x dans la base B.*

Proposition 1.2 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et F un S.E.V. de E , alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$.*

Si de plus $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

Définition 1.7 *Soit $S = \{u_1, \ldots, u_p\}$ un système de p vecteurs de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle* **rang de** *S la dimension du sous-espace vectoriel engendré par S :*

$$rang(S) = dimVect(S)$$

Propriété 1.4 1. *$rang(S) \leq p$.*

2. *$rang(S) = p$ si et seulement si S est libre.*
3. *Le rang de S est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de S.*
4. *si E est de dimension finie n, alors $rang(S) \leq n$.*
5. *si E est de dimension finie n, alors $rang(S) = n \Leftrightarrow S$ est une famille génératrice.*

1.4 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 1.8 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de E_1 et E_2 le sous-espace vectoriel F de E défini par*

$$F = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$$

On note cette somme $F = E_1 + E_2$.

Remarques :

- $E_1 + \{0_E\} = E_1$ et $\{0_E\} + E_2 = E_2$.
- $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$.

Attention ! Ne pas confondre somme et union de sous-espaces vectoriels. Si un vecteur x appartient à $E_1 + E_2$, cela n'entraîne pas que x appartient à E_1 ou à E_2.

Proposition 1.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors E_1+E_2 est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $E_1 \cup E_2$:*

$$E_1 + E_2 \ = \ Vect(E_1 \cup E_2)\ .$$

Lemme 1.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0_E\}$. Si B_1 est une base de E_1 et B_2 une base de E_2, alors l'union $B_1 \cup B_2$ est une famille génératrice de $E_1 + E_2$.*

Attention ! En général, $B_1 \cup B_2$ n'est pas une base.

Théorème 1.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\boxed{dim(E_1 + E_2) \ = \ dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)\ .}$$

Définition 1.9 *Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de E_1 et E_2 est directe si

$$E_1 \cap E_2 \ = \ \{0\}$$

On note alors la somme de E_1 et E_2 : $E_1 \oplus E_2$.

La notion de somme directe est justifiée par les équivalences suivantes :

Proposition 1.4 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soient B_1 et B_2 deux bases fixées de E_1 et de E_2. Il y a équivalence entre*

1. *La somme $E_1 + E_2$ est directe.*
2. *Si $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ sont tels que $x_1 + x_2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = 0$.*
3. *$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $B_1 \cup B_2$ est une base de $E_1 + E_2$.*
4. *$dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E_1 + E_2)$.*

Définition 1.10 *Sous-espaces vectoriels supplémentaires.*

On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont supplémentaires dans E si

$$E_1 \oplus E_2 = E \ .$$

Remarques :

– Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, si et seulement si,

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \text{ et } E_1 + E_2 = E \ .$$

– Si deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, alors

$$dim(E_1) + dim(E_2) = dim(E) \ .$$

Si, de plus, B_1 est une base de E_1 et B_2 une base de E_2, alors $B_1 \cup B_2$ est une base de E.

Le théorème suivant qui résulte du théorème de la base incomplète assure l'existence de sous-espaces supplémentaires (attention : on n'a pas unicité).

Théorème 1.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 un s.e.v. de E alors il existe E_2 s.e.v. de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$.*

Notons pour finir la caractérisation :

Proposition 1.5 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux s.e.v. de E, alors $E = E_1 \oplus E_2$ ssi pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

1.5 Somme directe de k sous-espaces vectoriels

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur K de dimension finie.

Définition 1.11 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. La somme des k sous-espaces vectoriels E_1, ... ,E_k est l'ensemble, noté $E_1 + \cdots + E_k$:*

$$E_1 + \cdots + E_k = \{x_1 + \cdots + x_k \text{ où } \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \ x_i \in E_i\}$$

Lemme 1.2 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E, B_1,..., B_k des bases de $E_1, \ldots, E_k$. Alors $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ est une famille génératrice de $E_1 + \cdots + E_k$.*

Corollaire 1.1 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$dim(E_1 + \cdots + E_k) \leq dim(E_1) + \cdots + dim(E_k) \ .$$

Remarque : Il n'y a pas égalité en général. Notons que $E_1 + \cdots + E_k = Vect(E_1 \cup \cdots \cup E_k)$.

Définition 1.12 *Somme directe.*Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe si pour tout $x_1 \in E_1$, ... , $x_k \in E_k$, tels que $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$, on a $x_1 = \cdots = x_k = 0_E$.

Remarques :

- Les deux définitions de somme directe coïncident lorsque $k = 2$.
- Bien noter également que, si les k espaces vectoriels E_1, ... ,E_k sont en somme directe, alors, pour $i \neq j$, la somme $E_i + E_j$ est directe. La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que tout couple $E_i + E_j$ soit en somme directe pour que la somme totale $E_1 + \cdots + E_k$ le soit.

Proposition 1.6 *Soient E_1, ... ,E_k k sous-espaces vectoriels de E et $B_1, \ldots, B_k$ des bases de $E_1, \ldots, E_k$ respectivement. Il y a équivalence entre*

1. *La somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe.*
2. *$dim(E_1) + \cdots + dim(E_k) = dim(E_1 + \cdots + E_k)$.*
3. *Pour tout $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ et $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ est une base de $E_1 + \cdots + E_k$.*

Remarque : Bien noter que les bases $B_1, \ldots, B_k$ sont fixées au départ, de sorte qu'il suffit que l'assertion (3) soit vérifiée pour un seul k-uplet de bases pour que la somme $E_1 + \cdots + E_k$ soit directe.

Proposition 1.7 *Si la somme $E_1 + \cdots + E_k$ est directe, alors, pour tout $x_1, \ldots, x_k$ éléments non nuls de $E_1, \ldots, E_k$, la famille $\{x_1, \ldots, x_k\}$ est libre.*

Chapitre 2

Applications linéaires

Dans ce qui suit E et F désignent deux $\mathbb{R}$-e.v..

2.1 Définitions et vocabulaire

Définition 2.1 *On appelle application linéaire de E dans F une application $f : E \to F$ qui vérifie :*
- $\forall (x_1, x_2) \in E \times E, \qquad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E, \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque : On voit facilement que f est une application linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \forall (x_1, x_2) \in E \times E, \text{ on a } f(\lambda_1 x_1 + x_2) = \lambda_1 f(x_1) + f(x_2)\ .$$

Définition 2.2
- *Si f est une application linéaire bijective, on dit que f est un* **isomorphisme** *de E sur F.*
- *Si f est une application linéaire de E dans lui-même, on dit que f est un* **endomorphisme** *de E.*

Notations : $L(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F. $L(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples :
1. L'application de E dans F qui à tout élément de E associe le vecteur nul 0_F de F est une application linéaire, appelée application nulle.
2. L'application $id_E : E \to E$ qui à un élément x de E associe x, c'est-à-dire $id_E(x) = x$, est une application linéaire appelée “identité”. C'est un endomorphisme de E.

3. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $f_A : M_{p,1}(\mathbb{R}) \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \ , \qquad f_A(X) = AX$$

est une application linéaire.

Proposition 2.1

- *Si f et g sont des applications linéaires de E dans F, alors $f + g$ est une application linéaire de E dans F :*

$$\forall f \in L(E,F),\ \forall g \in L(E,F), \qquad f + g \in L(E,F) \ .$$

- *Si f est une application linéaire de E dans F et si λ est un scalaire, alors λf est une application linéaire de E dans F :*

$$\forall f \in L(E,F),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda f \in L(E,F) \ .$$

- *Si E, F, G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et si f et g sont des applications linéaires allant respectivement de E dans F et de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G :*

$$\forall f \in L(E,F),\ \forall g \in L(F,G), \qquad g \circ f \in L(E,G) \ .$$

- *Si f est une application linéaire de E dans F bijective, alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E :*

$$\forall f \in L(E,F),\ \text{si } f \text{ est bijective}, \qquad \text{alors } f^{-1} \in L(F,E) \ .$$

On sait que l'ensemble des applications de E dans F, noté $A(E,F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les deux premières propriétés énoncées dans la proposition impliquent alors que $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $A(E,F)$:

Corollaire 2.1 *Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $L(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2.2 Propriétés élémentaires

Mentionnons quelques propriétés élémentaires qui permettent de manipuler la notion d'application linéaire.

Proposition 2.2

1. *Une application linéaire f transforme toute combinaison linéaire d'éléments de E en une combinaison linéaire d'éléments de F. Plus précisément :*

$$\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k,\ \forall(x_1,\ldots,x_k)\in E^k,\ \text{ on a } f(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i)\ .$$

2. *$f(0_E)=0_F$ et, pour tout élément x de E, $f(-x)=-f(x)$.*
3. *L'image directe par f d'un S.E.V. de E est un S.E.V. de F.*
4. *L'image réciproque par f d'un S.E.V. de F est un S.E.V. de E.*

En pratique :

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire (ce qui est assez facile),
  i) on montre que f vérifie la définition,
  ii) ou on montre que f est une somme, une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires.
- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas linéaire (ce qui est plus compliqué), on montre, par ordre croissant de difficulté,
  i) soit que $f(0_E)\neq 0_F$,
  ii) soit qu'il existe $x\in E$ tel que $-f(x)\neq f(-x)$,
  iii) soit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in E$ tels que $f(\lambda x)\neq\lambda f(x)$,
  iv) soit qu'il existe $x\in E$ et $y\in E$ tels que $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

2.3 Image et noyau d'une application linéaire

On définit maintenant l'image et le noyau d'une application linéaire f de E dans F.

Définition 2.3 – *On appelle* **image de** f *- et on note $Im(f)$ - la partie de F définie par :*

$$Im(f)=f(E)=\{y\in F \text{ tel que } \exists x\in E \text{ avec } y=f(x)\}\ .$$

– *On appelle* **noyau de** f *- et on note $Ker(f)$ - la partie de E définie par :*

$$Ker(f)=f^{-1}(\{0_F\})=\{x\in E \text{ tel que } f(x)=0_F\}\ .$$

Proposition 2.3

1. *L'image de l'application linéaire $f : E\to F$ est un sous-espace vectoriel de F.*

2. *Le noyau de l'application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *f est injective ssi $Ker(f) = \{0\}$.*
4. *f est surjective ssi $Im(f) = F$.*

2.4 Cas de la dimension finie : le théorème du rang

2.4.1 Le théorème du rang et ses applications

On suppose à partir de maintenant que **l'espace de départ E est de dimension finie**. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Proposition 2.4 *Si $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une famille génératrice de E, alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_k)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.*

Remarques :

1. En particulier, l'image de f est de dimension finie.
2. Cette proposition fournit une méthode pour construire une base de $Im(f)$. Pour cela, on considère une base de E, $\{e_1, \ldots, e_p\}$. D'après la proposition, $\{f(e_1), \ldots, f(e_p)\}$ est une famille génératrice de $Im(f)$. Il suffit alors d'extraire de cette famille génératrice une base de $Im(f)$ (en utilisant le théorème de la base incomplète).
3. Une autre application de ce résultat est la suivante : si $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une famille génératrice de E, alors la dimension de $Im(f)$ est égale au rang de la famille $\{f(e_1\}, \ldots, f(e_k)\}$:

$$dim(Im(f)) \;=\; rg\{f(e_1\}, \ldots, f(e_k)\}\ .$$

Théorème 2.1 (Théorème du rang) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Alors on a l'égalité :*

$$\boxed{dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E)}$$

Définition 2.4 *On apppelle rang de f - et on note rg(f) - la dimension de l'image de f.*

Remarques :

1. Le théorème du rang s'écrit donc aussi $rg(f)+dim(Ker(f)) = dim(E)$. En particulier, le rang de f est toujours inférieur ou égal à la dimension de E.
2. Si, de plus, F est de dimension finie, on a $rg(f) \leq dim(F)$. En effet, $Im(f)$ est un S.E.V. de F et donc sa dimension (égale à $rg(f)$ par définition) est inférieure ou égale à celle de F.
3. Si F est de dimension finie, alors f est surjective si et seulement si $rg(f) = dim(F)$. En effet, $Im(f)$ est un S.E.V. de F, et donc $Im(f) = F$ si et seulement si $dim(Im(f)) = dim(F)$.

Corollaire 2.2 *Supposons toujours que E soit de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. *L'application linéaire f est injective si et seulement si $rg(f) = dim(E)$. Alors on a*
$$dim(E) \leq dim(F) \ .$$
2. *Si f est surjective, alors F est de dimension finie et*
$$dim(F) \leq dim(E) \ .$$
3. *Si f est bijective, alors F est de dimension finie et*
$$dim(F) \ = \ dim(E) \ .$$

2.4.2 Le théorème du rang si $dim(E) = dim(F)$

Une conséquence très importante du théorème du rang est la suivante :

Théorème 2.2 *Si F est de dimension finie et que* $\mathbf{dim(E) = dim(F)}$, *alors on a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Remarque : Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes.

2.5 Projections

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et E_1, E_2 deux sev supplémentaires de E (i.e. $E = E_1 \oplus E_2$). Ainsi, pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$, on appelle x_1 la projection de x sur E_1 dirigée par E_2.

Définition 2.5 *Soit $x \in E$ et $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x_1 + x_2 = x$. Posons $x_1 = p(x)$, p s'appelle la projection sur E_1 dirigée par E_2.*

Proposition 2.5 *Soit p la projection sur E_1 dirigée par E_2, on a :*

1. *$p \in L(E)$,*
2. *$Im(p) = E_1$ et $Ker(p) = E_2$,*
3. *$p \circ p = p$.*

On a la forme de réciproque suivante au point 3 :

Proposition 2.6 *Soit $p \in L(E)$ vérifiant $p \circ p = p$, on a alors :*

1. *$Ker(p) \oplus Im(p) = E$*
2. *p est la projection sur $Im(p)$ dirigée par $Ker(p)$.*

On définit alors simplement :

Définition 2.6 *Un endomorphisme p de E est appelé projecteur ssi $p \circ p = p$.*

Chapitre 3

Représentation matricielle

3.1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

La proposition suivante explique pourquoi il va être possible de caractériser une application linéaire par une matrice.

Proposition 3.1 *Supposons que E soit de dimension finie n. Soient $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de n éléments de F. Il existe une* **unique application linéaire** *f de E dans F vérifiant :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad f(e_j) = v_j \ ,$$

Remarques :

- Une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel F est donc entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base quelconque.
- Cette proposition s'utilise le plus souvent sous la forme : si E est de dimension finie, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(E, F)$, alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ f(e_i) = g(e_i) \quad \Leftrightarrow \quad f = g \ .$$

3.2 Matrices et applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension n et p, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, $C = \{f_1, \ldots, f_p\}$ base de F.

Représentation des applications linéaires par des matrices

Définition 3.1 *Soit $f \in L(E, F)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $(a_{1j}, \ldots, a_{pj})$ les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base C :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \; .$$

On appelle **matrice représentant f dans les bases B et C** *la matrice de terme général a_{ij} :*

$$M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{p1} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- **Attention à l'ordre dans l'écriture $M_{CB}(f)$!**
- Cette matrice a n colonnes et p lignes : $M_{CB}(f) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.
- La $j-$ième colonne de la matrice est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base C.
- **Attention :** la matrice dépend des bases choisies dans E et F.

Notation : Si $E = F$ et $B = C$, on note $M_{BB}(f) = M_B(f)$.

Exemples fondamentaux :

1. Soient O l'application nulle de E dans F et O_{pn} la matrice nulle de $M_{p,n}(\mathbb{R})$. Alors
$$M_{CB}(O) = O_{pn}$$
2. Soit id_E l'application linéaire identité de E dans E et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Alors
$$M_{BB}(id_E) = M_B(id_E) = I_n$$
3. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $f_A : M_{p,1}(\mathbb{R}) \to M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par
$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \; , \qquad f_A(X) = AX \; .$$
Soient B et C les bases canoniques de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ et de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors
$$A \; = \; M_{CB}(f_A) \; .$$

3.2.1 Liens avec le calcul matriciel

Addition de matrices et multiplication par un scalaire
Soient f et g deux éléments de $L(E,F)$, λ un élément de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2

1. $M_{CB}(f+g) = M_{CB}(f) + M_{CB}(g)$.
2. $M_{CB}(\lambda f) = \lambda M_{CB}(f)$.

En particulier, l'application Φ de $L(E,F)$ dans $M_{p,n}(\mathbb{R})$ qui à toute application linéaire f fait correspondre la matrice $M_{CB}(f)$ est elle-même une application linéaire.

Théorème 3.1 *L'application linéaire Φ de $L(E,F)$ dans $M_{p,n}(\mathbb{R})$ qui à toute application linéaire f fait correspondre la matrice $M_{CB}(f)$ est un isomorphisme de $L(E,F)$ sur $M_{p,n}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 3.1 *A toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut associer une et une seule application linéaire $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.*

Comme $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np, nous pouvons également déduire du théorème du rang et de la proposition 3.1 la dimension de $L(E,F)$:

Corollaire 3.2 *Si E est de dimension n et F de dimension p, alors $L(E,F)$ est de dimension np.*

3.2.2 Produit de matrices

Soient E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, B , C et D des bases de E, F et G, $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$.

Proposition 3.3 $M_{DB}(g \circ f) = M_{DC}(g).M_{CB}(f)$

Cette égalité justifie a postériori, la définition du produit matriciel.

On suppose maintenant que $dim(E) = dim(F)$.

Corollaire 3.3 *Soit f une application linéaire de E dans F ($f \in L(E,F)$). Alors f est bijective si et seulement si la matrice $M_{CB}(f)$ est inversible. Dans ce cas, la matrice $M_{BC}(f^{-1})$ est l'inverse de la matrice $M_{CB}(f)$:*

$$M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1} \ .$$

Remarque : Dans le cas particulier où $E = F$ et $B = C$, on obtient, pour toute application linéaire bijective

$$(M_B(f))^{-1} = M_B(f^{-1})$$

3.2.3 Ecriture matricielle

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, B et C des bases de E et F. Soit f un élément de $L(E,F)$, x un élément de E.
On note A la matrice $M_{CB}(f)$, X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base B et Y la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base C.

Proposition 3.4 *On a $Y = AX$.*

3.3 Rang d'une matrice

Soient A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $(c_1, \ldots, c_p)$ les matrices colonnes de la matrice A.

Définition 3.2 *On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, le rang de la famille de vecteurs $\{c_1, \ldots, c_n\}$:*

$$rg(A) \ = \ rg\{c_1, \ldots, c_n\} \ .$$

On peut faire le lien suivant entre le rang d'une matrice et le rang d'une application linéaire :

Proposition 3.5 *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, B une base de E et C une base de F, soit $f \in L(E,F)$. Alors le rang de f est égal au rang de la matrice représentant f dans les bases B et C :*

$$rg(f) \ = \ rg(M_{CB}(f)) \ .$$

On obtient ainsi un critère d'inversibilité pour les matrices :

Théorème 3.2 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si les matrices colonnes de A forment une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Remarque : Il est très utile en pratique d'identifier $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$.

3.4 Changement de base

3.4.1 Action d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E. Soient $(p_{1j}, \ldots, p_{nj})$ les coordonnées du vecteur e'_j dans la base B, c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \;\; e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \, .$$

Définition 3.3 (Matrice de passage)
On appelle **matrice de passage de** B **à** B' *la matrice* $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base* B' *exprimées dans la base* B*.*
Cette matrice est notée $P_{BB'}$*.*

Remarque : On a clairement $P_{BB} = I_n$.

Lemme 3.1 *Si* B *et* B' *sont deux bases de* E*, alors*

$$P_{BB'} = M_{BB'}(id_E)$$

Proposition 3.6 *Si* B *et* B' *sont deux bases de* E*, alors la matrice de passage de* B *à* B' *est inversible et son inverse est la matrice de passage de* B' *à* B *:*

$$(P_{BB'})^{-1} \;=\; P_{B'B}$$

Théorème 3.3 *Soient* x *un élément de* E*,* X_B *et* $X'_{B'}$ *les matrices colonnes des coordonnées de* x *dans les bases* B *et* B'*. Alors*

$$X_B = P_{BB'} X'_{B'}$$

Attention à l'ordre ! On a les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

3.4.2 Action d'un changement de base sur la matrice représentant une application linéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'.
Soient F un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{R}$, C et C' deux bases de F et Q la matrice de passage de C à C'.

Théorème 3.4 *Si f est une application linéaire de E dans F représentée par la matrice A dans les bases B et C et par A' dans les bases B' et C', on a la relation :*

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarque :
Dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E, si A (resp. A') est la matrice représentant f dans la base B (resp. B'), alors $A' = P^{-1}AP$.

3.4.3 Matrices semblables

Définition 3.4 *On dit que deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont semblables s'il existe P matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.*

On vient de voir que, si f est un endomorphisme de E, et si B et B' sont deux bases de E, alors $M_B(f)$ et $M_{B'}(f)$ sont des matrices semblables. Nous donnons maintenant une forme de réciproque :

Proposition 3.7 *Soient f un endomorphisme de E, B une base de E et A la matrice de f dans la base B. Si A' est une matrice semblable à A, il existe une base B' de E telle que A' soit la matrice de f dans la base B'.*

3.5 Retour aux systèmes linéaires

Nous avons démontré au chapitre précédent que tout système linéaire peut se mettre sous la forme

$$AX = b$$

où $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Rappelons que l'application f_A de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \qquad f_A(X) = AX$$

est linéaire. De plus, la matrice de f_A dans les bases canoniques de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est A. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du problème $AX = b$:

$$\mathcal{S} \;=\; \{X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = b\}$$

Proposition 3.8 *Si on connaît une solution X_0 du problème $AX = b$, alors toute solution de ce système est obtenue en ajoutant à X_0 une solution du système homogène $AY = 0$, c'est-à-dire un élément du noyau de f_A. Autrement dit,*

$$\mathcal{S} = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \exists Y \in Ker(f_A) \text{ avec } \; X = X_0 + Y\}$$

Corollaire 3.4
On suppose maintenant que $n = p$. Alors il y a équivalence entre :

1. *Il existe $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour lequel l'équation $AX = b$ a au plus une solution.*
2. *Pour toute donnée $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ a au moins une solution.*
3. *Pour toute donnée $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ a une et une seule solution.*
4. *A est inversible.*

Remarques :
- Dans ce cas, la solution est unique et égale à $A^{-1}b$.
- Bien noter le lien très fort entre l'existence et l'unicité des solutions.

Chapitre 4

Déterminants

L'objet de ce chapitre est la construction d'une application de $M_n(\mathbb{R})$ (ou de $M_n(C)$) dans $\mathbb{R}$ (ou dans C), appelée **déterminant**, qui ne s'annule que si la matrice n'est pas inversible :

$$det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

Dans tout ce chapitre, on travaille dans le cas réel, le cas complexe pouvant être traité de façon identique.

4.1 Formes m-linéaires alternées

Définition 4.1 (Forme m-linéaire alternée)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle forme m-linéaire alternée une application f de E^m dans $\mathbb{R}$:

$$(X_1, \ldots, X_m) \to f(X_1, \ldots, X_m)$$

telle que :

1. *f est linéaire par rapport à chacun de ses arguments :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} , \qquad X_i \to f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m) \text{ est linéaire,}$$

2. *f change de signe quand on permute deux arguments :*

$$f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_m) = -f(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_m) \ .$$

Remarque : Si une application vérifie (1), on dit qu'elle est m-linéaire, et si elle vérifie (2), on dit qu'elle est alternée.

Lemme 4.1 *Soient $f : E^m \to \mathbb{R}$ une forme m-linéaire alternée et $(X_1, \ldots, X_m)$ un $m-$uplet de E^m. S'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $X_i = X_j$, alors $f(X_1, \ldots, X_m) = 0$.*

Proposition 4.1 *Une forme m-linéaire alternée n'est pas modifiée si on ajoute à l'un de ses arguments une combinaison linéaire des autres arguments :*

$$f(X_1, \ldots, X_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j X_j, \ldots, X_m) = f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m)$$

Théorème 4.1 *Soit f une forme m-linéaire alternée. Si $(X_1, \ldots, X_m)$ est une famille liée, alors $f(X_1, \ldots, X_m) = 0$.*

4.2 Déterminants

4.2.1 Définition et propriétés admises

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de terme général (a_{ij}). On note A^*_{ij} la sous-matrice de A d'ordre $(n-1)$ obtenue en enlevant à A sa $i$ème ligne et sa $j$ème colonne.

Définition 4.2 *On appelle déterminant de A et on note $det(A)$ l'élément de $\mathbb{R}$ défini par une des formules de récurrence suivantes :*

- *si $n = 1$, on pose $det(A) = a_{11}$*
- *si $n > 1$, on pose (développement par rapport à la $k-$ième colonne)*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A^*_{ik})$$

- *ou (développement par rapport à la $k-$ième ligne)*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} det(A^*_{kj})$$

Remarque : On admet que toutes ces formules de récurrence donnent le même résultat.

Exemples :

1. si $n = 2$, $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

2. si $n = 3$, $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ = (développement suivant la 3ième colonne)

$$(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

3. Si O est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$, $det(O) = 0$.
4. Si I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, $det(I_n) = 1$.

Notation : A un $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on associe la matrice $Mat(X_1, \ldots, X_n)$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont constituées des vecteurs $X_1, \ldots, X_n$.

Théorème 4.2 *L'application de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à un $n-$uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe le scalaire $det(Mat(X_1, \ldots, X_n))$ est une forme n-linéaire alternée.*

Toute forme n-linéaire alternée de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ est proportionnelle à cette application.

La démonstration de cet énoncé est trop technique pour être donnée ici. On admet également que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée :

Proposition 4.2

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \qquad det(A) = det(A^T) .$$

4.3 Le théorème fondamental

L'objet de cette partie est de montrer qu'une matrice est inversible, si et seulement si, son déterminant est non nul. Montrons d'abord que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants :

Proposition 4.3

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ \forall B \in M_n(\mathbb{R}), \qquad det(AB) = det(A)det(B) .$$

Remarque : En particulier, si A et B sont des matrices semblables, alors $det(A) = det(B)$.

Le théorème fondamental sur le déterminant est le suivant :

Théorème 4.3 *Soit $A \in Mn(\mathbb{R})$. Alors*

$$\boxed{A \text{ est inversible} \qquad \Leftrightarrow \qquad det(A) \neq 0}$$

Nous avons démontré en passant la proposition suivante :

Proposition 4.4 *Si A est inversible, alors*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \ .$$

4.4 Calcul pratique du déterminant

Comme le déterminant est une forme n-linéaire alternée, on a :

Corollaire 4.1

1. *Un déterminant change de signe si on permute deux colonnes (ou deux lignes).*
2. *Un déterminant ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire quelconque de ses autres colonnes (ou à une ligne une combinaison linéaire quelconque de ses autres lignes).*

Le déterminant d'une matrice triangulaire est particulièrement simple à calculer :

Proposition 4.5 (Déterminant d'une matrice triangulaire)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. Alors $det(A)$ est égal au produit des termes diagonaux de A : si $A = (a_{ij})$, alors

$$det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on a intérêt à se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire. Pour cela, se souvenir que

– un déterminant change de signe si on échange deux colonnes ou deux lignes.

– la valeur du déterminant est inchangée si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes). Cela permet de "faire apparaître des zéros".

– Si on multiplie une colonne (ou une ligne) par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ.

– si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Chapitre 5

Diagonalisation des matrices et des endomorphismes

Dans tout le chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou C.

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur K et f un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.

Définition 5.1 (valeur propre) *On appelle valeur propre de f tout scalaire $\lambda \in K$ tel que $f - \lambda id_E$ n'est pas injective.*
L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f.

Remarques :
- Le spectre de f peut être vide.
- $\lambda \in K$ est une valeur propre de f, si et seulement si, il existe un élément x de E, **non nul**, tel que $f(x) = \lambda x$.

Définition 5.2 (Vecteur propre)
On appelle vecteur propre de f tout élément x **non nul** *de E pour lequel il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

Remarque : Le scalaire λ associé au vecteur propre x dans la définition précédente est une valeur propre de f. En effet,

$$(f - \lambda id_E)(x) = f(x) - \lambda x = 0 \ .$$

Donc $Ker(f - \lambda id_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui signifie que λ est une valeur propre de f.

Définition 5.3 (Espace propre)
Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à λ le sous-espace vectoriel $V(\lambda)$ de E défini par

$$V(\lambda) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} = Ker(f - \lambda id_E).$$

Attention à bien noter l'équivalence entre $f(x) = \lambda x$ et $x \in Ker(f - \lambda id_E)$.

Proposition 5.1 (Propriétés élémentaires)

1. *Un scalaire λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow dim Ker(f - \lambda id_E) \geq 1$.*
2. *Un vecteur $x \in E$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ $\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \in V(\lambda)$.*
3. *Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de f, alors $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0_E\}$.*
4. *Plus généralement, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f distinctes deux à deux, alors la somme $V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_p)$ est directe.*

Dans le cas particulier (et qui nous intéresse le plus) de la dimension finie, on a les propriétés supplémentaires suivantes :

Proposition 5.2 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors*

Un scalaire λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow (f - \lambda id_E)$ n'est pas bijective.

En dimension finie, les valeurs propres sont toujours en nombre fini.

Proposition 5.3 *Le nombre de valeurs propres est au plus de $dim(E)$.*

5.2 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K.

Définition 5.4 *On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in K$ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

On appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ toute matrice colonne X de format $(n, 1)$ **non nulle** *vérifiant $AX = \lambda X$.*

L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A.

En particulier, un critère très important est le suivant :

Lemme 5.1 $\boxed{\lambda \in K \text{ est valeur propre de } A\text{, si et seulement si, } det(A - \lambda I_n) = 0.}$

Proposition 5.4
Si A est la matrice représentant un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dans une base B alors :
- *$\lambda \in K$ est valeur propre de $A \Leftrightarrow \lambda$ est valeur propre de f.*
- *Un vecteur x est vecteur propre de $f \Leftrightarrow$ la matrice X représentant x dans la base B est vecteur propre de A.*

Proposition 5.5
1. *Si A est une matrice triangulaire, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de A.*
2. *Si A et B sont semblables, alors A et B ont mêmes valeurs propres.*

5.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans tout ce paragraphe, E est de dimension finie.

5.3.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 5.5 *On dit qu'un endomorphisme f de $L(E)$ est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice de f dans la base B soit une matrice diagonale.*

Attention ! Ne pas confondre f diagonalisable et f bijective. Il n'y a aucun rapport entre l'une et l'autre notion.

Remarque : Comme nous le verrons plus loin, il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables.

Le théorème suivant est le plus important du chapitre :

Théorème 5.1 (Caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable)

Un endomorphisme f de $L(E)$ est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base B de E formée de vecteurs propres de f.

Si B est une base de E de vecteurs propres de f, alors la matrice $M_B(f)$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de f.

Proposition 5.6 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est diagonalisable*
2. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de f, alors $V(\lambda_1)+\cdots+V(\lambda_k) = E$.*
3. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de f, alors*
$$\sum_{i=1}^{k} dim(V(\lambda_i)) = dim(E)\ .$$

Voici un critère simple de diagonalisation :

Proposition 5.7 *Si E est de dimension n et que f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable. Dans ce cas, chaque sous-espace propre de f est de dimension* 1*.*

Attention, cette condition suffisante n'est pas nécessaire ! Il existe des endomorphismes diagonalisables ayant moins de n valeurs propres (l'endomorphisme nul a pour seule valeur propre 0).

5.3.2 Matrices diagonalisables

Définition 5.6 *On dit que $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe Q matrice d'ordre n inversible telle que la matrice $A' = Q^{-1}AQ$ soit une matrice diagonale.*

Attention ! Ne pas confondre A diagonalisable et A inversible. Il n'y a aucun rapport entre l'une et l'autre notion.

Remarques :

- Il existe des matrices réelles et complexes qui ne sont diagonalisables, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans C.
  Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Il existe des matrices qui sont diagonalisables dans C, mais pas dans $\mathbb{R}$.
  Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 5.2 *Soit f un endomorphisme de E représenté par A dans une base B de E. Alors*

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow A \text{ est diagonalisable.}$$

Si, de plus, B' est une base de vecteurs propres de f, alors la matrice $P = P_{BB'}$ est telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

5.4 Polynôme caractéristique

5.4.1 Le polynôme caractéristique

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$. Soit A la matrice représentant f dans une base arbitraire B de E. Si λ est un scalaire, nous avons déjà démontré l'équivalences entre les assertions suivantes :

1. λ est valeur propre de f.
2. $f - \lambda id_E$ est une application linéaire non bijective.
3. λ est une valeur propre de A
4. $A - \lambda I_n$ est une matrice non inversible.
5. $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Ceci conduit à la définition :

Définition 5.7 *On appelle polynôme caractéristique d'une matrice $A = (a_{ij})_n$ le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$. On note*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) \ .$$

Il faut savoir, au moins pour vérifier ses calculs, que

- $P_A(X)$ est un polynôme de degré n en X, à coefficients dans K.
- le coefficient dominant (celui de X^n) de P_A est $(-1)^n$.
- le coefficient constant est $det(A)$.
- le coefficient de degré $(n-1)$ est $(-1)^{n-1}Trace(A)$.

La démonstration de toutes ces propriétés est hors programme.

Proposition 5.8

1. *A et sa transposée A^T ont même polynôme caractéristique.*
2. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Théorème 5.3 *Soit $f \in L(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice représentant f dans une base de E ne dépend pas du choix de cette base : on l'appelle polynôme caractéristique de f et on le note P_f.*

5.4.2 Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique des valeurs propres

Définition 5.8 *Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.*

- *On appelle* **multiplicité algébrique** *de la valeur propre* λ*, la multiplicité de* λ *comme racine du polynôme caractéristique de* f*, c'est-à-dire le plus grand entier* k *tel que* $(X-\lambda)^k$ *divise le polynôme caractéristique* $P_f(X)$*.*
- *On appelle* **multiplicité géométrique** *de la valeur propre* λ*, la dimension du sous-espace propre* $V(\lambda)$*.*

Proposition 5.9 *Soit* $f \in L(E)$ *et* λ *une valeur propre de* f*. Alors la multiplicité géométrique de* λ *est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de* λ*.*

En particulier, si λ *est racine simple de* P_f *la dimension de* $V(\lambda)$ *est égale à 1.*

Théorème 5.4 (C.N.S. de diagonalisation)
Pour qu'un endomorphisme $f \in L(E)$ *soit diagonalisable, il faut et il suffit que son polynôme caractéristique ait* n *racines dans* K *(distinctes ou confondues) et que l'ordre de multiplicité algébrique de toute valeur propre de* f *soit égal à l'ordre de multiplicité géométrique de cette valeur propre.*

En pratique : Si $A \in M_n(K)$,
- On calcule les valeurs propres de A en résolvant l'équation $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ et on détermine ainsi la multiplicité algébrique de chaque valeur propre.
- Pour déterminer l'espace propre $V(\lambda)$ associé à une valeur propre λ, il suffit de résoudre l'équation $AX = \lambda X$, qui admet toujours des solutions non nulles.
- Pour une valeur propre λ dont la multiplicité algébrique est 1, on sait que $V(\lambda)$ est de dimension 1. Donc, pour déterminer $V(\lambda)$, il suffit de trouver un seul vecteur propre pour avoir une base de $V(\lambda)$.
- Pour une valeur propre λ dont la multiplicité algébrique r est strictement supérieure à 1, on peut chercher une famille de r vecteurs propres associés à λ. Cette famille sera alors une base de $V(\lambda)$. Mais ce n'est pas toujours possible : si $dim(V(\lambda)) < r$, alors A n'est pas diagonalisable.

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou C.

5.5 Calcul des puissances d'une matrice

Proposition 5.10 *Soient* $A \in M_n(K)$ *une matrice diagonalisable et* P *une matrice inversible de* $M_n(K)$ *telle que* $D := P^{-1}AP$ *soit diagonale. Alors*

$$\forall k \geq 1 , \qquad A^k = PD^kP^{-1} .$$

De plus, D^k est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux s'obtiennent en élevant ceux de D à la puissance k :

$$\text{si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{alors } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$