Exercices corrigés algèbre linéaire

Jean-Jérôme Casanova

Exercice 1 (Vérifications de linéarité)

a) L'application $f : (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z + 1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est-elle linéaire ?

b) L'application $g : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, y + 5z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle linéaire ?

c) L'application $h : (x, y, z) \mapsto x^2 + y$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est-elle linéaire ?

d) Pour chaque α de $\mathbb{R}$, on définit une application f_α de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f_\alpha(x, y, z) = (x + y + z, \alpha, \alpha xy)$.
Pour quelles valeurs de α l'application f_α est-elle linéaire ?

e) L'application $\varphi : P \mapsto P' - P^2$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est-elle linéaire ?

f) L'application $\varphi : P \mapsto (X^2 + 1)P'(X - 3)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est-elle linéaire ?

Exercice 2 (Partiel, 2016)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) Pour $E = \mathbb{R}$, on définit $f : E \to E$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

b) Pour $E = \mathbb{R}^4$, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \ldots, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1$.

c) Pour $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues, on définit $\Phi : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$ par
$\Phi(f) = \left(x \mapsto \int_0^{x^2} f(y)\, dy\right)$.

d) Pour E un espace vectoriel et p une application linéaire de E dans lui-même, on définit $f : E \to E$ par $f(x) = p(p(x))$.

Exercice 3 (Autour des endomorphismes nilpotents)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'une certaine puissance de f est nulle. On appelle *indice de nilpotence de f* le plus petit entier p vérifiant : $f^p = 0$ mais $f^{p-1} \neq 0$.

(a) Montrer que si x est un vecteur vérifiant $f^{p-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une famille libre de E.

(b) En déduire qu'on a toujours $p \leq n$, et que $f^n = 0$.

(c) On suppose que l'indice de nilpotence de f est n. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

2. On suppose que pour tout x de E il existe $p_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On définit trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2e_1 - 4e_2 + e_3 \\ v_2 &= -e_1 \\ v_3 &= e_2 - 2e_1\,. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{V}$ la famille (v_1, v_2, v_3). C'est une base de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi ?).
On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 5

Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. (a) Décrire le noyau de T.

   (b) Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$. On la note A.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

   (a) Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

   (b) Ecrire la matrice de T dans la base (f_1, f_2, f_3). On la note B.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 6

1. Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. Soient $a_1, .., a_n$ des réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Exercice 7
On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 8
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.

Exercice 9
Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On note Φ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les valeurs propres de Φ.

3. Dire si Φ est diagonalisable.

Correction 1

a) Soit E et F deux espaces vectoriels et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors on a nécessairement $T(0_E) = T(0.0_E) = 0.T(0_E) = 0_F$ (une application linéaire envoie 0 sur 0).

Dans le cas qui nous intéresse on a :

$$f(0,0,0) = 1 \neq 0,$$

donc f n'est pas une application linéaire (il s'agit en fait d'une application dite affine, en dimension 1 $x \mapsto ax + b$ est affine si $b \neq 0$ et $x \mapsto ax$ est linéaire).

b) Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(X_1 + \lambda.X_2) = f(X_1) + \lambda.f(X_2)$:

$$\begin{aligned} f(X_1 + \lambda.X_2) &= f((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)) \\ &= (x_1 + \lambda x_2 + 2(y_1 + \lambda y_2) - 3(z_1 + \lambda z_2), y_1 + \lambda y_2 + 5(z_1 + \lambda z_2)) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, y_1 + 5z_1) + \lambda.(x_2 + 2y_2 - 3z_2, y_2 + 5z_2) \\ &= f(X_1) + \lambda.f(X_2). \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^2$.

c) Ici le terme en x^2 nous indique que l'application ne va pas être linéaire. En effet si on calcule:

$$\begin{aligned} &f((1,0,0) + (1,0,0)) = f(2,0,0) = 4 \\ &f(1,0,0) + f(1,0,0) = 2. \end{aligned}$$

Ainsi $f((1,0,0)+(1,0,0)) \neq f(1,0,0)+f(1,0,0)$ donc f n'est pas une application linéaire.

d) La première composante de l'application f_α (le morceau en $x+y+z$) va être linéaire indépendamment de α. La partie problématique, du point de vue de la linéarité, est le terme en αxy. Ce terme est un produit qui va se comporter comme le terme en x^2 de l'exemple précédent si $\alpha \neq 0$. Pour que l'application f_α soit linéaire il faut que ses deux composantes le soient. L'application f_α devrait donc être linéaire si et seulement si $\alpha = 0$. Vérifions maintenant ce résultat.

On suppose que $\alpha = 0$. On a alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f_0(x, y, z) = (x+y+z, 0)$. On montre ensuite que f_0 est une application linéaire en procédant comme pour b).

Supposons maintenant $\alpha \neq 0$. On cherche un exemple qui met en évidence le défaut de linéarité en se focalisant sur le terme αxy. On a :

$$\begin{aligned} &f_\alpha((1,1,0) + (1,1,0)) = f_\alpha(2,2,0) = (4, 4\alpha) \\ &f_\alpha(1,1,0) + f_\alpha(1,1,0) = (2,\alpha) + (2,\alpha) = (4, 2\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi $f_\alpha((1,1,0)+(1,1,0)) \neq f_\alpha(1,1,0)+f_\alpha(1,1,0)$ et f_α n'est pas une application linéaire (lorsque $\alpha \neq 0$).

e) Comme précédemment le terme en P^2 nous indique que l'application n'est pas linéaire. En effet:

$$\varphi(1+1) = \varphi(2) = (2)' + (2)^2 = 4$$
$$\varphi(1) + \varphi(1) = 2.((1)' + (1)^2) = 2.(1) = 2.$$

Donc $\varphi(1+1) \neq \varphi(1) + \varphi(1)$ et φ n'est pas une application linéaire.

f) Dans cet exemple on pourrait penser, comme précédemment, que la présence d'une terme en X^2 va venir perturber la linéarité de l'application. Cependant il faut faire attention, ici la variable en argument de φ est P et non X. Ainsi pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, l'application $P \mapsto QP$ (i.e. la multiplication par le polynôme Q) est une application linéaire.

De même l'application $P \mapsto P'$ est linéaire et finalement l'application $P \mapsto P(X-3)$ est aussi linéaire (un exemple d'application de cette fonction pour fixer les idées : si $P = X^2 + 1$, $P(X-3) = (X-3)^2 + 1$).

L'application φ est donc linéaire comme composée de trois applications linéaires. On peut aussi le démontrer directement. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\varphi(P + \lambda Q) &= (X^2+1)(P+\lambda Q)'(X-3) \\
&= (X^2+1)(P' + \lambda Q')(X-3) \quad \text{en utilisant la linéarité de la dérivation} \\
&= (X^2+1)\left[P'(X-3) + \lambda Q'(X-3)\right] \\
&= (X^2+1)P'(X-3) + \lambda(X^2+1)Q'(X-3) \\
&= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).
\end{aligned}$$

L'application φ est donc une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

Correction 2

a) On a $f(0) = 1$ donc f n'est pas une application linéaire.

b) On a $f(0,0,0,0) = 1$ donc f n'est pas une application linéaire.

c) Vérifions que Φ est une application linéaire. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\Phi(f + \lambda g)(x) &= \int_0^{x^2} (f + \lambda g)(y)dy \\
&= \int_0^{x^2} (f(y) + \lambda g(y))dy \\
&= \int_0^{x^2} f(y)dy + \lambda \int_0^{x^2} g(y)dy \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x).
\end{aligned}$$

La relation précédente étant vraie pour tout $x \in [0,1]$ on en déduit que $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$ et l'application Φ est bien une application linéaire de E dans lui même.

d)La composée d'applications linéaires est linéaire. En effet soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (en supposant que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). On a :

$$f(x + \lambda y) = p(p(x + \lambda y)) = p(p(x) + \lambda p(y)) = p(p(x)) + \lambda p(p(y)),$$

en utilisant deux fois la linéarité de l'application p. Ainsi l'application f est bien une application linéaire de E dans lui même.

Correction 3

1)a) Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}$. Soit x un vecteur de E vérifiant $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrons tout d'abord la propriété suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^i(x)$ est différent de 0 si et seulement si $i \leq p-1$. En effet, p étant l'indice de nilpotence de f, on a $f^p = 0$ et aussi $f^{p+k} = f^k \circ f^p = f^k \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (ici $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans E, dans la suite on notera tout simplement 0 à la place de $0_{\mathcal{L}(E,E)}$). D'autre part, si, par l'absurde, on avait $f^i(x) = 0$ avec $i < p-1$ (le cas $i = p-1$ étant impossible par hypothèse sur x) il existerait $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $i + k = p-1$ et $f^{p-1}(x) = (f^k \circ f^i)(x) = f^k(f^i(x)) = f^k(0) = 0$ ce qui est une contradiction avec $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrons maintenant que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0, \quad (\star)$$

avec la convention $f^0 = Id_{\mathcal{L}(E)}$. On compose alors la somme précédente avec f^{p-1} :

$$f^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^{p-1+i}(x) = \lambda_0 f^{p-1}(x).$$

Ainsi $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$ et puisque $f^{p-1}(x) \neq 0$ on en déduit que $\lambda_0 = 0$. On continue alors en procédant par récurrence. Nous venons de faire l'initialisation. Soit $k < p-1$ un indice quelconque mais fixé. Supposons que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$. Montrons que $\lambda_{k+1} = 0$. On compose $(\star)$ avec f^{p-2-k} :

$$f^{p-2-k}\left(\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \lambda_{k+1} f^{p-1}(x) = 0.$$

Ainsi $\lambda_{k+1} = 0$ ce qui conclut l'hérédité et finalement on obtient que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) E étant un espace vectoriel de dimension n on ne peut pas avoir de famille libre possédant p éléments avec $p > n$. Ainsi $p \leq n$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p + k = n$ et, comme montré précédemment, $f^n = f^{k+p} = f^k \circ f^p = f^k \circ 0 = 0$.

c) Si l'indice de nilpotence de f est n alors, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. D'après le point a) la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre. Puisque cette famille possède n éléments il s'agit d'une famille libre maximale dans E (qui est de dimension n) et c'est donc une base.

2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (les p_i existent par hypothèse). On note $p_m = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ (et on remarque

que $f^{p_m}(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$). Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de E, on a :

$$f^{p_m}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f^{p_m}(e_i) = 0.$$

Ainsi $f^{p_m} = 0$ et f est un endomorphisme nilpotent. En utilisant 1)b) on en déduit que $f^n = 0$.

Correction 4

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est génératrice minimale. En effet, e_1 est obtenu directement à partir de v_2. Le vecteur $e_2 = v_3 - 2v_2$ et de même on obtient $e_3 = v_1 + 2v_2 + 4(v_3 - 2v_2)$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\langle e_1, e_2, e_3\rangle \subset \mathrm{Vect}\langle v_1, v_2, v_3\rangle \subset \mathbb{R}^3$ et la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice minimale.

On veut écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{V}$. La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ est obtenu en concaténant les vecteurs colonnes $u(v_1)$, $u(v_2)$ et $u(v_3)$ exprimés dans la base $\mathcal{V}$. Commençons par exprimer $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{V}$. On a :

$$u(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = 11v_1 - 90v_2 + 51v_3$$

$$u(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1 + 6v_2 - 3v_3$$

$$u(v_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -v_1 + 11v_2 - 4v_3$$

Pour exprimer les vecteurs, par exemple $(10, 7, 11)$ (notons que cette écriture est équivalente à $10e_1 + 7e_2 + 11e_3$), dans la base $\mathcal{V}$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que:

$$10e_1 + 7e_2 + 11e_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,$$

puis on résout le système. Finalement la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{V}$ est donnée par:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u) = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -90 & +6 & 11 \\ 51 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Correction 5

1)a)Soit $\overrightarrow{U} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. On a

$$T(\overrightarrow{U}) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xe_3 + y(-e_1 + e_2 + e_3) + ze_3 = -ye_1 + ye_2 + (x + y + z)e_3.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{U}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(T)\Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x+y+z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=k_1,\ k_1\in\mathbb{R}\\y=0\\z=-k_1\end{cases}\quad\Leftrightarrow \overrightarrow{U}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ k_1\in\mathbb{R},$$

et $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Vect}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$.

b)Pour écrire la matrice de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B}$ on calcul $T(e_1)$, $T(e_2)$ et $T(e_3)$ que l'on exprime dans la base $\mathcal{B}$ puis on concatène ces vecteurs pour former A. Les vecteurs $T(e_i)$ $(i=1,2,3)$ étant donnés dans l'énoncé on a directement :

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

2)a) On a

$$\begin{cases}f_1=e_1-e_3\\f_2=e_1-e_2\\f_3=-e_1+e_2+e_3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}e_3=e_1-f_1=f_2+f_3\\e_1=f_2+e_2=f_1+f_2+f_3\\e_2=f_1+f_3\quad(L_3\leftarrow L_3+L_1)\end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}\langle e_1,e_2,e_3\rangle\subset\mathrm{Vect}\langle f_1,f_2,f_3\rangle$. La famille (f_1,f_2,f_3) est donc génératrice minimale et c'est une base.

b)On a :

$$T(f_1)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\quad\text{en remarquant que } f_1\in\mathrm{Ker}(T),$$

$$T(f_2)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=f_2,$$

$$T(f_3)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=f_3.$$

Ainsi la matrice B de T dans la base (f_1,f_2,f_3) est donnée par :

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

3) On va vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} en même temps. P est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $PX = Y$. On fixe donc $Y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ et on résout le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_1 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 + y_3 \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Le système précédent admet donc une unique solution, P est inversible et P^{-1} est donnée par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1y_1 + 1y_2 + 0y_3 \\ x_2 = 1y_1 + 0y_2 + 1y_3 \\ x_3 = 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \end{cases}.$$

Deuxième méthode : P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{V}$, elle est donc inversible. La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{V}$ à la base $\mathcal{B}$. Pour écrire cette matrice on utilise la relation (obtenue précédemment dans l'exercice) :

$$\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$$

Cela nous donne directement P^{-1} en concaténant les e_i exprimés en fonction des f_i. Finalement la formule du changement de base sur les matrices donne :

$$A = PBP^{-1}.$$

Rappel :

Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note A (respectivement B) la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur de E. Soit X le vecteur colonne associé à $\boldsymbol{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ et Y le vecteur colonne associé à $\boldsymbol{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a la relation $X = PY$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si on calcul $f(\boldsymbol{u})$ et que l'on exprime le résultat dans la base $\mathcal{B}$ on a :

$$[f(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}} = AX.$$

Calculons maintenant $f(\boldsymbol{u})$ en passant par la base $\mathcal{B}'$. On a

$$[f(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}'} = BY.$$

On passe d'une expression à l'autre en utilisant la matrice de passage P donc:

$$[f(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}} = P[f(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}'},$$

soit

$$AX = PBY,$$

mais $Y = P^{-1}X$ donc finalement:

$$AX = PBP^{-1}X.$$

Cette relation implique donc l'égalité matricielle $A = PBP^{-1}$.

Correction 6

1) On effectue les opérations suivantes (qui ne changent pas la valeur du déterminant) : $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

On peut ensuite développer suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et par multilinéarité du déterminant on obtient :

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2)On procède comme précédemment. Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ on effectue les opérations : $L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \ldots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \ldots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

et en utilisant la multilinéarité du déterminant on obtient :

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

On recommence alors le même procédé (cette fois en appliquant les opérations : $L_i \leftarrow L_i - a_2 L_{i-1}$ avec $i \in \{2, \dots, n-1\}$) et par récurrence immédiate on obtient :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Correction 7

Pour calculer D_1 on essaye, en utilisant des opérations élémentaires, d'obtenir une ligne (ou une colonne) possédant un seul terme non nul (ce qui permet de développer par rapport à cette ligne/colonne avec un minimum de calcul). Ici on effectue $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$, on obtient:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On développe ensuite par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On développe de nouveau par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Pour calculer D_2 on introduit la fonction polynomiale suivante :

$$D(x) = \begin{vmatrix} a+b+c+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+b+c+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+b+c+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+b+c+x \end{vmatrix}$$

Si l'on retranche la première colonne aux autres on se retrouve avec un déterminant où la première colonne contient des termes de la forme constante $+ x$ et les autres colonnes contiennent uniquement des constantes. Si l'on développe alors par la première colonne on montre que $D(x)$ est un polynôme de degré 1 en x. Ainsi il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D(x) = C_1 x + C_2$. On remarque tout de suite que $D(0) = C_2 = D_2$. Nous devons donc déterminer les deux constantes (C_1, C_2). Pour cela on va calculer $D(x)$ pour des valeurs qui simplifient le calcul.

Distinguons tout d'abord le cas $b = c$. Dans ce cas il n'est pas nécessaire d'introduire la fonction polynomiale $D(x)$ on peut procéder directement. On commence par sommer toute les colonnes sur la première ($C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$):

$$\begin{vmatrix} a+5b & b & b & b \\ a+5b & a+2b & b & b \\ a+5b & b & a+2b & b \\ a+5b & b & b & a+2b \end{vmatrix}$$

On utilise alors la multilinéarité du déterminant :

$$(a+5b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a+2b & b & b \\ 1 & b & a+2b & b \\ 1 & b & b & a+2b \end{vmatrix}$$

Puis on effectue des opérations pour mettre des zéros dans la première colonne ($L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$) :

$$(a+5b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a+5b)(a+b)^3$$

La méthode précédente (tout sommer sur la première colonne puis factoriser et faire apparaître des zéros) fonctionne sur un grand nombre d'exemples et vaut le coup d'être mémorisée.

Passons maintenant au cas $b \neq c$. On rappel que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit des coefficient sur la diagonale. Ainsi

$$D(-c) = \begin{vmatrix} a+b & b-c & b-c & b-c \\ 0 & a+b & b-c & b-c \\ 0 & 0 & a+b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^4$$

$$D(-b) = \begin{vmatrix} a+c & 0 & 0 & 0 \\ c-b & a+c & 0 & 0 \\ c-b & c-b & a+c & 0 \\ c-b & c-b & c-b & a+c \end{vmatrix} = (a+c)^4$$

On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} D(-c) = -cC_1 + C_2 = (a+b)^4 \\ D(-b) = -bC_1 + C_2 = (a+c)^4 \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{(a+b)^4 - (a+c)^4}{b-c} \\ C_2 = \dfrac{b(a+b)^4 - c(a+c)^4}{b-c} \end{cases}$$

Ainsi $D_2 = \dfrac{b(a+b)^4 - c(a+c)^4}{b-c}$.

Pour calculer D_3 on fait encore une fois apparaître des zéros. On commence par effectuer l'opération : $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & -2a & 0 & 3 \\ b & a & -3b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

On développe alors suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 3 \\ a & -3b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

On recommence $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 3 \\ a & -3b & -2a & 0 \\ b & 0 & -3b & a \end{vmatrix}$$

On développe alors suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} -2a & 0 & 3 \\ -3b & -2a & 0 \\ 0 & -3b & a \end{vmatrix}$$

Finalement on développe suivant la première ligne :

$$-2a \begin{vmatrix} -2a & 0 \\ -3b & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3b & -2a \\ 0 & -3b \end{vmatrix} = 4a^2 + 27b^2.$$

Correction 8

On a toujours l'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)^2$. La matrice A étant supposée diagonalisable il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que :

$$A = PDP^{-1}.$$

De plus, en utilisant l'inversibilité des matrices P et P^{-1} on obtient :

$$x \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow PDP^{-1}x = 0 \Leftrightarrow P^{-1}x \in \mathrm{Ker}(D).$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(D) = P^{-1}\mathrm{Ker}(A)$. En utilisant la relation $A^2 = PD^2P^{-1}$ on montre de même que $\mathrm{Ker}(D^2) = P^{-1}\mathrm{Ker}(A^2)$. Ainsi le problème initiale est maintenant équivalent à montrer que $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Ker}(D^2)$ pour D une matrice diagonale. Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les coefficients sur la diagonale de D. On a l'identité

$$De_i = \lambda_i e_i,$$

pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ i.e. les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de la matrice D associés aux valeurs propres λ_i. Si l'on note $I_D = \{i \in \{1, \cdots, n\} \mid \lambda_i = 0\}$ le noyau de D est donné par :

$$\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}\langle (e_i)_{i \in I_D} \rangle.$$

Si on effectue le même raisonnement pour la matrice D^2 (dont la diagonale est donnée par $(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)$) on obtient

$$\mathrm{Ker}(D^2) = \mathrm{Vect}\langle (e_i)_{i \in I_{D^2}} \rangle,$$

avec $I_{D^2} = \{i \in \{1, \cdots, n\} \mid \lambda_i^2 = 0\}$. Il suffit alors de remarquer que $I_D = I_{D^2}$ pour conclure.

Correction 9

1)Notons

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (que l'on notera aussi $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ ou E_{ij} désigne la matrice remplie de 0 sauf en position (i, j) ou il y a un 1). Pour écrire la matrice de Φ dans la base canonique on calcul :

$$\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21}$$
$$\Phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{22}$$
$$\Phi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4E_{11} + E_{21}$$
$$\Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4E_{12} + E_{22}$$

Ainsi la matrice Φ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Si l'on ne remarque pas de combinaisons simples on développe suivant la première colonne (puis suivant les coefficients notés en rouge):

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & {\color{red}1-\lambda} & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & {\color{red}4} & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)^2(3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de A sont -1 et 3.

3)Φ est diagonalisable si et seulement si la dimension des sous espaces propres associés à -1 et 3 (i.e. la multiplicité géométrique de ces valeurs propres) est égale à la dimension algébrique de ces valeurs propres (i.e. l'ordre de -1 et 3 en tant que racine du polynôme caractéristique de A, ici 2 pour -1 et 3). En résumé Φ est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(A+I)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A-3I)) = 2$. Déterminons une base de $\mathrm{Ker}(A+I)$:

$$
\begin{aligned}
X = (x,y,z,t)^T \in \mathrm{Ker}(A+I) &\Leftrightarrow (A+I)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4z \\ 2y+4t \\ x+2z \\ y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4z = 0 \\ 2y+4t = 0 \\ x+2z = 0 \\ y+2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \\ y+2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = k_1,\ k_1 \in \mathbb{R} \\ t = k_2,\ k_1 \in \mathbb{R} \\ x = -2k_1 \\ y = -2k_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant libre ils forment une base de $\mathrm{Ker}(A+I)$ qui est donc de dimension 2. Pour $\text{Ker}(A - 3I)$ on a :

$$\begin{aligned}
X = (x, y, z, t)^T \in \text{Ker}(A - 3I) &\Leftrightarrow (A - 3I)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 4z \\ -2y + 4t \\ x - 2z \\ y - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 0 \\ -2y + 4t = 0 \\ x - 2z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z0 \\ y = 2t0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = k_1,\ k_1 \in \mathbb{R} \\ t = k_2,\ k_1 \in \mathbb{R} \\ x = 2k_1 \\ y = 2k_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres et forment une base de $\text{Ker}(A - 3I)$ qui est donc de dimension 2. En conclusion l'ordre géométrique et algébrique des valeurs propres de Φ coïncident donc Φ est diagonalisable.