

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

RAPPORT DE STAGE M1

Problèmes inverses et parcimonie

Auteur : Jean Cazalis

Maître de Stage : Charles Dossal

1^{er} Avril - 30 Juillet 2016

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Description générale du contexte	4
1.2	Introduction générale et liens avec les autres disciplines	4
1.3	Contexte mathématique	4
1.4	Minimisation ℓ^1	5
1.4.1	Cas non bruité	5
1.4.2	Cas bruité	6
1.4.3	Équivalence ℓ^1/ℓ^0	6
1.5	Plan du rapport	6
2	Approche géométrique	8
2.1	Généralités sur les polytopes	8
2.2	Équivalence ℓ^1/ℓ^0	9
2.3	Équivalence locale	11
2.4	Équivalence ponctuelle	11
2.5	Cas des projections aléatoires uniformément distribuées	12
2.5.1	Transitions de phases	12
2.5.2	Résultats numériques	15
3	Les certificat duaux	16
3.1	Quelques éléments d'analyse convexe	16
3.2	Le critère de Fuchs	17
3.2.1	Condition suffisante de Fuchs	18
3.2.2	Conséquences	18
3.3	Condition nécessaire et suffisante de convergence linéaire	20
3.4	Super-résolution (ou le cas continu)	21
3.5	Conclusion	24
4	Acquisition comprimée	25
4.1	Propriété d'isométrie restreinte (RIP)	25
4.1.1	Cas non bruité	25
4.1.2	Cas bruité	25
4.1.3	Preuves	26
4.1.4	Résultats numériques	27
4.2	Sélection par minimisation ℓ^1	27
4.3	L'Exact Recovery Coefficient (ERC)	29
4.3.1	Normes d'opérateurs	29
4.3.2	Quelques définitions	29
4.3.3	Condition de corrélation	29
4.3.4	Application à LASSO	31
5	Géométrie convexe du Basis Pursuit	32
5.1	Cône tangent et problème inverse	32
5.2	Condition suffisante par les épaisseurs gaussiennes	33
5.3	Quelques propriétés des épaisseurs gaussiennes	34
5.4	Application à la minimisation ℓ^1	35
6	Pourquoi le Basis Pursuit ?	36
6.1	Liens avec la géométrie	37
6.2	Fonction d'information	37
6.3	Optimalité du BP	38
6.3.1	Algorithme de minimisation ℓ^p et cas $p = 1$	39
6.3.2	Optimalité du BP pour le cas $0 < p < 1$	39

7 Conclusion générale	40
7.1 Comparaisons numériques des différentes approches	40
7.2 Impressions générales	40
7.3 Remerciements	41
A Preuves de la section 2	42
A.1 Preuves de la section 2.2	42
A.2 Preuves de la section 2.3	42
B Preuves de la section 6	44
B.1 Preuve du lemme 11	44
B.2 Preuve du théorème 22	44
B.3 Preuve du théorème 24	45
B.4 Preuve du théorème 25	46

Résumé du stage

Soient $0 < d < n$ deux entiers et $\Phi = (\phi_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{d, n}(\mathbb{R})$ un opérateur linéaire. On observe un signal $s^* = \Phi c^*$, combinaison linéaire des colonnes de Φ . On cherche à reconstruire c^* . Cependant, le problème étant mal posé puisque $d < n$, il faut rajouter quelques hypothèses. David Donoho est le premier à s'intéresser à la recherche des solutions les plus parcimonieuses c'est-à-dire des représentations de s^* faisant intervenir le moins possible de composantes non nulles. Cela se traduit par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_0 \text{ tel que } \Phi c = s^*, \quad (1)$$

où $\|c\|_0$ est égal au nombre de composantes non nulles de c . Malheureusement, ce problème est NP-complet et il faut trouver une alternative. Pour cela, on peut le transformer en problème convexe à l'aide d'une relaxation bien choisie. Dans ce stage, j'étudie principalement la relaxation par norme ℓ^1 proposée par Donoho pour ce contexte. On s'intéresse donc au problème de minimisation :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_1 \text{ tel que } \Phi c = s^*. \quad (2)$$

On cherche à savoir dans quelles conditions (sur c^* , sur s^* et sur Φ) la relaxation ℓ^1/ℓ^0 est exacte (les problèmes (1) et (2) ont une même unique solution, on appelle ce phénomène *équivalence ℓ^1/ℓ^0*) robuste (les solutions de (1) et (2) sont proches) et dans quelles conditions c^* est identifiable via la minimisation ℓ^1 (la solution de (2) est unique et égale à c^*). On propose plusieurs approches de ce problème.

D'abord, on peut associer à Φ un polytope P (appelé *polytope quotient*) dont la frontière permet de caractériser les solutions de (2). En effet, \hat{c} est solution de (2) si et seulement si $\Phi(\frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|_2}) \in \partial P$. Cela équivaut à l'existence d'un hyperplan (relativement à $\text{Im } \Phi$) qui passe par $\Phi(\frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|_2})$ et qui sépare une face de P du reste de P . Cette considération associée à la littérature sur les polytopes donne de nombreuses informations sur l'équivalence ℓ^1/ℓ^0 . Cette approche a principalement été formalisée par David Donoho.

Ensuite, on utilisera l'analyse convexe pour construire des *certificats duaux* qui garantiront l'existence d'un tel hyperplan. Jean-Jacques Fuchs est l'un des précurseurs de cette méthode. Cette approche est en grande partie locale.

Par la suite, on étudiera quelques hypothèses d'*acquisition comprimée*. Cette théorie très populaire a été principalement développée par Emmanuel Candès et Terence Tao. Elle se base sur quelques conditions globales, relativement faciles à vérifier, sur Φ .

Enfin, on s'intéressera aux *épaisseurs gaussiennes* qui fourniront de bonnes estimations sur le nombre de mesures suffisantes d pour retrouver c^* .

1 Introduction

1.1 Description générale du contexte

Ce stage s'est déroulé à l'*Institut de Mathématiques de Bordeaux* (IMB), encadré par *Charles Dossal*, maître de conférences et membre de l'équipe *Image, Optimisation et Probabilités*.

1.2 Introduction générale et liens avec les autres disciplines

Dans un grand nombre de domaines scientifiques, les objets étudiés sont modélisés par des signaux, c'est pourquoi leur étude est primordiale. Ainsi, toute donnée audio, vidéo ou image est représentée par un signal de dimension finie (numérique) ou continu (optique). La tomographie cherche à reconstruire le volume d'un objet à partir de mesures extérieures. La reconstitution de signaux est cruciale aussi dans d'autres disciplines comme, par exemple, l'imagerie médicale, l'astronomie ou la mécanique des matériaux.

En général, on ne peut pas évaluer directement un signal mais plutôt réaliser des mesures (en géophysique, on envoie des ondes acoustiques dans le sol et on mesure leur temps de retour) et essayer de le reconstruire à partir de celles-ci (le temps de retour de l'onde permet d'accéder à l'indice du sol qui donne des informations sur sa constitution). L'approche classique exigeait que la fréquence d'échantillonnage soit au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale du signal pour que la reconstruction soit réussie. Le justification théorique de ce paradigme se trouve principalement dans le *théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon*.

Depuis le début des années 90, certains chercheurs, comme David Donoho, se sont intéressés à une autre approche : la *reconstruction parcimonieuse*. On dispose d'un ensemble redondant de signaux élémentaires, appelé *dictionnaire*, qui permet d'exprimer le signal simplement (souvent en tant que combinaison linéaire). On cherche ensuite à reconstruire le signal en utilisant le moins possible d'éléments du dictionnaire. Heuristiquement, cette approche peut se justifier de trois manières :

- on sait *a priori* que le signal est parcimonieux,
- les données que l'on traite sont incohérentes entre elles donc peu de signaux élémentaires sont *réellement* utiles,
- philosophiquement, cela correspond au *Rasoir d'Occam* : “les causes ne doivent pas être multipliées sans nécessité”, c'est-à-dire que parmi toutes les explications d'un phénomène, l'explication la plus simple est la plus probable.

Ainsi, on est naturellement confronté à un problème d'optimisation où la fonctionnelle mesure la parcimonie des signaux étudiés. Malheureusement, la plupart de ces fonctions ne sont pas convexes (l'existence d'une solution n'est donc pas nécessairement garantie) et ces problèmes sont souvent NP-complets (ce qui rend difficile l'implémentation d'algorithmes). On peut dénombrer au moins quatre types d'algorithmes qui tentent de résoudre ce genre de problème :

- la recherche par force brute qui devient compliquée à mettre en oeuvre lorsque les dimensions du problème augmentent,
- les algorithmes de minimisation non linéaire qui, souvent, ne trouvent que des minima locaux,
- les algorithmes *gloutons* où on réalise une séquence de choix localement optimaux,
- la relaxation convexe qui consiste à remplacer la mesure de la parcimonie par une fonction convexe qui lui ressemble.

Dans ce rapport, nous nous concentrerons principalement sur la relaxation convexe à l'aide de la norme ℓ^1 .

1.3 Contexte mathématique

On donne maintenant le contexte mathématique général dans lequel on se place. On va donner les premières définitions et poser plusieurs notations qu'on va garder tout le long de ce rapport.

On se place dans l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire canonique et dont la norme ℓ^2 associée est notée $\|\cdot\|_2$. Cet espace est appelé *espace des signaux*. On se donne un *dictionnaire*, c'est-à-dire une famille finie \mathcal{D} de signaux unitaires, appelés *atomes* :

$$\mathcal{D} = (\varphi_\omega)_{\omega \in \Omega},$$

où $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Chaque combinaison linéaire d'atomes est paramétrée par une liste de coefficients que l'on appellera *vecteur coefficient*, c'est-à-dire un élément de \mathbb{R}^n . On note $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Soit c un vecteur coefficient. Son *support* est l'ensemble des indices de ses composantes non nulles :

$$\text{supp}(c) = \{\omega \in \Omega \mid c_\omega \neq 0\}.$$

Le cardinal du support de c est noté :

$$\|c\|_0 = |\text{supp}(c)|.$$

$\|\cdot\|_0$ vérifie les axiomes de séparation et de sous-additivité des normes mais pas l'axiome d'homogénéité. On dira que $c \in \mathbb{R}^n$ est k -parcimonieux ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) si $\|c\|_0 \leq k$. On note \mathcal{P}_k l'ensemble des vecteurs coefficient k -parcimonieux.

Dans le but d'étudier un signal, on s'intéresse à la *matrice de synthèse* Φ du dictionnaire \mathcal{D} qui est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire (on fait délibérément la confusion entre les notations de la matrice et de l'application linéaire) :

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ c &\longmapsto \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \varphi_\omega \end{aligned}.$$

C'est la matrice dont les colonnes sont les atomes de \mathcal{D} . On s'intéresse aussi à la *matrice d'analyse* Φ^* du dictionnaire qui est l'adjointe de Φ :

$$\begin{aligned} \Phi^* &: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto [\langle s, \varphi_\omega \rangle]_{\omega \in \Omega} \end{aligned}.$$

On pose quelques notations utiles. Soit $\Lambda \subset \Omega$ et on note \mathcal{D}_Λ le dictionnaire formé des éléments de \mathcal{D} indexés par Λ . On note Φ_Λ la matrice de synthèse associée à \mathcal{D}_Λ . On rappelle que la *matrice de Gram* G_Λ de Φ_Λ est :

$$G_\Lambda = \Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda = (\langle \varphi_\omega, \varphi_\lambda \rangle)_{(\omega, \lambda) \in \Lambda^2}.$$

G_Λ est inversible si et seulement si \mathcal{D}_Λ forme une famille libre. On notera Φ_Λ^+ l'*inverse généralisé de Moore-Penrose* de Φ_Λ . Si \mathcal{D}_Λ est de rang maximal, on a :

$$\Phi_\Lambda^+ = (\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1} \Phi_\Lambda^*.$$

Si $c \in \mathbb{R}^n$, alors on note $c_\Lambda = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, notation qui sera souvent utilisée. On confondra souvent (selon le contexte) le vecteur c_Λ avec son image à travers l'injection canonique $i_\Lambda: \mathbb{R}^\Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^\Omega = \mathbb{R}^n$.

Enfin, on définit une notion importante que l'on retrouve à plusieurs reprises dans ce rapport.

Définition 1. Soit $\Phi = (\varphi_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $d \times n$ dont les colonnes sont unitaires pour la norme ℓ^2 . La cohérence $\mu(\Phi)$ de Φ est définie par

$$\mu(\Phi) = \max_{i \neq j} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| \in [0, 1].$$

1.4 Minimisation ℓ^1

1.4.1 Cas non bruité

De façon générale, lorsque l'on observe un signal s^* et qu'on sait qu'il peut s'exprimer à travers un certain dictionnaire \mathcal{D} ($s^* \in \text{Im}(\Phi)$ où $\text{Im}(\cdot)$ est l'application image). Par exemple, on réalise d mesures $(\langle \psi_i, c \rangle)_{i=1,\dots,d}$ sur une donnée $c^* \in \mathbb{R}^n$, le dictionnaire \mathcal{D} sera tel que sa matrice d'analyse ait pour lignes les vecteurs ψ_i . On observe :

$$\Phi c^* = s^*.$$

On veut analyser ce signal, c'est-à-dire retrouver les vecteurs coefficient c^* qui le synthétisent. Malheureusement, le problème est souvent mal posé car $n \gg d$ (on essaie de réaliser le moins de mesures possibles dans le but d'économiser, par exemple, du temps de calcul). L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension ≥ 1 . C'est pourquoi on doit rajouter certaines contraintes ou conditions *a priori* au problème. Actuellement, une des pistes la plus explorée est la reconstruction du vecteur coefficient le

plus parcimonieux possible (i.e. dont le support est le plus petit possible) ce qui nous amène à considérer les problèmes suivants :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_0 \text{ tel que } \Phi c = s^* \quad (L_0)$$

et :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|s^* - \Phi c\|_2^2 + \tau^2 \|c\|_0 \quad (Q_0^\tau)$$

où $\tau > 0$ est un paramètre qui mesure à quel point on pénalise la parcimonie de c . Le terme $\|\cdot\|_0$ rend ces problèmes NP-complets. Une méthode classique pour palier ce type de soucis est la relaxation convexe. On remplace $\|\cdot\|_0$ par une norme convexe (pour garantir l'existence de solutions et rendre les problèmes tractables). On sait que la norme ℓ^p (que l'on notera $\|\cdot\|_p$) est convexe si et seulement si $p \geq 1$. La norme ℓ^1 est la plus proche de $\|\cdot\|_0$, elle paraît donc être la meilleure candidate. On justifiera plus amplement ce choix dans la dernière section de ce rapport. Nous allons donc considérer les problèmes suivants :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_1 \text{ tel que } \Phi c = s^* \quad (L_1)$$

et :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|s^* - \Phi c\|_2^2 + \gamma \|c\|_1 \quad (Q_1^\gamma)$$

où γ est un paramètre. Dans la littérature, le problème (L_1) est souvent appelé *Basis Pursuit* tandis que le problème (Q_1^γ) est appelé *LASSO*.

1.4.2 Cas bruité

Dans les faits, les observations que l'on réalise se font souvent à travers des appareils non idéaux ce qui induit un bruit w que l'on peut, dans certains cas, modéliser par :

$$\Phi c^* = s^* + w.$$

Pour que les techniques que l'on met en place puissent être utilisées effectivement, il est nécessaire qu'elles soient robustes aux bruits. Le bruit d'un système est fréquemment modélisé par une fonction gaussienne ou bornée pour la norme ℓ^2 . Si on se fixe un niveau d'erreur maximal δ , on peut adapter le problème (L_0) au bruit avec :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_0 \text{ tel que } \|\Phi c - s^*\|_2 \leq \delta \quad (L_0^\delta)$$

que l'on peut relaxer de la même manière :

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_1 \text{ tel que } \|\Phi c - s^*\|_2 \leq \epsilon, \quad (L_1^\epsilon)$$

où $\epsilon \geq 0$ est un paramètre. Ce problème de minimisation est aussi appelé *méthode des résidus*. Par sa forme, le LASSO est déjà adapté au bruit.

1.4.3 Équivalence ℓ^1/ℓ^0

L'objectif de ce stage est de comprendre dans quelles conditions le problème relaxé (L_1) (resp. (Q_1^γ)), resp. (L_1^ϵ) et le problème original (L_0) (resp. (Q_0^τ) , resp. (L_0^δ)) ont une même unique solution. On appellera ce phénomène *équivalence ℓ^1/ℓ^0* . Cela revient à dire que la relaxation (ou la reconstruction) est *exacte*. On dit que c^* est *identifiable* si les problèmes (L_0) et (L_1) (resp. (Q_0^τ) et (Q_1^γ) , resp. (L_0^δ) et (L_1^ϵ)) générés par $s^* = \Phi c^*$ ont pour unique solution c^* .

Dans le cas bruité, il peut aussi être intéressant d'estimer la solution. On dira que la reconstruction est *robuste* si l'erreur d'approximation (par exemple, l'erreur quadratique) est petite.

1.5 Plan du rapport

Ce rapport se divise en 5 sections qui correspondent à différentes approches (sauf la dernière section) qui, malgré tout, s'interconnectent. La première sera essentiellement géométrique et se base sur l'étude d'un certain polytope construit à partir du dictionnaire Φ . Une seconde approche en termes d'analyse convexe fera intervenir la dualité de Fenchel-Legendre et la construction de certificats duaux, vecteur

garantissant l'existence de solutions au problème (L_1). Par la suite, on étudiera une approche métrique connue sous le nom d'acquisition comprimée. Ses critères sont rarement vérifiés dans la pratique, mais les conclusions qu'elle porte résistent efficacement au bruit. Enfin, une approche hybride en termes d'épaisseurs gaussiennes viendra compléter ce panorama de la minimisation ℓ^1 .

2 Approche géométrique

On cherche à reconstruire un vecteur coefficient $c^* \in \mathbb{R}^n$ à partir d'une observation $s^* \in \mathbb{R}^d$ obtenue à l'aide d'une matrice Φ de taille $d \times n$. On s'intéresse plus particulièrement aux solutions du problème (L_0). Comme on l'a déjà vu, ce problème est NP-complet et on voudrait savoir si la relaxation ℓ^1 est exacte. On appelle ce phénomène *équivalence ℓ^1/ℓ^0* , c'est-à-dire lorsque les problèmes (L_0) et (L_1) ont tout les deux c^* pour unique solution. On dit aussi que les problèmes (L_0) et (L_1) sont équivalents. Dans cette section, on ne prendra pas en compte d'éventuels bruits.

À une matrice Φ , on associera un polytope dont la géométrie nous dira beaucoup sur les conditions du phénomène d'équivalence ℓ^1/ℓ^0 . Cette approche a un cadre relativement limité (on ne peut pas prendre en compte le bruit) mais est cependant très performante sur le plan numérique. Parmi toutes les approches développées dans ce rapport, c'est elle qui donne les résultats numériques les plus probants et de plus, malgré une formalisation relativement lourde, les algorithmes développés à la fin de cette section ont une complexité faible. C'est principalement David Donoho qui a initié et formalisé cette approche (voir par exemple [11], [13] ou [14]).

2.1 Généralités sur les polytopes

Dans cette sous-section, on introduit quelques notations et on présente le cadre théorique de cette approche géométrique (pour plus de détails, voir [24] ou le fameux [32]).

On peut définir un polytope convexe (polytope pour faire plus court) de deux façons. Soit $P \subset \mathbb{R}^d$.

On dit que P est un \mathcal{V} -polytope (resp. \mathcal{H} -polytope) si P est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathbb{R}^d (resp. si P est borné et est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^d). Un *polytope* est un \mathcal{V} -polytope ou un \mathcal{H} -polytope. La *dimension* d'un polytope est la dimension de l'espace affine qu'il engendre. On dit que P est un k -polytope si P est un polytope de dimension k .

Soit $k \leq d$. On dit que P est un k -simplexe si P est l'enveloppe convexe de $k + 1$ points affinement indépendants. Un *simplexe* est un k -simplexe pour un certain $k \leq d$. Évidemment, un k -simplexe est un k -polytope. Les simplexes généralisent la notion de triangle.

Pour décrire un polytope, il suffit d'étudier sa frontière, c'est pourquoi il nous faut introduire un vocabulaire adapté. Soient $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ et $P \subset \mathbb{R}^d$ un polytope. Soit $F \subset P$. On dit que F est une k -face de P si

- (i) l'espace affine engendré par F est de dimension k , et
- (ii) il existe une forme linéaire $\lambda_F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui sépare F et $P \setminus F$, i.e. telle que

$$\exists c \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda_F(v) = c, \forall v \in F \\ \lambda_F(v) < c, \forall v \in P \setminus F \end{cases} .$$

On note $\mathcal{F}_k(P)$ l'ensemble des k -faces de P . Les k -faces sont des k -polytopes. Les 0-faces sont aussi appelés *sommets*. Si P est décrit comme l'enveloppe convexe de $(x_i)_i$ alors $\mathcal{F}_0(P) \subset (x_i)_i$. On note aussi $f_k(P) = |\mathcal{F}_k(P)|$ le nombre de k -faces de P .

Dans le cadre de la minimisation ℓ^1 , les polytopes qui apparaissent sont tous symétriques par rapport à l'origine. De manière plus générale, on dit que P est *centrosymétrique* si P possède un *centre*, c'est-à-dire, un élément $x_0 \in P$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, x_0 + x \in P \iff x_0 - x \in P. \quad (3)$$

Un exemple important de polytope centrosymétrique est le *simplexe croisé standard* de \mathbb{R}^d

$$C^d = \text{conv}(\pm e_i)_{i=1, \dots, d},$$

où $(e_i)_{i=1, \dots, d}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^d . Les sommets de C^d sont les vecteurs de la base canonique ainsi que leur opposé. Soit Φ une matrice de taille $d \times n$. On définit son *polytope quotient* P_Φ par

$$P_\Phi = \Phi(C^n) = \text{conv}(\pm \varphi_i)_{i=1, \dots, n}, \quad (4)$$

où (φ_i) désignent les colonnes de Φ . La figure 1 illustre cette construction. On a tout de suite

$$\mathcal{F}_0(P_\Phi) \subset \Phi \mathcal{F}_0(C^n), \quad (5)$$

et on en déduit

$$f_0(P_\Phi) \leq f_0(C^n) \text{ et} \quad (6)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, \mathcal{F}_k(P_\Phi) \subset \Phi \mathcal{F}_k(C^n). \quad (7)$$

Soient $k \leq d$ et $P \subset \mathbb{R}^d$ un polytope centrosymétrique. On dit que P est k -neighborly si l'enveloppe convexe de $k+1$ sommets (sans paire antipodale) de P forment une face de P . Dans ce cas, ce sont exactement les sommets de la face qu'ils engendrent. C^d est clairement k -neighborly pour tout $k \leq d$. Cette propriété est étroitement liée à la question de l'équivalence ℓ^1/ℓ^0 .

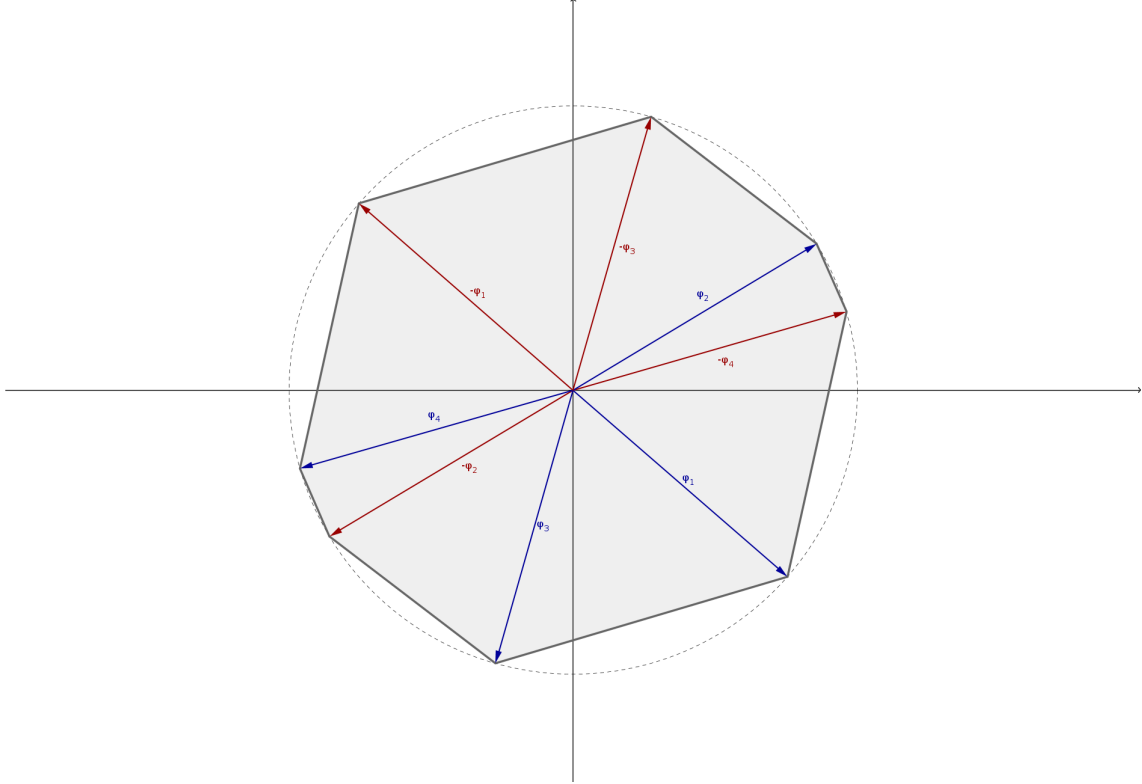


FIGURE 1 – Les vecteurs bleus sont les colonnes de Φ tandis que les vecteurs rouges leur opposé. Le cercle en pointillé désigne le cercle unité et la zone grise la polytope quotient de Φ .

2.2 Équivalence ℓ^1/ℓ^0

Maintenant qu'on a posé les bases théoriques, on va chercher à caractériser le phénomène d'équivalence ℓ^1/ℓ^0 à l'aide de la géométrie du polytope quotient de Φ . On commence par deux lemmes fondamentaux.

Lemme 1. Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ un polytope centrosymétrique. Soient $k \leq d$ un entier et $F \in \mathcal{F}_k(P)$ une k -face de P qui est aussi un k -simplexe. Si $c \in F$, alors

- (i) c a une unique représentation en tant que combinaison convexe des sommets de P ,
- (ii) cette représentation ne place des poids non nuls que sur les sommets de F .

Réciproquement, si $F \subset P$ est un ensemble convexe et fermé de dimension k qui vérifie les propriétés (i) et (ii) pour tout $c \in F$, alors F est un k -simplexe et une k -face de P .

Ce lemme a pour conséquence importante la proposition suivante qui caractérise les solutions de (L_1) :

Proposition 1. Un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ est solution de (L_1) si et seulement si $\Phi c = s^*$ et $\frac{\Phi c}{\|c\|_1}$ appartient à la frontière (relativement à $\text{Im } \Phi$) de P .

Dans la section 3, on utilisera le fait que $\frac{\Phi c}{\|c\|_1}$ soit sur la frontière de P est équivalent à l'existence d'un hyperplan tangent qui sépare une face du polytope du reste du polytope. L'existence d'un tel hyperplan est étroitement liée à la notion de certificat dual que l'on découvrira dans la section suivante.

Lemme 2. *Soit $k \leq d$. Supposons que $P = \Phi(C^n)$ a $2n$ sommets et est k -neighborly. Alors*

$$\forall \ell = 0, \dots, k-1, \forall F \in \mathcal{F}_\ell(C^n), \Phi(F) \in \mathcal{F}_\ell(P). \quad (8)$$

Réciproquement, si on suppose (8), alors P a $2n$ sommets et est k -neighborly.

Ce lemme signifie que si P est k -neighborly alors, à basse dimension, P est géométriquement proche du polytope croisé standard.

Les lemmes 1 et 2 donnent le théorème suivant qui est à la base de l'approche de l'équivalence ℓ^1/ℓ^0 par les polytopes.

Théorème 1. *Soit $\Phi \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ avec $d < n$. Soient $k \leq d$ et $c^* \in \mathbb{R}^n$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *le polytope quotient de Φ a $2n$ sommets et est k -neighborly,*
- *$\|c^*\|_0 \leq k \implies c^*$ est l'unique solution du problème (L_1) généré par $s^* = \Phi c^*$.*

Cette caractérisation cruciale permet de transférer l'étude du phénomène d'équivalence ℓ^1/ℓ^0 du domaine de l'analyse convexe au domaine de la géométrie des polytopes. Comme on le verra par la suite, la large littérature ([32]) sur ce sujet ouvre de nouvelles perspectives.

On va énoncer quelques corollaires de ce théorème mais d'abord on définit le *point d'équivalence maximal* de Φ , noté $\text{PEM}(\Phi)$, comme le plus grand entier N tel que pour tout $c^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|c^*\|_0 \leq N \implies \text{les problèmes } (L_0) \text{ et } (L_1) \text{ générés par } s^* = \Phi c^* \text{ sont équivalents.} \quad (9)$$

Ainsi, d'après le théorème 1, $P = \Phi(C^n)$ est k -neighborly si et seulement si $\text{PEM}(\Phi) \geq k$.

Théorème 2. *Soient $d \geq 2$ et $n \geq d+2$. Soit P un d -polytope centrosymétrique. Alors, pour tout $k \leq d$, si P est k -neighborly alors*

$$k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor. \quad (10)$$

Nous ne montrerons pas ce théorème (voir [25]). Une conséquence importante des théorèmes 1 et 2 est le

Corollaire 1. *Soit $n-2 \geq d \geq 2$. Soit Φ une matrice de taille $d \times n$. Alors, pour tout k*

$$\text{PEM}(\Phi) = k \implies k \leq \left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor. \quad (11)$$

Ce corollaire déprimant, mais non moins remarquable, nous dit que pour que les problèmes (L_0) et (L_1) générés par $s^* = \Phi c^*$ soient équivalents pour tout vecteur coefficient k -parcimonieux, il est nécessaire que k soit plus petit que $d/3$. Qu'on ne puisse pas faire mieux donne un sacré coup au moral, mais en réalité c'est la notion de point d'équivalence maximale qui est très restrictive puisqu'elle est globale.

Corollaire 2. *Pour tout $d, n \in \mathbb{N}$, on se donne une matrice aléatoire $\Phi_{d,n}$ de taille $d \times n$ dont les colonnes sont i.i.d. et de loi uniforme sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} . Soit $\delta \in]0, 1[$. Alors, il existe $\rho > 0$ ne dépendant que de δ tel que si $d = \lfloor \delta n \rfloor$*

$$\mathbb{P}(\text{PEM}(\Phi_{d,n}) > \rho d) \rightarrow 1, \quad d \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Les dernières parties de cette section seront notamment consacrées à l'estimation de cette constante en fonction de δ . On verra qu'on est loin d'atteindre la triste borne évoquée dans le corollaire 1.

2.3 Équivalence locale

La notion d'équivalence ℓ^1/ℓ^0 traitée dans la section précédente est une notion globale, trop forte en général. Dans la pratique, des théorèmes dont les hypothèses sont vérifiées avec grande probabilité sont suffisants. C'est pour cela que l'on va introduire différentes hypothèses locales.

Soit $\Lambda \subset \Omega$. On dit qu'il y a *équivalence locale* (entre les problèmes (L_0) et (L_1)) *sur le support* Λ si, pour tout $c^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{supp}(c^*) \subset \Lambda$, les problèmes (L_0) et (L_1) générés par $s^* = \Phi c^*$ ont pour unique solution c^* . Un tel support est appelé *support d'équivalence locale*.

Pour étudier l'équivalence locale, les objets adaptés sont les *sections intrinsèques* du polytope quotient $P = \Phi(C^n)$. Soit K un ensemble de k sommets de P linéairement indépendants. Notons $V_K = \text{vect}(K)$ l'espace vectoriel de dimension k engendré par les éléments de K dans \mathbb{R}^n . La section intrinsèque P_K associée à K est

$$P_K = P \cap V_K. \quad (13)$$

C'est un polytope centrosymétrique. On dit qu'une telle section intrinsèque P_K est un *polytope croisé* si P_K a $2k$ sommets et est k -neighborly.

Pour garantir que n'importe quel ensemble K de k sommets (ne contenant pas de paire antipodale) engendre un sous-espace vectoriel de dimension k , on introduit une hypothèse supplémentaire sur Φ . On dit que les colonnes de Φ sont en *position générale* dans \mathbb{R}^d si pour tout $\Lambda \subset \Omega$ tel que $|\Lambda| \leq d$, le rang de Φ_Λ est maximal. Cette hypothèse n'est que peu restrictive dans les faits, puisque pour beaucoup de distributions raisonnables, elle est vérifiée avec une grande probabilité (par exemple matrices dont les coefficients sont i.i.d. et tirés selon une loi à densité uniformément par rapport à la mesure de Lebesgue).

Théorème 3. *Soit $k \leq d$. Supposons que $P = \Phi(C^n)$ a $2n$ sommets et que les colonnes de Φ sont en position générale. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- parmi les sections intrinsèques de dimension k de P , une fraction $1 - \epsilon$ sont neighborly,
- parmi les sous-ensembles de Ω de taille k , une fraction $1 - \epsilon$ sont des supports d'équivalence locale.

Soit $\epsilon > 0$. On introduit le *point d'équivalence locale maximal* de Φ , $\text{PELM}_\epsilon(\Phi)$, qui est l'entier maximal N tel que une fraction $\geq 1 - \epsilon$ des supports Λ de taille au moins N sont des supports d'équivalence locale. On a, par exemple, $\text{PEM}(\Phi) = \text{PELM}_0(\Phi)$.

Soit aussi k un entier. On dit que le polytope P est (k, ϵ) -*sectionally neighborly* si toutes les sections intrinsèques de dimension k de P , sauf une fraction $\leq \epsilon$, sont k -neighborly. D'après le théorème 3, $\text{PELM}_\epsilon(\Phi) > k$ si et seulement si $P = \Phi(C^n)$ est (k, ϵ) -sectionally neighborly.

2.4 Équivalence ponctuelle

Nous allons maintenant nous intéresser à une notion d'équivalence encore plus faible : l'équivalence ponctuelle (ou identifiabilité).

Soit $c^* \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'il y a *équivalence ponctuelle* (entre les problèmes (L_0) et (L_1)) *en c^** si les problèmes (L_0) et (L_1) générés par $s^* = \Phi c^*$ ont pour unique solution c^* . On rappelle qu'un tel vecteur coefficient est appelé vecteur *identifiable* (dans cette section, on dira *point d'équivalence*).

Décrire l'équivalence ponctuelle est en général assez difficile, c'est pourquoi on fait encore l'hypothèse que les colonnes de Φ sont en position générale. Sous cette hypothèse, la géométrie des polytopes quotient est relativement simple, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3. *On suppose que les colonnes de Φ sont en position générale dans \mathbb{R}^d . Alors, pour tout $k < d - 2$, les k -faces de $P = \Phi(C^n)$ sont des k -simplexes.*

Le lemme suivant affirme que le phénomène d'équivalence ponctuelle ne dépend pas du point mais de son support et de ses signes sur son support.

Lemme 4. *Soit $c^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|c^*\|_0 \leq d/2$. L'équivalence ponctuelle entre les problèmes (L_0) et (L_1) générés par $s^* = \Phi c^*$ est une propriété qui ne dépend que du support de c^* et du signe de c^* sur son support.*

Ce lemme est primordial car il permet de partitionner l'ensemble \mathbb{R}^n des vecteurs coefficient en un nombre fini de classes où la propriété d'équivalence ponctuelle est soit vérifiée soit démentie par tous les représentants d'une même classe. En plus d'un intérêt pratique incontestable (il suffit de choisir un représentant d'une classe pour vérifier si tous les représentants sont des points d'équivalence ou pas),

ce lemme nous permet de définir la *fraction* des vecteurs coefficient k -parcimonieux qui sont des points d'équivalence (on choisit un représentant pour chaque classe qui correspond à un support de cardinal plus petit que k et on vérifie la propriété sur eux).

Théorème 4. *Soit $k < d/2$. On suppose que les colonnes de Φ sont en position générale dans \mathbb{R}^d . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\Phi(C^n)$ et C^n ont même nombre de $(k-1)$ -faces, à un facteur $1-\epsilon$ près, i.e.

$$(1-\epsilon)f_{k-1}(C^n) \leq f_{k-1}(\Phi(C^n)) \leq f_{k-1}(C^n), \quad (14)$$

- une fraction $\geq 1-\epsilon$ de vecteurs coefficient k -parcimonieux sont des points d'équivalence.

Ainsi, il suffit de compter les k -faces du polytope quotient pour mesurer la fraction de vecteurs k -parcimonieux qui sont des points d'équivalence. Une fois de plus, c'est la géométrie de ce polytope qui résume le problème.

Soit $\epsilon > 0$. On introduit le *point d'équivalence ponctuelle maximal* de Φ , $\text{PEPM}_\epsilon(\Phi)$, qui est l'entier maximal N tel que une fraction $\geq 1-\epsilon$ des vecteurs $c \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|c\|_0 \leq N$ sont des points d'équivalence. On a, par exemple $\text{PEM}(\Phi) = \text{PEPM}_0(\Phi)$.

Soit aussi k un entier. On dit que le polytope P est (k, ϵ) -*facially neighborly* si tous les ensembles de sommets de P de taille k , sauf une fraction $\leq \epsilon$, génèrent une $k-1$ -face de P . D'après le théorème 4, $\text{PEPM}_\epsilon(\Phi) > k$ si et seulement si $P = \Phi(C^n)$ est (k, ϵ) -facially neighborly.

2.5 Cas des projections aléatoires uniformément distribuées

Dans cette section, on considère les matrices Φ qui sont des *projections aléatoires uniformément distribuées*. Plus concrètement, pour les construire, on tire uniformément une matrice orthogonale (par rapport à la mesure de Haar de $SO_n(\mathbb{R})$) et on ne garde que les d premières lignes. Soit $\delta \in [0, 1] = d/n$. L'article [13] de Donoho définit 3 fonctions de δ , appelées *transitions de phases*, $\rho_N(\delta)$, $\rho_S(\delta)$ et $\rho_F(\delta)$, telles que, pour $\epsilon > 0$ assez petit et avec grande probabilité, on ait

$$P = \Phi(C^n) \quad \text{est} \quad \begin{aligned} &(\tilde{\rho}_N \cdot d)\text{-neighborly,} \\ &(\tilde{\rho}_S \cdot d, \epsilon)\text{-sectionally neighborly et} \\ &(\tilde{\rho}_F \cdot d, \epsilon)\text{-facially neighborly,} \end{aligned}$$

où $\tilde{\rho}_N = \rho_N(\delta) - \epsilon$, $\tilde{\rho}_S = \rho_S(\delta) - \epsilon$ et $\tilde{\rho}_F = \rho_F(\delta) - \epsilon$.

Dans ce qui suit, on ne montrera pas ces résultats et on ne rentrera pas dans les détails des calculs. On se contentera de définir ces trois fonctions et d'expliquer un moyen de les calculer numériquement avant de fournir les résultats numériques.

2.5.1 Transitions de phases

Le théorème 4 et le lemme suivant montrent que tout se résume à un comptage du nombre de face du polytope quotient.

Lemme 5. *Soit k un entier. Soit Φ une matrice de taille $d \times n$. Soit $P = \Phi(C^n)$ son polytope quotient. Si*

$$\forall \ell = 0, \dots, k-1, \quad f_\ell(P) = f_\ell(C^n),$$

alors, toutes les ℓ -faces (pour $\ell = 0, \dots, k-1$) sont des ℓ -simplexes et P est k -neighborly.

Soit k un entier. Dans [1], Affentranger et Schneider montrent la formule

$$\mathbb{E}[f_k(P)] = f_k(C^n) - 2 \sum_{s \geq 0} \sum_{F \in \mathcal{F}_k(C^n)} \sum_{G \in \mathcal{F}_{d+1+2s}(C^n)} \beta(F, G) \gamma(G, C^n),$$

où les deux dernières sommes se font sur les paires (F, G) avec F une face de G . $\beta(F, G)$ désigne l'angle interne à la face F de G . $\gamma(G, C^n)$ désigne l'angle externe à la face G de C^n . [REF ??] On note $\Delta(k, d, n)$ le dernier terme qui représente le nombre de faces *avalées* par la transformation Φ . On peut faire quelques remarques de combinatoire (voir [2]) :

- $f_k(C^n) = 2^{k+1} \binom{n}{k+1}$,

- pour $\ell > k$, il y a $2^{\ell-k} \binom{n-k-1}{\ell-k}$ ℓ -faces de C^n qui contiennent une k -face de C^n donnée,
- les faces de C^n sont des simplexes et $\beta(F, G) = \beta(T^k, T^\ell)$ où T^d est le d -simplexe standard,
- l'angle externe $\gamma(F, C^n)$ est le même pour toute les ℓ -faces F .

Ainsi, en notant $\ell = d + 1 + 2s$,

$$\Delta(k, d, n) = \sum_{s \geq 0} \underbrace{2 \cdot 2^\ell \cdot \binom{n}{k+1} \binom{d-k-1}{\ell-k}}_{C_s} \underbrace{\beta(T^k, T^\ell) \gamma(F^\ell, C^n)}_{D_s}$$

On remarque que

$$\mathbb{P}(f_k(P) \neq f_k(C^n)) \leq \mathbb{E}[f_k(C^n) - f_k(P)] = \Delta(k, d, n).$$

On veut montrer que la probabilité de cet évènement devient négligeable pour n grand. Pour faire tendre cette somme vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, on va majorer $n^{-1} \log(D_s)$. On majore les trois termes qui apparaissent (le terme combinatoire, le terme associé à l'angle interne et le terme associé à l'angle externe) par un exposant adapté que l'on va définir.

Dans un premier temps, on définit l'*entropie de Shannon* pour $p \in]0, 1[$,

$$H(p) = p \log(1/p) + (1-p) \log(1/(1-p)),$$

où le logarithme est en base e (et non la conventionnelle base 2). On peut faire la remarque utile suivante :

$$\forall p \in [0, 1], n^{-1} \log \binom{n}{\lfloor pm \rfloor} \rightarrow H(p), n \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

On utilise cette relation pour approcher les termes combinatoires.

Soit $\delta \in]0, 1]$ qui mesure la proportionalité entre le nombre de lignes et le nombre de colonnes de Φ . Pour $\rho \in]0, 1]$ et $\nu \in [\delta, 1]$, on définit trois exposants Ψ_{com} , Ψ_{int} et Ψ_{ext} qui vont borner les différents termes de D_s . D'après (15), on a :

$$n^{-1} \log(C_s) = \nu \log(2) + H(\rho\delta) + H\left(\frac{\nu - \rho\delta}{1 - \rho\delta}\right) (1 - \rho\delta) + R_1,$$

où $R_1 = R_1(s, k, d, n)$ est un reste, on définit l'*exposant de croissance* Ψ_{com} par

$$\Psi_{com}(\nu, \rho, \delta) = \nu \log(2) + H(\rho\delta) + H\left(\frac{\nu - \rho\delta}{1 - \rho\delta}\right) (1 - \rho\delta).$$

Pour définir l'*exposant externe*, on introduit la fonction de répartition G de la loi semi-normale $HN(0, 1/2)$ ainsi que sa densité, définie par

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy,$$

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Pour $\nu \in]0, 1]$, on définit x_ν comme l'unique solution de

$$\frac{2xG(x)}{g(x)} = \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

Le membre de droite établit une bijection de \mathbb{R}_+ sur lui-même, donc x_ν est bien défini. L'exposant externe Ψ_{ext} est

$$\Psi_{ext}(\nu) = -(1 - \nu) \log(G(x_\nu)) + \nu x_\nu^2.$$

Pour définir l'*exposant interne*, on introduit la fonction génératrice de la loi semi-normale $HN(0, 1)$ qui peut s'écrire

$$\Lambda(s) = s^2/2 + \log(2\Phi(s)),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On note $\gamma = \frac{\rho\delta}{\nu}$ et on définit la fonction

$$\xi_\gamma(y) = \frac{1-\gamma}{\gamma}y^2/2 + \Lambda^*(y),$$

où Λ^* est la transformée de Fenchel-Legendre de Λ définie par

$$\Lambda^*(y) = \max_s sy - \Lambda(s).$$

ξ_γ est strictement convexe et positive sur \mathbb{R}_+^* et a donc un unique minimum y_γ . On définit l'exposant interne Ψ_{int} par

$$\Psi_{int}(\nu, \rho, \delta) = \xi_\gamma(y_\gamma)(\nu - \rho\delta) + \log(2)(\nu - \rho\delta).$$

On peut montrer que $\xi_\gamma(y_\gamma) = -\frac{1}{2}y_\gamma^2\frac{1-\gamma}{\gamma} - \log(2/\pi)/2 + \log(y_\gamma/\gamma)$ et que

$$y_\gamma = \frac{\gamma-1}{\gamma}s_\gamma,$$

où s_γ est l'unique solution pour $s < 0$ de : $M(s) = 1 - \gamma$ avec $M(s) = |s| \times R(-s)$ où R est le ratio de Mills associé à Φ . Cette remarque sera utile pour le calcul numérique des transitions de phases.

Le ratio de Mills R_ψ d'une loi de probabilité de densité ψ (par rapport à la mesure de Lebesgue) est défini par :

$$R_\psi(x) = \frac{1}{\psi(x)} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt.$$

Donoho montre que ([13]) pour tout $0 < \rho, \delta \leq 1$, pour tout $\epsilon > 0$, pour $n \geq n_0(\rho, \delta, \epsilon)$, on a

$$n^{-1} \log(D_s) \leq \underbrace{\Psi_{com}(\nu, \rho, \delta) - \Psi_{int}(\nu, \rho, \delta) - \Psi_{ext}(\nu)}_{\Psi_{net}(\nu, \rho, \delta)} + 3\epsilon,$$

où $\delta \leq \nu = \ell/n \leq 1$.

On définit naturellement le seuil $\rho_N(\delta)$ comme le supremum des $\rho \in]0, 1]$ tel que

$$\Psi_{net}(\nu, \rho, \delta) < 0, \quad \forall \nu \in [\delta, 1].$$

On peut remarquer que Ψ_{net} est continue donc, dès que $\rho < \rho_N(\delta)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\Psi_{net}(\nu, \rho, \delta) < -4\epsilon$ i.e. $n^{-1} \log(D_s) \leq -\epsilon$. On peut donc majorer $\Delta(k, d, n)$ par $n \exp(-n\epsilon)$ qui peut donc être aussi petit que l'on veut lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On définit maintenant l'exposant de face Ψ_{face} par

$$\Psi_{face}(\rho, \delta) = \rho\delta \log(2) + H(\rho\delta).$$

En se rappelant que $f_{k-1}(C^n) = 2^k \binom{n}{k}$, on a pour $k \sim \rho\delta n$,

$$n^{-1} \log(f_{k-1}(C^n)) \rightarrow \Psi_{face}(\rho\delta), \quad n \rightarrow +\infty.$$

On définit naturellement le seuil $\rho_F(\delta)$ comme le supremum des $\rho \in]0, 1]$ tel que

$$\Psi_{net}(\nu, \rho, \delta) < \Psi_{face}(\rho, \delta), \quad \forall \nu \in [\delta, 1].$$

En effet, si $\rho < \rho_F(\delta)$, on a en utilisant la continuité :

$$\Delta(k, d, n) = o(f_{k-1}(C^n)),$$

ce qui, combiné avec le théorème 4, justifie la définition.

Pour définir ρ_S , il suffit de se rendre compte qu'il y a $\binom{n}{k}$ sections intrinsèques de dimension k pour P . On définit donc l'exposant de section Ψ_{sect} par

$$\Psi_{face}(\rho, \delta) = H(\rho\delta),$$

et avec la même justification que pour ρ_F , on définit le seuil $\rho_S(\delta)$ comme le supremum des $\rho \in]0, 1]$ tel que

$$\Psi_{net}(\nu, \rho, \delta) < \Psi_{sect}(\rho, \delta), \quad \forall \nu \in [\delta, 1].$$

2.5.2 Résultats numériques

Grâce à la section précédente, on a presque tous les outils pour calculer les transitions de phases. Il reste cependant quelques calculs à expliciter.

Pour trouver x_ν , on peut, par exemple, utiliser la méthode Newton pour trouver le zéro de la fonction $x \rightarrow \frac{2xG(x)}{g(x)} - \frac{1-\nu}{\nu}$.

Pour trouver s_γ , on applique la méthode de Newton à $s \rightarrow M(s) - (1 - \gamma)$. Pour calculer $s \rightarrow M(s)$ efficacement, on utilise une des approximations uniformes de Hart ([3]) : si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\mathbb{P}(X > x) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + bx^2/(1 + ax^2)}}{P_0x + \sqrt{P_0^2x^2 + \exp(-x^2/2)\sqrt{1 + bx^2/(1 + ax^2)}}} \right),$$

où : $P_0 = \sqrt{\pi/2}$, $a = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\pi^2 + 6\pi}}{2\pi}$ et $b = 2\pi a^2$. On a tout de suite :

$$M(s) \approx 1 - \frac{\sqrt{1 + bx^2/(1 + ax^2)}}{-P_0x + \sqrt{P_0^2x^2 + \exp(-x^2/2)\sqrt{1 + bx^2/(1 + ax^2)}}}.$$

La figure 2 représente les différentes transitions de phases et le tableau suivant donne quelques résultats numériques.

δ	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	1^-
ρ_N	0.0457	0.0633	0.0881	0.1157	0.1387	0.1666
ρ_S	0.1032	0.1404	0.1906	0.2444	0.2898	0.3505
ρ_F	0.1506	0.2634	0.3823	0.5318	0.6774	0.9990

D'après Donoho, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 1} \rho_N(\delta) &\approx 0.168, \\ \lim_{\delta \rightarrow 1} \rho_S(\delta) &\approx 0.352, \\ \lim_{\delta \rightarrow 1} \rho_F(\delta) &= 1. \end{aligned}$$

Ce qui est proche des résultats obtenus. On va maintenant faire quelques remarques sur l'obtention de ces résultats. Pour calculer les différentes transitions de phases à une proportion δ donnée, on résout l'équation suivante :

$$\Psi(\delta, \rho, \delta) = 0,$$

où $\Psi = \Psi_{net} - f$ avec $f \in \{0, \Psi_{sect}, \Psi_{face}\}$ qui dépend de la transition de phases qu'on cherche à obtenir. $\rho \rightarrow \Psi(\delta, \rho, \delta)$ est toujours concave et peut avoir jusqu'à deux solutions. Pour sélectionner la bonne, on initialise la résolution sur des valeurs de ρ qui sont proches des valeurs attendues, à savoir 0.1 pour ρ_N , 0.2 pour ρ_S et 0.4 pour ρ_F . Pour ρ_N et ρ_S , on trouve des résultats proches de ceux de Donoho. Malheureusement, ρ_F pose problème, puisque les erreurs d'approximations font que la fonction $(\nu, \rho) \rightarrow \Psi_{net}(\nu, \rho, \delta) - \Psi_{face}(\rho, \delta)$ est strictement négative pour la plupart des $\delta \in [0, 1]$. Pour estimer $\rho_F(\delta)$, on calcule le maximum de la fonction $\rho \rightarrow \Psi_{net}(\delta, \rho, \delta) - \Psi_{face}(\rho, \delta)$, ce qui donne des résultats similaires à ceux de Donoho.

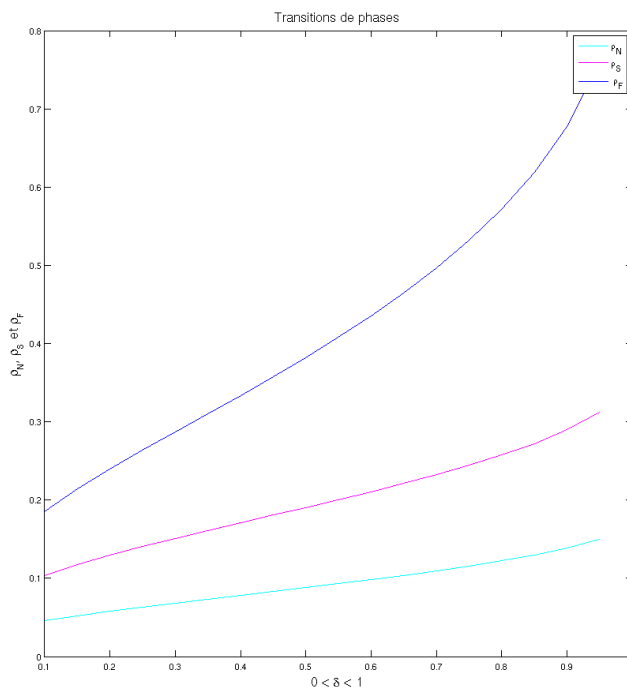


FIGURE 2 – Transitions de phases. En bas : $\rho_N(\delta)$. Au milieu : $\rho_S(\delta)$. En haut : $\rho_F(\delta)$.

3 Les certificat duaux

Dans cette section, on utilise quelques outils d'analyse convexe notamment la dualité de Fenchel-Legendre. En effet, à un problème d'optimisation convexe (appelé *primal*) on peut en associer un autre (appelé *dual*) dont les solutions nous donnent beaucoup d'informations sur les solutions du problème primal. Dans l'approche qu'on présente ici, on cherche à contruire explicitement une solution du problème dual.

3.1 Quelques éléments d'analyse convexe

On présente une petite introduction à l'analyse convexe (voir [26] pour plus de détails). Soit une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On introduit la notion de *sous-différentiel* qui généralise celle du gradient. Le sous-différentiel de f en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\partial f(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) - f(x) \geq \langle u, y - x \rangle\}.$$

Le sous-différentiel de f est l'application multivaluée $\partial f: x \mapsto \partial f(x)$. On peut faire les remarques suivantes :

- si f est convexe alors : $\partial f(x) \neq \emptyset$,
- si f est différentiable en x alors : $\partial f(x) = \{\text{grad } f(x)\}$,
- si f est convexe et si g est convexe et différentiable alors : $\partial(f+g)(x) = \{u + \text{grad } g(x) \mid u \in \partial f(x)\}$,
- $x \in \text{argmin } f \iff 0 \in \partial f(x)$.

Puisque la norme ℓ^1 nous intéresse, on va décrire son sous-différentiel.

Lemme 6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a l'équivalence :

$$u \in \partial \|x\|_1 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} |u_i| \leq 1 & \text{si } x_i = 0 \\ u_i = \text{sign}(x_i) & \text{si } x_i \neq 0 \end{cases}.$$

On introduit maintenant la *divergence de Bregman*.

Définition 2. Soient $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et supposons que $\partial f(x') \neq \emptyset$. Soit $\xi \in \partial f(x')$, on définit la divergence de Bregman entre x et x' relativement à ξ par :

$$D_\xi^f(x, x') = f(x) - f(x') - \langle \xi, x - x' \rangle.$$

La divergence de Bregman n'est pas une distance mais si f est strictement convexe alors elle vérifie certaines de leurs propriétés :

- elle est *positive*, ce qui est une conséquence de la définition du sous-différentiel,
- elle vérifie l'axiome de *séparation* : $D_\xi^f(x, x') = 0 \iff x = x'$.

Lorsque f vérifie l'axiome d'homogénéité, on a $f(x') = \langle \xi, x' \rangle$, d'où :

$$D_\xi^f(x, x') = f(x) - \langle \xi, x \rangle.$$

De plus, si $f = \|\cdot\|_1$, alors :

$$D_\xi^f(x, x') = \sum_{i=1}^n (|x_i| - \xi_i x_i).$$

On suppose que f est semi-continue inférieurement et convexe. Généralement, lorsque l'on veut minimiser la fonctionnelle f avec les contraintes linéaires $\Phi x = y$, on résout le problème (qu'ici, on appelle problème *primal*)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } \Phi x = y. \quad (\mathcal{P})$$

Souvent, on associe au problème primal un problème *dual*. Pour cela, on introduit la *transformée de Fenchel-Legendre* de f :

$$\begin{aligned} f^* &: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ u &\mapsto f^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle u, x \rangle - f(x). \end{aligned}$$

Si $f = \|\cdot\|_1$, alors sa transformée de Fenchel-Legendre est la fonction indicatrice de la boule unité de la norme ℓ^∞ :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, f^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|u\|_\infty \leq 1, \\ +\infty & \text{si } \|u\|_\infty > 1. \end{cases}$$

On a l'égalité importante suivante est l'égalité de

$$(f^*)^* = f. \quad (16)$$

Le problème dual de (\mathcal{P}) est défini par :

$$\min_{\eta \in \mathbb{R}^d} f^*(\Phi^* \eta) - \langle y, \eta \rangle. \quad (\mathcal{D})$$

De l'égalité (16), on peut en déduire que les problèmes primal et dual donnent les mêmes valeurs :

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \Phi x = y\} = - \min\{f^*(\Phi^* \eta) - \langle y, \eta \rangle \mid \eta \in \mathbb{R}^d\}$$

On dit que $\eta \in \mathbb{R}^d$ est un *certificat dual* pour $x \in \mathbb{R}^n$ du problème (\mathcal{P}) si :

$$\Phi^* \eta \in \partial f(x).$$

L'introduction de cette notion est motivée par le fait que l'ensemble des minimiseurs du problème dual (\mathcal{D}) est exactement l'ensemble des certificat duaux des minimiseurs du problème primal (\mathcal{P}) .

3.2 Le critère de Fuchs

Dans cette section, on décrit une approche relativement simple mais pourtant très efficace proposée par Jean-Jacques Fuchs dans notamment [19] et [20]. On se place dans le cas non bruité

$$s^* = \Phi c^*,$$

et on cherche à déterminer l'identifiabilité de c^* pour LASSO $(Q_1^?)$. L'approche consiste à construire un certificat dual pour le problème primal $(Q_1^?)$. On donnera des conditions sur ce certificat pour que la solution de $(Q_1^?)$ \hat{c}^* soit *proche* de c^* . Cette méthode, dont Jean-Jacques Fuchs est l'un des fondateurs, est une alternative à l'acquisition comprimée d'Emmanuel Candès et de Terence Tao.

3.2.1 Condition suffisante de Fuchs

Dans cette sous-section, on s'intéresse principalement à l'analyse du signal grâce au problème d'optimisation convexe (Q_1^γ) pour $\gamma > 0$. D'après les remarques faites dans la sous-section précédente, dire que \hat{c}^* est une solution de (Q_1^γ) équivaut à :

$$\exists u \in \partial \|\hat{c}^*\|_1, \quad \Phi^*(\Phi \hat{c}^* - s^*) + \gamma u = 0. \quad (17)$$

Notons $\Lambda = \text{supp}(c^*)$ de telle sorte que $s^* = \Phi c^* = \Phi_\Lambda c_\Lambda^*$. L'équation (17) est équivalente à :

$$\Phi_\Lambda^*(s^* - \Phi_\Lambda \hat{c}_\Lambda^*) = \gamma \text{sign}(\hat{c}_\Lambda^*), \quad (18)$$

$$\forall \lambda \notin \Lambda, \quad |\langle \varphi_\lambda, s^* - \Phi_\Lambda \hat{c}_\Lambda^* \rangle| \leq \gamma. \quad (19)$$

Si, de plus, \mathcal{D}_Λ est de rang maximal de \mathcal{D} et si les inégalités dans (19) sont strictes, alors \hat{c}^* est un minimum strict du problème (Q_1^γ) . On obtient donc les conditions suffisantes suivantes :

Théorème 5. *Des conditions suffisantes pour que \hat{c}^* soit un minimum strict du problème (Q_1^γ) sont :*

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda^*(s^* - \Phi_\Lambda \hat{c}_\Lambda^*) &= \gamma \text{sign}(\hat{c}_\Lambda^*), \\ \forall \lambda \notin \Lambda, \quad |\langle \varphi_\lambda, s^* - \Phi_\Lambda \hat{c}_\Lambda^* \rangle| &< \gamma, \\ \text{rang}(\Phi_\Lambda) &= |\Lambda|, \end{aligned}$$

où $\Lambda = \text{supp}(\hat{c}^*)$.

La grande force de ce théorème, c'est qu'on en déduit une expression implicite de \hat{c}^* . En effet, sous les conditions du théorème 5 :

$$\hat{c}_\Lambda^* = \Phi_\Lambda^+ s^* - \gamma (\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1} \text{sign}(\hat{c}_\Lambda^*).$$

On dit que le problème (Q_1^γ) permet de retrouver c^* si le support de la solution \hat{c}^* de (Q_1^γ) est inclus dans celui de c^* et si les signes des composantes correspondent. Une conséquence de la discussion précédente est le théorème suivant :

Théorème 6. *Notons $\Lambda = \text{supp}(c^*)$. Sous les conditions :*

$$\forall \lambda \notin \Lambda, \quad |\langle \varphi_\lambda, d_0 \rangle| < 1 \text{ avec } d_0 = (\Phi_\Lambda^+)^* \text{sign}(c_\Lambda^*), \quad (20)$$

$$\gamma \in]0, \gamma_m[\text{ où } \gamma_m = \sup\{\gamma > 0 \mid \text{sign}(c_\Lambda^* - \gamma (\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1} \text{sign}(c_\Lambda^*)) = \text{sign}(c_\Lambda^*)\}, \quad (21)$$

$$\text{rang}(\Phi_\Lambda) = |\Lambda|, \quad (22)$$

la solution \hat{c}^* du problème (Q_1^γ) est unique et permet de retrouver c^* .

La première et la troisième condition forment le *critère de Fuchs*.

Dans ce théorème, d_0 est un certificat dual du problème de minimisation (Q_1^γ) (de manière générale d_0 est appelé *pré-certificat de Fuchs*) et on peut interpréter la condition (20) géométriquement (voir la figure 3 pour une illustration). En effet, cela revient à dire que les atomes de Φ qui ne servent pas à décrire le signal s^* sont strictement contenus entre les deux hyperplans

$$H_\pm = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, d_0 \rangle = \pm 1\}.$$

C'est pour cela qu'on appelle cette condition : condition de séparabilité. De plus, ces deux hyperplans sont les hyperplans tangents au polytope quotient de Φ qui est défini comme l'image de la boule unité pour la norme ℓ^1 (le polytope croisé standard) par Φ et passent par x ou $-x$. On peut montrer que la réciproque est vraie. Toute ces considérations géométriques ont été largement approfondies dans la section 2.

3.2.2 Conséquences

On note toujours $\Lambda = \text{supp}(c^*)$ et on rappelle que la définition de la cohérence d'une matrice est donnée par la définition 1. Le théorème suivant donne un nouveau critère pour la reconstruction d'un signal :

Théorème 7. *On suppose que Φ_Λ est de rang maximal. On a l'implication :*

$$\|c^*\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\Phi)} \right) \implies (20).$$

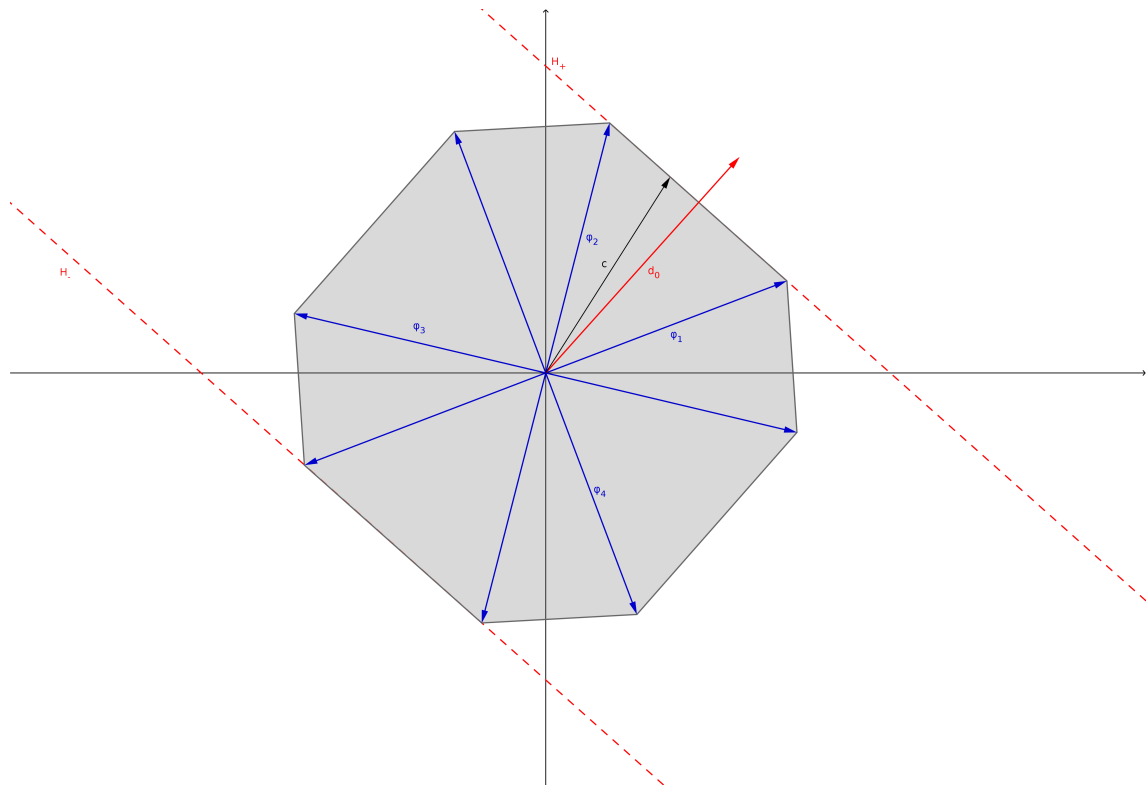


FIGURE 3 – Les vecteurs bleus représentent les colonnes de Φ ainsi que leur opposé. La zone grise correspond au polytope quotient de Φ (voir la section 2). Le vecteur rouge est le certificat dual de Fuchs associé au vecteur noir. N'importe quel autre vecteur sur la face engendrée par φ_1 et φ_2 aurait donné le même certificat dual. Les deux droite rouges en pointillé représentent les hyperplans H_- et H_+ . Comme les colonnes de Φ qui n'interviennent pas dans la construction de c sont strictement contenues entre ces deux hyperplans, c est identifiable.

Démonstration. On décompose $(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1} = I - H$ où I est la matrice identité. On applique le théorème des disques de Gershgorin à H pour montrer que son rayon spectral est strictement inférieur à 1, puis on utilise le lemme de Neumann pour calculer $(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1}$ en fonction de H . On obtient ensuite l'inégalité terme à terme :

$$|(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1}| \leq (I - \mu(\Phi)E)^{-1},$$

où $E = \mathbf{1} - I$ ($\mathbf{1}$ est la matrice avec des 1 partout). On peut expliciter ce second terme :

$$(I - \mu(\Phi)E)^{-1} = \alpha I + \beta \mathbf{1},$$

où : $\alpha = \frac{1}{1+\mu(\Phi)}$ et $\beta = \frac{\mu(\Phi)}{(1+\mu(\Phi))(1+\mu(\Phi)-\mu(\Phi)\|x\|_0)}$. On arrive ensuite au résultat attendu. \square

Le condition $\|x\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\Phi)}\right)$ (*critère de cohérence*) est donc plus forte que celle de séparabilité. Dans la pratique, on se rend vite compte qu'elle n'est que rarement vérifiée car cette borne est trop petite pour être réellement utile.

Le certificat de Fuchs peut aussi être utiliser dans le cadre du Basis Pursuit. On a le théorème suivant :

Théorème 8. *Supposons que :*

$$\forall \lambda \notin \Lambda, |\langle \varphi_\lambda, d_0 \rangle| < 1 \text{ avec } d_0 \text{ tel que } \Phi_\Lambda^* d_0 = \text{sign}(c_\Lambda^*), \quad (23)$$

$$\text{rang}(\Phi_\Lambda) = |\Lambda|, \quad (24)$$

alors le problème (L_1) permet de retrouver c^* .

On peut remarquer que la condition (23) est plus faible que la condition (20).

3.3 Condition nécessaire et suffisante de convergence linéaire

L'approche décrite dans la section précédente permet de retrouver l'emplacement des composantes non nulles ainsi que leur signe mais ne donne pas bornes pour l'erreur de l'estimation et ne prend pas en compte le bruit. Markus Grasmair proposent d'utiliser la divergence de Bregman pour y remédier ([22]).

On se place dans le cas d'un bruit w borné en norme ℓ^2 par $\epsilon \geq 0$:

$$\Phi c^* = s^* + w \text{ tel que } \|w\|_2 \leq \epsilon.$$

On va utiliser le LASSO (Q_1^γ) ainsi que la méthode des résidus (L_1^ξ) et voir des conditions dans lesquelles ces deux algorithmes sont équivalents pour la résolution de notre problème. Dans la suite, pour simplifier les notations, on notera $D_\xi(x, x')$ au lieu de $D_\xi^{\|\cdot\|_1}(x, x')$.

On va utiliser la divergence de Bregman et les certificat duaux pour affiner les résultats de la section précédente. Le lemme suivant permet de borner la divergence de Bregman entre une solution d'un des deux algorithmes de minimisation et c^* lorsqu'on connaît un certificat dual :

Lemme 7. *Supposons qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Phi^* \eta \in \partial \|c^*\|_1$, alors :*

– Soit \hat{c}^* une solution du problème de (L_1^ξ) engendré par s^* et ϵ , alors on a :

$$D_{\Phi^* \eta}(\hat{c}^*, c^*) \leq 2\|\eta\|_2 \epsilon,$$

– Soit \hat{c}_γ^* la solution du problème (Q_1^γ) engendré par s^* et $\gamma > 0$, alors on a :

$$\begin{cases} \|\Phi \hat{c}_\gamma^* - s^*\| \leq \epsilon + \gamma \|\eta\|_2 \\ D_{\Phi^* \eta}(\hat{c}_\gamma^*, c^*) \leq (\epsilon + \gamma \|\eta\|_2 / 2)^2 / \gamma \end{cases} .$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Phi^* \eta \in \partial \|c^*\|_1$, on notera par la suite :

$$\begin{aligned} \Gamma[\eta] &= \{\omega \in \Omega : |\langle e_\omega, \Phi^* \eta \rangle| \geq 1\} \text{ et} \\ m[\eta] &= \max\{|\langle e_\omega, \Phi^* \eta \rangle| : \omega \notin \Gamma[\eta]\}. \end{aligned}$$

On rappelle que $(e_\omega)_{\omega \in \Omega}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n . À l'aide de ces formules, on obtient une minoration utile de la divergence de Bregman :

$$\forall c \in \mathbb{R}^n, D_{\Phi^* \eta}(c, c^*) \geq (1 - m[\eta]) \sum_{\omega \notin \Gamma[\eta]} |c_\omega|.$$

Lemme 8. *Supposons qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Phi^* \eta \in \partial \|c^*\|_1$ et que $\Phi_{\Gamma[\eta]}$ soit injective, alors :*

$$\forall c \in \mathbb{R}^n, \|c - c^*\|_2 \leq \|\Phi_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 \|\Phi c - (s^* + w)\|_2 + \frac{1 + \|\Phi_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 \|\Phi\|_2}{1 - m[\eta]} D_{\Phi^* \eta}(c, c^*).$$

Des lemmes 7 et 8, on en déduit la :

Proposition 2. *Supposons qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Phi^* \eta \in \partial \|c^*\|_1$ et que $\Phi_{\Gamma[\eta]}$ soit injective, alors :*

– Soit \hat{c}^* une solution du problème (L_1^ϵ) engendré par s^* et ϵ , alors on a :

$$\|\hat{c}^* - c^*\|_2 \leq c_\eta \epsilon,$$

$$\text{où } c_\eta = 2 \left(\|\Phi_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 + \frac{1 + \|A_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 \|A\|_2}{1 - m[\eta]} \|\eta\|_2 \right)$$

– Soit \hat{c}_γ^* la solution du problème (Q_1^γ) engendré par s^* et $\gamma > 0$, alors on a :

$$\begin{cases} \|\Phi \hat{c}_\gamma^* - s^*\|_2 \leq c_\eta^{(1)} \epsilon \\ \|\hat{c}_\gamma^* - c^*\|_2 \leq c_\eta^{(2)} \epsilon \end{cases},$$

où, en notant $C = \gamma/\epsilon$,

$$c_\eta^{(1)} = 1 + C \|\eta\|_2 \text{ et}$$

$$c_\eta^{(2)} = \|\Phi_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 (1 + c_\eta^{(1)}) + \frac{1 + \|A_{\Gamma[\eta]}^{-1}\|_2 \|A\|_2}{1 - m[\eta]} \frac{(1 + C \|\eta\|_2 / 2)^2}{C}.$$

Le théorème suivant caractérise l'identifiabilité de c^* .

Théorème 9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *il existe $\eta \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Phi^* \eta \in \partial \|c^*\|_1$ et que $\Phi_{\Gamma[\eta]}$ soit injective,*

2) *Soit \hat{c}^* une solution du problème (L_1^ϵ) engendré par s^* et $\epsilon \geq 0$, alors il existe une constante $c^{(1)} > 0$ telle que :*

$$\|x_\alpha - c^*\|_2 \leq c^{(1)} \delta$$

3) *c^* est l'unique solution du problème :*

$$\min_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_1 \text{ tel que } \Phi c = s^*, \quad (25)$$

et de plus, si \hat{c}_γ^* est la solution du problème (Q_1^γ) engendré par s^* et $\gamma > 0$, alors il existe une constante $c^{(2)} > 0$ telle que :

$$\|\Phi \hat{c}_\gamma^* - s^*\|_2 \leq c^{(2)} \epsilon.$$

3.4 Super-résolution (ou le cas continu)

La super-résolution a pour but de reconstruire les détails d'un signal à partir d'informations parcelaires sur ce signal. Cette théorie relativement récente a été initiée par Emmanuel Candès (voir [6] et [5]). Une des applications les plus remarquables de cette approche est l'analyse des couches géologiques des sols. Ce qu'on présente ici s'inspire du travail de Vincent Duval et Gabriel Peyré ([18]).

On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et on note $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures de Radon de \mathbb{T} . On cherche à reconstruire une mesure $m^* \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ à partir d'une observation $s^* \in L^2(\mathbb{T})$ (éventuellement perturbée par un bruit w borné en norme ℓ^2) obtenue à l'aide d'un opérateur $\Phi: \mathcal{M}(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$. Ici, on s'intéresse à la classe des opérateurs de convolution à noyau, très utilisés pour décrire les phénomènes de diffusion, omniprésents en physique notamment. Le noyau de Φ sera noté $t \mapsto \phi(-t)$ où $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. On fera, de plus, l'hypothèse que m^* est une surperposition finie de mesures de Dirac d'amplitude quelconque. Dans de nombreux cadres, cette hypothèse est réaliste. Par exemple, pour l'analyse des couches géologiques, m^* correspond à la variation de l'indice du sol. C'est l'équivalent de l'hypothèse



FIGURE 4 – Exemple d’une superposition de spikes.

de parcimonie que l’on a maintenant l’habitude de faire. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$ et $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$m^* = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i},$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac en x . On cherche un moyen de localiser l’emplacement de ces spikes ainsi que le signe de leur amplitude. Pour cela, on introduit le *support signé* d’une mesure m défini par

$$\text{supp}^\pm(m) = \{(t, s) \in \mathbb{T} \times \{-1, +1\}, m(\{t\}) = v\}.$$

On propose une méthode que s’inspire des travaux sur les certificats duaux présentés dans le début de cette section. Dans ce cadre, l’équivalent de la norme ℓ^1 est la norme de *variation totale*, notée $\|\cdot\|_{TV}$ et définie pour toute mesure m de \mathbb{T} par

$$\|m\|_{TV} = \sup \left\{ \int \psi dm : \psi \in C(\mathbb{T}), \|\psi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

On peut montrer que, dans le cas où $m = \sum a_i \delta_{x_i}$ est une superposition de N spikes, alors son sous-différentiel vérifie

$$\partial \|m\|_{TV} = \{\eta \in C(\mathbb{T}) : \|\eta\|_\infty \leq 1 \text{ et } \forall i = 1, \dots, N, \eta(x_i) = \text{sign}(a_i)\}.$$

Étant donné $s \in L^2(\mathbb{T})$, on cherche à résoudre le problème

$$\min_{m \in \mathcal{M}(\mathbb{T})} \|m\|_{TV} \text{ tel que } s^* = \Phi m, \quad (\mathcal{P}_0(s^*))$$

qui est l’extension naturelle du problème (L_1) au cas continu. On considérera aussi, pour $\lambda > 0$, le problème

$$\min_{m \in \mathcal{M}(\mathbb{T})} \frac{1}{2} \|\Phi m - s^*\|_2^2 + \lambda \|m\|_{TV}, \quad (\mathcal{P}_\lambda(s^*))$$

appelé *Beurling LASSO*, qui est l'extension naturelle du LASSO au cas continu. Comme dans le cas discret, pour étudier ce genre de problèmes, on fait appel à la transformée de Fenchel-Legendre qui permet de définir certains problèmes duaux qui leur sont intimement liés :

$$\min_{p \in L^2(\mathbb{T})} \|\lambda^{-1} s^* - p\| \text{ tel que } \|\Phi^* p\|_\infty \leq 1, \quad (\mathcal{D}_\lambda(s^*))$$

est le problème dual associé à $(\mathcal{P}_\lambda(s^*))$ qui est équivalent à un problème de projection sur un convexe fermé, il possède donc une unique solution que l'on notera η_λ .

$$\sup_{p \in L^2(\mathbb{T})} \langle s^*, p \rangle \text{ tel que } \|\Phi^* p\|_\infty \leq 1, \quad (\mathcal{D}_0(s^*))$$

est le problème dual associé à $(\mathcal{P}_0(s^*))$, l'existence d'une solution n'est pas toujours garantie. La théorie de la dualité permet de caractériser les solutions des problèmes primaux en fonction des solutions des problèmes duaux. Ainsi, pour toute paire $(m_0, p_0) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$, m_0 est une solution de $(\mathcal{P}_0(s^*))$ et p_0 est une solution de $(\mathcal{D}_0(s^*))$ équivaut à ce que (m_0, p_0) vérifie la relation

$$\Phi^* p_0 \in \partial \|m_0\|_{TV}. \quad (26)$$

De la même manière, pour toute paire $(m_\lambda, p_\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$, m_λ est une solution de $(\mathcal{P}_\lambda(s^*))$ et p_λ est l'unique solution de $(\mathcal{D}_\lambda(s^*))$ équivaut à ce que (m_λ, p_λ) vérifie (26) et si

$$-p_\lambda = \frac{1}{\lambda} (\Phi m_\lambda - s^*). \quad (27)$$

Si $\{p_0 \in L^2(\mathbb{R}) \mid \Phi^* p_0 \in \partial \|m_0\|_{TV}\}$ est non vide alors on peut définir le *certificat de norme minimale* η_0 qui est la solution de

$$\Phi^* p_0 \text{ tel que } p_0 = \operatorname{argmin}\{\|p_0\|_2 : \Phi^* p_0 \in \partial \|m_0\|_{TV}\}.$$

Le choix du certificat de norme minimale est motivé par plusieurs raisons. Il vérifie toutes les propriétés des certificats duaux mais il est aussi, lorsqu'il existe, la limite pour la convergence uniforme des η_λ lorsque λ tend vers 0. Enfin, sous certaines conditions, il est égal à un *pré-certificat* qui lui se calcule facilement à l'aide d'un système linéaire. Tout comme dans le cas discret, ce sont les extrema de η_0 qui permettent de localiser le support signé de la solution m_* , c'est pourquoi on introduit le *support signé étendu* de m_* défini par

$$\operatorname{ext}^\pm(m_*) = \operatorname{supp}^\pm(\eta_0).$$

De la même manière que Fuchs, on va rajouter certaines conditions sur ce certificat pour avoir des résultats plus précis sur l'identifiabilité de m^* . On rappelle que le support de m^* est noté (x_1, \dots, x_N) . On dit que m^* vérifie la *condition de source non dégénérée* si

- (i) $\partial \|m_0\|_{TV} \cap \operatorname{Im}(\Phi^*) \neq \emptyset$,
- (ii) le certificat de norme minimale η_0 satisfait

$$\forall s \in \mathbb{T} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}, |\eta_0(s)| < 1, \quad (28)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \eta_0''(x_i) \neq 0. \quad (29)$$

La condition (i) permet de définir le certificat de norme minimale et de localiser le support de n'importe quelle solution de $(\mathcal{P}_\lambda(s^*))$ près du support signé de η_0 et la condition (29) permet de s'assurer que cette solution est une superposition de spikes. La condition (28) est suffisante pour montrer l'unicité du problème $(\mathcal{P}_0(s^*))$. Pour étudier le problème dans le cas de faibles perturbations, on introduit l'ensemble

$$D_{\alpha, \lambda_0} = \{(\lambda, w) \in \mathbb{R}^+ \times L^2(\mathbb{R}) : 0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \text{ et } \|w\|_2 \leq \alpha \lambda\},$$

pour $\alpha > 0$ et $\lambda_0 > 0$. Enfin, on note Γ_x l'application

$$(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \Phi_x u + \Phi'_x v \in L^2(\mathbb{R}),$$

où $\Phi_x(a) = \Phi(m_{a,x})$ et $\Phi'_x(a) = (\Phi(m_{a,x}))'$. La théorème suivant résume la situation :

Théorème 10. *On suppose que l'application Γ_x est de rang maximale et que m^* vérifie la condition de source non dégénérée. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\lambda_0 > 0$ tels que pour tout $(\lambda, w) \in D_{\alpha, \lambda_0}$, la solution \tilde{m}_λ de $(\mathcal{P}_\lambda(s^*))$ où $s^* = \Phi(m^*) + w$ est unique et est composée de exactement N spikes. On peut écrire $\tilde{m}_\lambda = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\lambda,i} \delta_{\tilde{x}_{\lambda,i}}$ et à une permutation près des indices, on a $\operatorname{sign}(\tilde{a}_{\lambda,i}) = \operatorname{sign}(a_i)$.*

On peut aussi montrer la stabilité des amplitudes et de l'emplacement des spikes par rapport au bruit :

$$\forall i = 1, \dots, N, |\tilde{x}_{\lambda,i} - x_i| = O(\|w\|_2) \text{ et } |\tilde{a}_{\lambda,i} - a_i| = O(\|w\|_2).$$

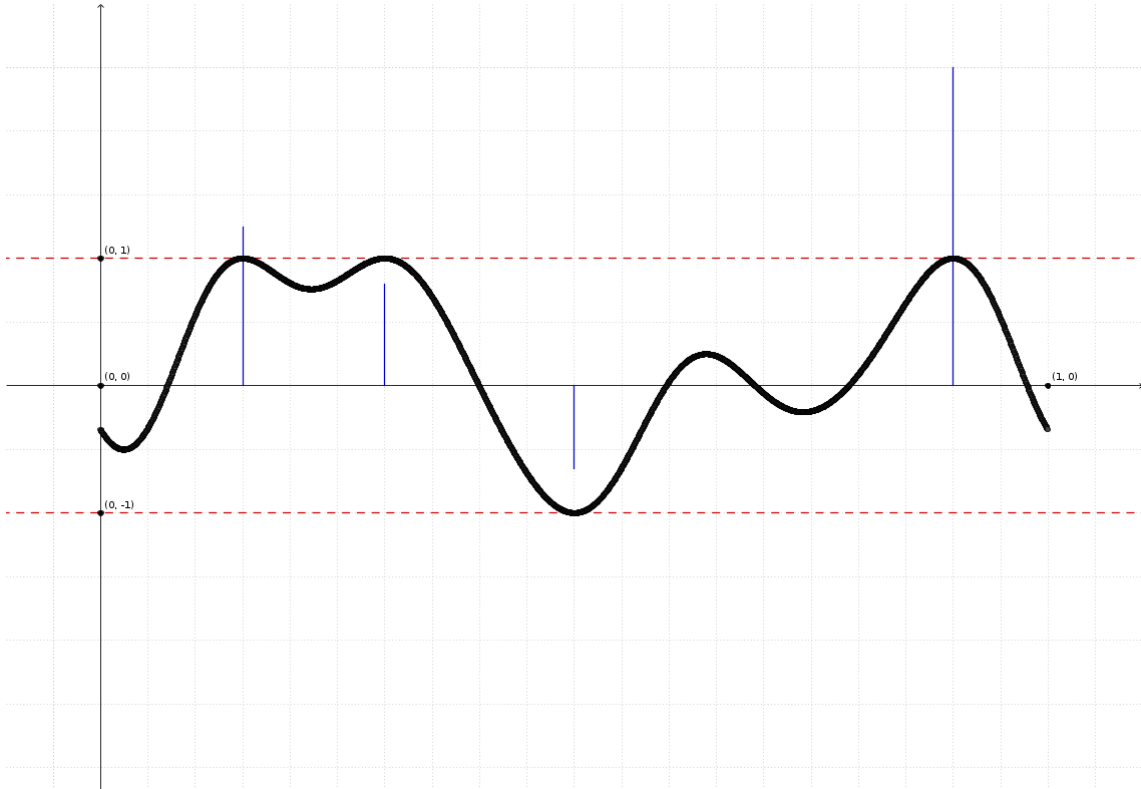


FIGURE 5 – La courbe épaisse représente le certificat de norme minimale associée à la mesure de la figure 4. Ici m^* vérifie la condition de source non dégénérée.

3.5 Conclusion

La construction de certificats duaux permet, lorsqu'elle est possible, de résoudre le problème inverse. Malheureusement, pour chaque cas particuliers, il faut construire le certificat adapté. Pour palier cette difficulté, on explicite souvent un pré-certificat, c'est-à-dire un candidat potentiel. Le pré-certificat de Fuchs est le plus connu d'entre eux.

4 Acquisition comprimée

L'acquisition comprimée a été la première alternative découverte au théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. depuis, on sait que le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction d'un signal parcimonieux pour être drastiquement diminué. Ce sont David Donoho, Emmanuel Candès, Terence Tao et Justin Romberg les premiers à avoir formalisé cette approche.

On observe $c^* \in \mathbb{R}^n$ à travers une matrice Φ de taille $d \times n$. Cela se traduit par la connaissance de

$$s^* = \Phi c^* + w,$$

où w est un bruit, éventuellement nul. La littérature de l'acquisition comprimée fournit pléthore de conditions assurant l'identifiabilité ou la robustesse de la minimisation ℓ^1 . Nous n'en développerons que quelques unes. Ces conditions demandent souvent à Φ de vérifier une hypothèse uniformément sur l'ensemble des vecteurs coefficient de \mathbb{R}^n ce qui les rend difficilement exploitables dans certains cas particuliers. C'est lorsque Φ est de grande taille et tirée selon certaines lois de probabilité que la théorie de l'acquisition comprimée prend tout son sens.

4.1 Propriété d'isométrie restreinte (RIP)

4.1.1 Cas non bruité

Dans cette section, on montre que si c^* est suffisamment parcimonieux et si Φ ressemble à une isométrie pour l'ensemble \mathcal{P}_k des vecteur k -parcimonieux, alors la solution \hat{c}^* du problème (L_1) engendré par $s^* = \Phi c^*$ est proche de c^* . Ce résultat élégant vient de l'article [4] de Candès. Dans un premier temps, pour mesurer la ressemblance d'une matrice avec une isométrie, on définit sa constante d'isométrie restreinte.

Définition 3. Soit $A \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On définit la k -constante d'isométrie restreinte de A par :

$$\delta_k(A) = \inf \left\{ \delta > 0 \mid \forall c \in \mathcal{P}_k, (1 - \delta)\|c\|_2^2 \leq \|Ac\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|c\|_2^2 \right\}$$

Par la suite, on note δ_k la k -constante d'isométrie restreinte de Φ . On remarque que si $\delta_k = 0$ alors pour tout $\Lambda \subset \Omega$ tel que $|\Lambda| \leq k$, Φ_Λ est une isométrie.

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\Lambda \subset \Omega$ l'ensemble qui indexe les k plus grandes composantes (en valeur absolue) de c^* . La meilleure approximation k -parcimonieuse que l'on pourrait faire de c^* est donc c_Λ^* . Le théorème suivant montre la robustesse de la minimisation ℓ^1 et l'identifiabilité pour (L_1) des vecteurs k -parcimonieux lorsqu'une certaine condition sur δ_k est vérifiée.

Théorème 11. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons que Φ vérifie la propriété d'isométrie restreinte : $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$. Alors la solution \hat{c}^* du problème (L_1) vérifie :

$$\begin{aligned} \|\hat{c}^* - c^*\|_1 &\leq C_0 \|c^* - c_\Lambda^*\|_1 \text{ et} \\ \|\hat{c}^* - c^*\|_2 &\leq \frac{C_0}{\sqrt{k}} \|c^* - c_\Lambda^*\|_1, \end{aligned}$$

où C_0 est une constante ne dépendant que de δ_{2k} .

Ce théorème est global car il ne fait pas d'hypothèse particulière sur c^* . Malheureusement, l'hypothèse RIP est forte en pratique et peu d'opérateurs la satisfont pour k raisonnablement grand. Cela s'explique par le fait que la RIP est une condition globale et uniforme sur tous les vecteurs coefficient. Nous le verrons plus en détail dans la preuve du théorème.

4.1.2 Cas bruité

Soit $\epsilon > 0$. On donne maintenant un théorème analogue dans le cas où le signal est perturbé par un bruit borné en norme ℓ^2 :

$$\Phi c^* = s^* + w \text{ avec } \|w\|_2 \leq \epsilon.$$

On s'intéresse à la solution du problème (L_1^ϵ) engendré par s^* et ϵ . Avec les mêmes hypothèses, on a un théorème similaire.

Théorème 12. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $\epsilon > 0$ et supposons que $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$. Alors la solution \hat{c}^* du problème (L_1^ϵ) vérifie :

$$\|\hat{c}^* - c^*\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{k}} \|c^* - c_\Lambda^*\|_1 + C_1 \epsilon,$$

avec C_0 la même constante que dans le théorème 11 et C_1 une autre constante ne dépendant que de δ_{2k} .

4.1.3 Preuves

On commence par prouver le théorème 12 ce qui, en prenant $\epsilon = 0$, montrera la première assertion du théorème 11, puis on énoncera un lemme qui permettra de retrouver la seconde assertion.

Démonstration. On pose : $\beta = \hat{c}^* - c^* \in \mathbb{R}^n$ (c'est parce que β peut être égal à n'importe quel vecteur de \mathbb{R}^n qu'on a besoin d'hypothèses globales sur Φ). β étant fixé, on désigne par T_0 l'ensemble des indices correspondant aux k plus grandes composantes (en valeur absolue) de β , par T_1 les k plus grandes suivantes, etc. La preuve consiste à, dans un premier temps, majorer $\|\beta_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2$ par un terme qui dépend de $\|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2$, puis de montrer que $\|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2$ est assez petit.

1. D'après la définition des T_i , on a :

$$\|\beta_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq k^{-1/2} \|\beta_{T_0^c}\|_1,$$

or, lorsque $\|c + \beta\|_1$ est minimum, ce second terme est petit. En effet :

$$\|\beta_{T_0^c}\|_2 \leq \|\beta_{T_0}\|_1 + 2\|c_{T_0^c}\|_1. \quad (30)$$

On en déduit la première inégalité :

$$\|\beta_{(T_0 \cup T_1)^c}\|_2 \leq \|\beta_{T_0}\|_2 + 2k^{-1/2} \|c_{T_0^c}\|_1. \quad (31)$$

2. Pour la seconde étape, on commence par utiliser la RIP :

$$(1 - \delta_{2k}) \|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 \leq \|\Phi \beta_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2k}) \|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2^2,$$

Ensuite, on décompose le terme du milieu avec $\langle \Phi \beta_{T_0 \cup T_1}, \Phi \beta \rangle - \langle \Phi \beta_{T_0 \cup T_1}, \sum_{j \geq 2} \Phi \beta_{T_j} \rangle$. En utilisant la RIP et le fait que le bruit est borné, on peut majorer le premier terme par

$$2\epsilon \sqrt{1 + \delta_{2k}} \|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2.$$

Pour le second, on utilise les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\langle \Phi c, \Phi c' \rangle| &\leq \delta_{k+k'} \|c\|_2 \|c'\|_2, \\ \left\| \sum_{j \geq 2} \beta_{T_j} \right\|_2 &\leq k^{-1/2} \|\beta_{T_0^c}\|_1. \end{aligned}$$

La première inégalité n'est valable que pour deux vecteurs, c et c' , à supports disjoints et de cardinal plus petit que, respectivement, k et k' . C'est une conséquence de la définition de la constante d'isométrie et de l'identité du parallélogramme. En combinant ces différentes inégalités ainsi que (30), on obtient :

$$\|\beta_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq (1 - \rho)^{-1} (\alpha \epsilon + 2\rho k^{-1/2} \|c_{T_0^c}\|_1). \quad (32)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \frac{\sqrt{1 + \delta_{2k}}}{1 - \delta_{2k}} \text{ et} \\ \rho &= \sqrt{2} \frac{\delta_{2k}}{1 - \delta_{2k}}. \end{aligned}$$

Les inégalités (31) et (32) impliquent le théorème 12 avec :

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \text{ et} \\ C_1 &= 2 \frac{\alpha}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

On a eu besoin de l'hypothèse $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ pour que $\rho < 1$. Pour la deuxième inégalité du théorème 12, il faut utiliser $\|\beta_{T_0}\|_1 \leq \rho \|\beta_{T_0^c}\|_1$. \square

4.1.4 Résultats numériques

Le défaut majeur de cette méthode RIP est le recours à des hypothèses globales. Comme on ne sait rien sur le vecteur β , il suffit que un vecteur ne satisfasse pas l'hypothèse RIP pour que la démonstration tombe à l'eau et dans la pratique, lorsque l'on estime la constante d'isométrie pour des matrices tirées aléatoirement, on dépasse rapidement le seuil $\sqrt{2}-1$. Cependant, la théorie du *compressed sensing* se place dans un cadre métrique ce qui la rend robuste au bruit, alors que d'autres (par exemple, topologique) en sont incapables même si elles obtiennent de meilleurs résultats dans le cas non bruité.

Pour calculer un minorant de $\delta_k(\Phi)$, on utilise l'algorithme glouton décrit dans le papier [16] de Dossal, Peyré et Fadili. Minorer $\delta_k(\Phi)$ revient à trouver un vecteur coefficient dont le support Λ est tel que Φ_Λ soit mal conditionnée. Les auteurs remarquent que les vecteurs k -parcimonieux c qui maximisent $\|d(c)\|_2$ (où $d(c) = \Phi_\Lambda(\Phi^*\Phi)^{-1} \text{sign}(c_\Lambda)$ avec $\Lambda = \text{supp}(c)$ désigne le pré-certificat de Fuchs) semblent fournir des bornes convenables de la k -constante d'isométrie de Φ . L'algorithme glouton mis en place consiste, à chaque itération, à faire les choix optimaux pour maximiser $\|d(c)\|_2$.

On présente maintenant un tableau similaire à celui présenté à la fin de la section 2 (tableau 2.5.2). Soit n un entier. On note δ le rapport $\frac{d}{n}$. Ensuite, on tire aléatoirement $m \in \mathbb{N}$ matrices de taille $\delta n \times n$ telles que leurs coefficients soient i.i.d et de distribution $\mathcal{N}(0, 1)/\sqrt{n}$. Pour chaque matrice Φ , on calcule le minorant de $\delta_{2k}(\Phi)$ et on réalise la moyenne. Cela permet d'accéder à une estimation de la parcimonie moyenne maximale, notée $k^{\max}(n, \delta)$, telle que la condition RIP est vérifiée. Ces résultats confirment l'idée

TABLE 1 – Tableau des valeurs de k^{\max} pour $m = 500$.

$n \backslash \delta$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	1
1000	0	0	1	2	2	2
2000	0	1	2	3	4	5
3000	0	1	3	5	6	7
4000	0	1	4	7	8	10

que l'hypothèse RIP n'est pas exploitable dans ce cadre. La sous-section suivante présente une approche en termes de probabilité qui traite l'exactitude et la robustesse du solveur LASSO.

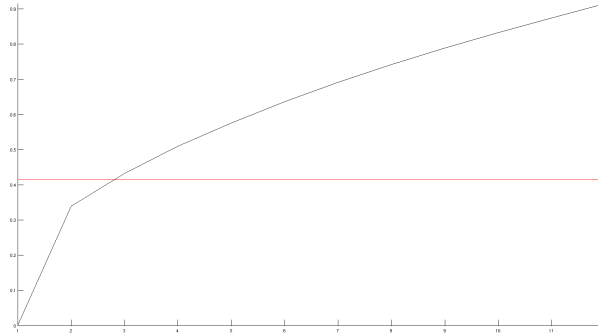


FIGURE 6 – Dans cet exemple, on a choisi une matrice Φ de taille 500×1000 et telle que ses coefficients soient i.i.d et de distribution $\mathcal{N}(0, 1)/\sqrt{n}$. La courbe noire représente un minorant de la constante d'isométrie de Φ et la courbe rouge représente la droite d'équation $y = \sqrt{2} - 1$. On remarque que la condition RIP n'est pas vérifiée pour $k > 1$.

4.2 Sélection par minimisation ℓ^1

On s'intéresse aux solutions de (Q_1^σ) dans le cas où le signal est bruité par une fonction gaussienne de variance σ . On présente ici une autre condition de type RIP, la propriété de cohérence ([7]).

Définition 4. On dit que Φ vérifie la propriété de cohérence pour $A_0 > 0$ si :

$$\mu(\Phi) \leq \frac{A_0}{\log(n)}. \quad (33)$$

Par exemple, si pour construire Φ , on utilise des v.a.i.i.d de loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ puis qu'on normalise les colonnes, alors l'espérance de la cohérence de Φ est

$$\mathbb{E}[\mu(X)] = \sqrt{\frac{2 \log(n)}{d}}.$$

Soit $k \leq n$ un entier. Pour tirer aléatoirement un vecteur k -parcimonieux c^* , on utilise le *modèle générique k -parcimonieux* que l'on peut décrire en deux étapes :

- on sélectionne aléatoirement le support Λ de c^* parmi les sous-ensembles de Ω de cardinal k et selon une loi uniforme,
- sachant Λ , on choisit les signes des composantes non nulles de c^* indépendamment et uniformément entre -1 et 1,

On ne donne pas de condition sur l'amplitude des composantes de c^* . Ce modèle est amplement justifié par la proposition 4. On peut obtenir des résultats forts en supposant seulement que Φ obéit à la propriété de cohérence pour A_0 assez petit et que c^* est suffisamment parcimonieux.

Théorème 13. On suppose que Φ vérifie (33) pour A_0 assez petit. Soit $k \leq \frac{c_0 n}{\|\Phi\|_{2,2}^2 \log n}$ avec c_0 assez petit (voir la sous-section 4.3.1 pour la définition de la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{2,2}$). On tire c^* via le modèle générique k -parcimonieux. Alors la solution \hat{c}^* de (Q_1^*) avec $\gamma = 2\sigma^2 \sqrt{2 \log n}$ vérifie :

$$\|\Phi c^* - \Phi \hat{c}^*\|_2^2 \leq C_0 \cdot (2 \log n) \cdot k \cdot \sigma^2, \quad (34)$$

avec une probabilité d'au moins $1 - 6p^{-2 \log^2} - n^{-1}(2\pi \log n)^{-1}$.

On peut faire plusieurs remarques sur les constantes qui apparaissent dans ce théorème :

- on peut prendre $C_0 = 8(1 + \sqrt{2})^2$,
- A_0 et c_0 doivent vérifier : $30A_0 + 13\sqrt{2c_0} \leq a$ où $a < \frac{1}{2}$.

Le théorème montre que LASSO identifie les composantes non nulles les plus significatives de c^* ainsi que leur signe. Si on suppose de plus que l'amplitude des composantes non nulles de c^* sont suffisamment élevées, alors LASSO permet de retrouver son support avec grande probabilité.

Théorème 14. On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 13. On note Λ le support de c^* et on suppose de plus que

$$\min_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda^*| > 8\sigma \sqrt{2 \log n}.$$

Alors, si \hat{c}^* est la solution du problème (Q_1^*) avec $\gamma = 2\sigma^2 \sqrt{2 \log n}$, on a :

$$\text{supp}(\hat{c}^*) = \text{supp}(c^*) \text{ et} \quad (35)$$

$$\forall \lambda \in \Lambda, \text{sign}(\hat{c}_\lambda^*) = \text{sign}(c_\lambda^*), \quad (36)$$

avec la probabilité $1 - 2n^{-1}((2\pi \log n)^{-1/2} + |\Lambda|n^{-1}) - O(n^{-2 \log^2})$.

En faisant les mêmes hypothèses que dans le théorème 14, on peut améliorer l'estimateur \hat{c}^* via la procédure :

- utiliser LASSO pour estimer le support, $\hat{\Lambda} = \{\lambda \in \Omega \mid \hat{c}_\lambda^* \neq 0\}$,
- trouver \hat{c}^* en faisant une régression linéaire sur les colonnes de Φ indexées par $\hat{\Lambda}$.

Avec une grande probabilité, on a $\hat{\Lambda} = \Lambda$, donc

$$\|\Phi c^* - \Phi \hat{c}^*\|_2^2 = \|P[\Lambda]w\|_2^2,$$

où $P[\Lambda]$ est le projecteur sur l'espace engendré par les colonnes de Φ indexées par Λ . D'où :

$$\|\Phi c^* - \Phi \hat{c}^*\|_2^2 \leq C \cdot k \cdot \sigma^2,$$

avec C une constante. On n'a plus le terme en $\log n$.

La grande faiblesse de ces théorèmes provient de la deuxième remarque sur les constantes c_0 et A_0 . En effet, vérifier la propriété de cohérence avec $A_0 \leq \frac{1}{60}$ est une condition relativement forte. Dans le cas des matrices dont les colonnes sont i.i.d. puis normalisées, il faut un grand nombre de mesures pour pouvoir la vérifier (typiquement, si $n = 2d$, il faut $d \geq 3,8 \cdot 10^7$ mesures).

4.3 L'Exact Recovery Coefficient (ERC)

4.3.1 Normes d'opérateurs

Nous allons présenter quelques normes matricielles.

Soit $A \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ une matrice. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $p', q' \in [1, +\infty]$ leur *conjugué* ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). La norme d'opérateur (ℓ^p, ℓ^q) de A est notée :

$$\|A\|_{p,q} = \max_{c \neq 0} \frac{\|Ac\|_q}{\|c\|_p} = \|A^*\|_{q',p'}.$$

Les normes d'opérateurs ne se calculent pas toutes de la même façon et avec la même complexité. Voici un tableau récapitulatif des cas les plus importants :

		CO-DOMAINES		
		ℓ^1	ℓ^2	ℓ^∞
DOMAINES	ℓ^1	Maximum de la norme ℓ^1 d'une colonne	Maximum de la norme ℓ^2 d'une colonne	Maximum de la valeur absolue d'un coefficient
	ℓ^2	NP-complet	Valeur singulière maximale	Maximum de la norme ℓ^2 d'une ligne
	ℓ^∞	NP-complet	NP-complet	Maximum de la norme ℓ^1 d'une ligne

4.3.2 Quelques définitions

On définit une mesure de la similarité entre un sous-dictionnaire et le reste du dictionnaire que l'on appelle *exact recovery coefficient*. Si Λ indexe une sous-famille libre de \mathcal{D} , alors :

$$\text{ERC}(\Lambda) = 1 - \max_{\lambda \notin \Lambda} \|\Phi_\Lambda^+ \varphi_\lambda\|_1.$$

On verra que la plupart des résultats nécessitent la condition

$$\text{ERC}(\Lambda) > 0. \quad (37)$$

L'ERC est une mesure qu'on pourrait qualifier de *semi-locale* car elle peut être largement perturbée par l'ajout d'un atome au dictionnaire mais elle se calcule sur un support donné et pas sur tout le dictionnaire.

Si s est un signal alors sa *corrélation maximale* avec le dictionnaire \mathcal{D} est définie par :

$$\text{maxcor}(s) = \max_{\omega \in \Omega} \frac{|\langle s, \varphi_\omega \rangle|}{\|s\|_2} = \frac{\|\Phi^* s\|_\infty}{\|s\|_2} \in [0, 1].$$

La corrélation maximale de s est égale à 1 si s est colinéaire à l'un des atomes du dictionnaire.

On rappelle aussi que la *projection orthogonale* P_Λ sur le sous-espace vectoriel engendré par les atomes indexés par Λ peut s'exprimer par : $P_\Lambda = \Phi_\Lambda \Phi_\Lambda^+$. Ainsi, si s est un signal, sa meilleure approximation n'utilisant que les atomes indexés par Λ est $P_\Lambda s$.

4.3.3 Condition de corrélation

Soit Λ un sous-ensemble de Ω qui indexe une famille libre de \mathcal{D} . On note $a_\Lambda^* = P_\Lambda s^*$ la meilleure approximation de s^* que l'on peut faire avec les atomes de \mathcal{D}_Λ . On utilisera le vecteur coefficient $c_\Lambda^* = \Phi_\Lambda^+ s^*$ pour synthétiser a_Λ^* . Un résultat essentiel est le :

Lemme 9 (Condition de corrélation). *On suppose que le produit scalaire entre le signal résiduel et n'importe quel atome du dictionnaire \mathcal{D} vérifie :*

$$\|\Phi^*(s^* - a_\Lambda^*)\|_\infty = \text{maxcor}(s^* - a_\Lambda^*) \|s^* - a_\Lambda^*\|_2 \leq \gamma \text{ERC}(\Lambda). \quad (38)$$

Alors, n'importe quel vecteur coefficient \hat{c} qui minimise le problème $(Q_1^?)$ satisfait : $\text{supp}(\hat{c}) \subset \Lambda$.

Ce lemme n'a aucun intérêt si la condition (37) n'est pas vérifiée, et si c'est le cas, alors la condition (38) l'est pour γ assez grand. Cependant, si γ est trop grand ($\gamma \geq \|\Phi^* s\|_\infty$), alors l'unique solution du problème (Q_1^γ) est $\hat{c} = 0$.

Ce lemme a plusieurs corollaires, conséquences directes de l'égalité dans la condition (38). Comme la corrélation maximale entre un signal et un dictionnaire est toujours entre 0 et 1, on peut remplacer le terme de gauche dans (38) par $\|s^* - a_\Lambda^*\|_2$. Et si on normalise le signal alors on peut le remplacer par $\max\langle s^* - a_\Lambda^* \rangle$. Enfin, si on peut exprimer le signal uniquement avec les atomes de \mathcal{D}_Λ alors, un autre corollaire se dévoile à nous :

Corollaire 3. *On suppose que $s^* \in \text{Im}(\Phi_\Lambda)$ et que $\text{ERC}(\Lambda) > 0$. Alors pour tout γ , le support d'un vecteur coefficient qui minimise (Q_1^γ) doit être inclus dans Λ .*

La preuve du lemme 9 utilise le théorème suivant qui est une généralisation du critère de séparabilité de Fuchs (voir [28]).

Théorème 15. *Soit $\Lambda \subset \Omega$. On suppose que $\text{ERC}(\Lambda) > 0$ et que le signal s^* est synthétisé par les atomes indexés par Λ . Alors :*

1. *il existe un unique vecteur coefficient c^* dont le support est inclus dans Λ qui synthétise s^* ,*
2. *c^* est l'unique solution du problème (L_1).*

On décrit maintenant les grandes étapes de la preuve du lemme 9.

Démonstration du lemme 9. On note

$$L(c) = \frac{1}{2} \|s^* - \Phi c\|_2^2 + \gamma \|c\|_1$$

la fonction objectif du problème (Q_1^γ). On suppose, par l'absurde, qu'il existe un vecteur coefficient \hat{c} qui minimise L et tel que $\text{supp}(\hat{c}) \not\subseteq \Lambda$. L'idée de la preuve est de comparer \hat{c} au vecteur coefficient projeté $\Phi_\Lambda^+ \Phi \hat{c}$ dont le support est inclus dans Λ . Par définition de \hat{c} , on a $L(\hat{c}) \leq L(\Phi_\Lambda^+ \Phi \hat{c})$, d'où :

$$2\gamma \left[\|\hat{c}\|_1 - \|\Phi_\Lambda^+ \Phi \hat{c}\|_1 \right] \leq \|s - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c}\|_2^2 - \|s - \Phi \hat{c}\|_2^2. \quad (39)$$

Dans un premier temps, on montre en raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème 15 que $\Phi \hat{c}$ n'appartient pas à l'espace engendré par les atomes indexés par Λ .

Dans un second temps, on décompose \hat{c} en deux parties. D'une part, les coefficients indexés dans Λ et d'autres part, ceux indexés dans Λ^c . On notera :

$$\hat{c} = \hat{c}_\Lambda + \hat{c}_{\Lambda^c}.$$

Ensuite, on écrit :

$$\|\hat{c}\|_1 - \|\Phi_\Lambda^+ \Phi \hat{c}\|_1 \geq \|\hat{c}_{\Lambda^c}\|_1 - \|\Phi_\Lambda^+ \Phi \hat{c}_{\Lambda^c}\|_1.$$

On peut minorer cette inégalité par $\text{ERC}(\Lambda) \|\hat{c}_{\Lambda^c}\|_1$. Pour la majorer, on va réécrire le terme de droite dans (39). On a :

$$\begin{aligned} \|s^* - \Phi \hat{c}\|_2^2 &= \|s^* - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c} + \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c} - \Phi \hat{c}\|_2^2 \\ &= \|s^* - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c}\|_2^2 + \|(I - \mathcal{P}_\Lambda) \Phi \hat{c}\|_2^2 - 2\langle (I - \mathcal{P}_\Lambda) \Phi \hat{c}, s^* - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c} \rangle, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|s^* - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c}\|_2^2 - \|s^* - \Phi \hat{c}\|_2^2 = \langle (I - \mathcal{P}_\Lambda) \Phi \hat{c}, s^* - \mathcal{P}_\Lambda \Phi \hat{c} \rangle - \|(I - \mathcal{P}_\Lambda) \Phi \hat{c}\|_2^2. \quad (40)$$

En remarquant que $(I - \mathcal{P}_\Lambda) \Phi c_\Lambda = 0$ et en utilisant l'inégalité d'Hölder, on peut majorer le produit scalaire par $\|\hat{c}_{\Lambda^c}\|_1 \|\Phi^*(s^* - a_\Lambda^*)\|_\infty$. De plus, comme $\Phi \hat{c}$ n'est pas dans l'espace engendré par les atomes indexés par Λ , le deuxième terme de l'équation (40) est strictement plus petit que 0. On en déduit :

$$\gamma \text{ERC}(\Lambda) < \|\Phi^*(s^* - a_\Lambda^*)\|_\infty,$$

ce qui est la négation de la condition (38). □

Comme dans la preuve précédente, on note L la fonctionnelle associée au problème (Q_1^γ) . Écrire que 0 appartient au sous-différentiel de L conduit à l'équivalence suivante :

$$\hat{c} \in \underset{\text{supp}(c) \subset \Lambda}{\text{argmin}} L(c) \iff \exists g \in \partial \|\hat{c}\|_1, \quad c_\Lambda^* - \hat{c}_\Lambda = \gamma(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1} g,$$

ce qui donne les bornes suivantes :

$$\begin{aligned} \|c_\Lambda^* - \hat{c}_\Lambda\|_\infty &\leq \gamma \|(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)^{-1}\|_{\infty, \infty}, \\ \|\Phi_\Lambda(c_\Lambda^* - \hat{c}_\Lambda)\|_\infty &\leq \gamma \|\Phi_\Lambda^+\|_{2,1}. \end{aligned}$$

Cette proposition et le lemme 9 montrent que si le signal s^* peut être décrit uniquement à l'aide des atomes indexés par Λ et si $\text{ERC}(\Lambda) > 0$ alors, pour γ suffisamment petit, le minimiseur de (Q_1^γ) a pour support Λ . En effet, si

$$\|c_\Lambda^* - \hat{c}_\Lambda\|_\infty < \min_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda^*|,$$

alors, les composantes indexées par Λ de \hat{c} sont toutes non nulles. La condition (37) permet donc de retrouver exactement le support de tout vecteur coefficient c^* et le théorème suivant montre que cette condition est même nécessaire :

Théorème 16. *Soit $\Lambda \subset \Omega$ tel que Φ_Λ soit injectif. Supposons que $\text{ERC}(\Lambda) < 0$. Alors, il existe un signal que l'on peut décrire avec les atomes de \mathcal{D}_Λ et tel que n'importe quel minimiseur de (Q_1^γ) n'a pas son support inclus dans Λ .*

(Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que si \mathcal{D}_Λ est une sous-famille libre alors $\text{ERC}(\Lambda) \neq 0$)

Démonstration du théorème 16. L'hypothèse $\text{ERC}(\Lambda) < 0$ implique l'existence d'un atome φ_ω ($\omega \notin \Lambda$) tel que :

$$\|\Phi_\Lambda^+ \varphi_\omega\|_1 > 1.$$

On observe le signal $s^* = \mathcal{P}_\Lambda \varphi_\omega$ et pour le synthétiser on utilise $c_\Lambda^* = \Phi_\Lambda^+ \varphi_\omega$. Pour prouver le théorème, on va montrer par l'absurde qu'un minimiseur \hat{c} de L dont le support est inclus dans Λ ne peut exister. Pour cela, on introduit pour $t \in]0, 1]$ le vecteur coefficient

$$c(t) = (1-t)\hat{c} + t e_\omega$$

dont le support n'est pas inclus dans Λ et on montre que pour t assez petit, $L(c(t)) < L(\hat{c})$ (développer $L(c(t))$, différentier en $t = 0$ et montrer que la dérivée est négative). \square

4.3.4 Application à LASSO

Soit $s^* \in \mathbb{R}^d$ un signal. On va voir que la condition (37) est suffisante pour que les problèmes (Q_0^τ) et (Q_1^γ) donnent des solutions similaires. Soient $\tau > 0$ et c^* une solution du problème (Q_0^τ) engendré par s^* et τ . Posons $a^* = \Phi c^*$ l'approximation de s^* par c^* et notons $\Lambda = \text{supp}(c^*)$ son support.

Proposition 3. *On a :*

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{supp}(c^*), \quad |c_\lambda^*| &\geq \tau \text{ et} \\ \forall \omega \notin \text{supp}(c^*); \quad |\langle s^* - a^*, \varphi_\omega \rangle| &\leq \tau. \end{aligned}$$

De plus, si on suppose que c^ est la solution la plus parcimonieuse, alors la seconde inégalité est stricte.*

Théorème 17. *On suppose que $\text{ERC}(\Lambda) > 0$. Alors, la solution du problème (Q_1^γ) engendré par s^* et $\gamma = \tau / \text{ERC}(\Lambda)$, notée \hat{c}^* , est unique et vérifie :*

$$\begin{aligned} \text{supp}(\hat{c}^*) &\subset \text{supp}(c^*), \\ \|\hat{c}^* - c^*\|_\infty &\leq \|(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)\|_{\infty, \infty} \gamma, \\ \forall \lambda \in \text{supp}(\hat{c}^*), \quad |\hat{c}_\lambda^*| &> \|(\Phi_\Lambda^* \Phi_\Lambda)\|_{\infty, \infty} \gamma. \end{aligned}$$

Ainsi, sous la condition (37), la solution du problème (Q_1^γ) pour γ assez petit est proche de c^ et sélectionne ses composantes les plus significatives.*

5 Géométrie convexe du Basis Pursuit

Dans cette section, on développe une approche plus récente ([10]) qui a l'avantage d'inclure la reconstruction de signaux bruités à l'aide du problème (L_1^ϵ) . On cherche à reconstruire $c^* \in \mathbb{R}^n$ à partir de l'observation de d mesures (linéaires)

$$s^* = \Phi c^* + w,$$

où w , qui peut éventuellement être nul, désigne un bruit et où Φ est une matrice réelle de taille $n \times d$ (dont les colonnes ne sont pas nécessairement unitaires) tirée aléatoirement. En général, les coefficients de Φ seront i.i.d et de loi gaussienne. Ici, on supposera que w est borné en norme ℓ^2 par une constante $\epsilon > 0$. Ainsi, ce sont les problèmes (L_1) et (L_1^ϵ) qui vont focaliser notre attention. On notera \hat{c}^* (resp. \hat{c}_ϵ^*) une solution du problème (L_1) (resp. (L_1^ϵ)) engendré par s^* (resp. s^* et ϵ). Le but de ce qui va suivre est d'expliciter des conditions sur c^* pour que, avec grande probabilité, la reconstruction via les problèmes (L_1) ou (L_1^ϵ) soit exacte ou robuste.

5.1 Cône tangent et problème inverse

On rappelle qu'un *cône* est un ensemble stable par combinaisons linéaires positives. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cône. Le *cône polaire* \mathcal{C}^* de \mathcal{C} est :

$$\mathcal{C}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall z \in \mathcal{C}, \langle x, z \rangle \leq 0\}.$$

Si $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on appelle *cône tangent* en c l'ensemble :

$$\mathcal{T}(c) = \text{cone}\{z - c : \|z\|_1 \leq \|c\|_1\},$$

où $\text{cone}(A)$ désigne le plus petit cône qui contient l'ensemble A . La proposition suivante nous permet, à l'aide $\mathcal{T}(c^*)$, de caractériser l'exactitude ou la robustesse de la reconstruction ℓ^1 .

Proposition 4. \hat{c}^* est une solution du problème (L_1) générée par s^* si et seulement si

$$\text{Ker}(\Phi) \cap \mathcal{T}(c^*) = \{0\}.$$

Si \hat{c}_ϵ^* est une solution du problème (L_1^ϵ) générée par s^* et ϵ alors

$$\forall \delta > 0, (\forall z \in \mathcal{T}(c^*), \|\Phi z\|_2 \geq \delta \|z\|_2) \implies \left(\|\hat{c}_\epsilon^* - c^*\|_2 \leq \frac{2\epsilon}{\delta} \right)$$

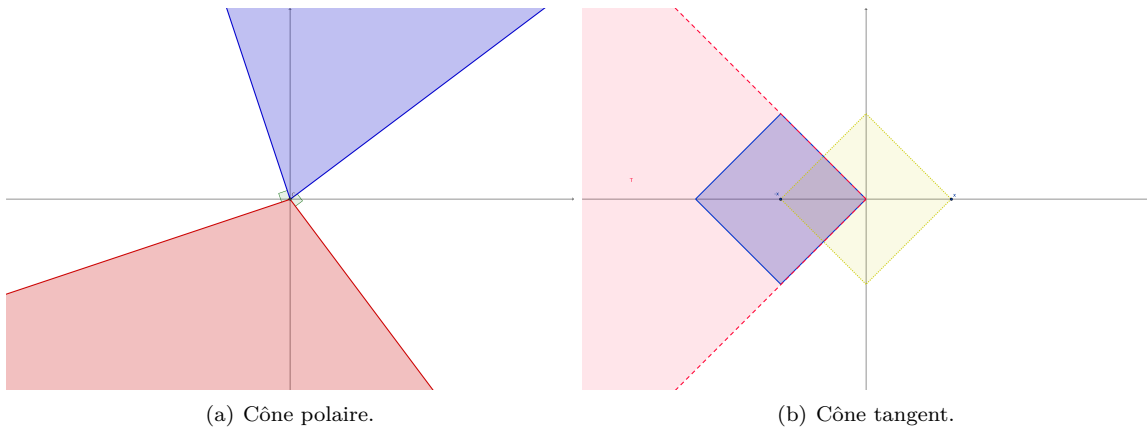


FIGURE 7 – À gauche : la partie bleue représente un cône dans \mathbb{R}^2 et la partie rouge son cône polaire, et inversement. À droite : la partie jaune représente la boule ℓ^1 de rayon $\|x\|_1$ et la partie bleue et la partie rouge forment le cône tangent en x (la partie bleue est l'ensemble qui génère $\mathcal{T}(x)$).

5.2 Condition suffisante par les épaisseurs gaussiennes

On introduit la notion d'*épaisseur gaussienne* qui va nous être utile pour estimer le nombre de mesures nécessaires pour que la reconstruction ℓ^1 soit exacte (ou robuste). Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble quelconque. On définit l'épaisseur gaussienne de S par :

$$w(S) = \mathbb{E}_g[\sup_{z \in S} \langle g, z \rangle],$$

où $g \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ est un vecteur gaussien dont la covariance est la matrice identité (chaque composante est indépendante des autres et suit une loi normale centrée réduite). On note aussi λ_k l'espérance de la longueur de $g \sim \mathcal{N}(0, I_k)$ ($k \geq 0$). Pour calculer λ_k , on peut réaliser un changement de variables en coordonnées hypersphériques, ce qui donne :

$$\lambda_k = \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \in \left[\frac{k}{\sqrt{k+1}}, \sqrt{k} \right].$$

Le théorème suivant est dû à Gordon ([21]) :

Théorème 18. *Soient $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un fermé et $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire dont les coefficients sont i.i.d et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors :*

$$\mathbb{E} \left[\min_{z \in \Omega} \|\Phi z\|_2 \right] \geq \lambda_d - w(\Omega).$$

Ce théorème permet de lier les épaisseurs gaussiennes à notre problème, comme le montre le corollaire suivant :

Corollaire 4. *Soit $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire dont les coefficients sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1/d)$. Notons $\Omega = \mathcal{T}_A(c^*) \cap \mathbb{S}^{n-1}$.*

1) *Avec une probabilité d'au moins $1 - \exp(-\frac{1}{2}[\lambda_d - w(\Omega)])$, on a :*

$$d \geq w(\Omega)^2 + 1 \implies c^* = \hat{c}^*.$$

2) *Avec une probabilité d'au moins $1 - \exp(-\frac{1}{2}[\lambda_d - w(\Omega) - \delta\sqrt{d}])$, on a :*

$$\forall \delta > 0, d \geq \frac{w(\Omega)^2 + 3/2}{(1 - \delta)^2} \implies \|c^* - \hat{c}^*\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta},$$

Prendre des coefficients de variance $1/d$ revient presque au même que de prendre les colonnes de Φ unitaires. En effet, l'espérance de la longueur d'un vecteur de loi $\mathcal{N}(0, I_d/d)$ est égale à 1. Ainsi, lorsque d tend vers $+\infty$, les colonnes de Φ sont presque unitaires.

Démonstration. D'après le lemme d'Hoeffding, on sait que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est L -lipschitz et si $g \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(f(g) \geq \mathbb{E}[f(g)] + t) \leq \exp(-\frac{t^2}{2L^2}).$$

À l'aide du théorème 18 et de ce qui précède, on trouve :

$$\mathbb{P} \left[\min_{z \in \Omega} \|\Phi z\| \geq \delta \right] \geq 1 - \exp \left(-\frac{1}{2} [\lambda_d - w(\Omega) - \delta\sqrt{d}] \right),$$

si $\lambda_d - w(\Omega) - \delta\sqrt{d} \geq 0$. C'est cette condition qu'on vérifie en supposant les hypothèses du corollaire. \square

Ce corollaire donne des bornes intéressantes pour le nombre de mesures minimum à réaliser, cependant, pour le mettre en pratique, il faut un moyen efficace de calculer l'épaisseur gaussienne d'un ensemble quelconque. Pour cela, on va étudier un peu plus profondément leurs propriétés.

5.3 Quelques propriétés des épaisseurs gaussiennes

Tout d'abord, le fait que la longueur et la direction d'un vecteur gaussien dont les coordonnées sont indépendantes entraîne que pour tout $S \subset \mathbb{R}^n$.

$$w(S) = \frac{\lambda_n}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \underbrace{\left(\max_{z \in S} \langle u, z \rangle - \min_{z \in S} \langle u, z \rangle \right)}_{b(S)} du,$$

où on a intégré relativement à la mesure de Haar sur \mathbb{S}^{n-1} et où $b(S)$ désigne l'épaisseur moyenne de S . Dans la proposition qui suit, on donne quelques propriétés des épaisseurs gaussiennes, pour la culture.

Proposition 5. Soient $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$.

- $\forall t > 0, w(tS) = tw(S)$,
- $S_1 \subset S_2 \implies w(S_1) \leq w(S_2)$,
- si S_1, S_2 et $S_1 \cup S_2$ sont convexes alors : $w(S_1 \cup S_2) + w(S_1 \cap S_2) = w(S_1) + w(S_2)$,
- $w(S) = w(\text{conv}(S))$,
- si S est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n alors : $w(S \cap \mathbb{S}^{n-1}) = \sqrt{\dim(S)}$,
- si S est un cône tel que $S = S_1 \oplus S_2$ où S_1 (resp. S_2) est un cône de dimension k (resp. $n - k$) alors :

$$w(S \cap \mathbb{S}^{n-1})^2 \leq w(S_1 \cap \mathbb{S}^{n-1})^2 + w(S_2 \cap \mathbb{S}^{n-1})^2$$

Un autre outil utile pour calculer les épaisseurs gaussiennes est l'inégalité de Dudley. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est compact et si $r > 0$, alors on note $\mathfrak{N}(S, r)$ le nombre minimal de boules de rayon r nécessaires pour recouvrir S .

Théorème 19. Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un compact et g un vecteur gaussien dont les composantes sont i.i.d et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

$$w(S) \leq 24 \int_0^\infty \sqrt{\log(\mathfrak{N}(S, r))} dr.$$

De plus, on a la borne inférieure suivante :

$$\forall r > 0, w(S) \geq ar \sqrt{\log(\mathfrak{N}(S, r))},$$

où $a > 0$ est une constante explicite.

On présente maintenant une façon de calculer les épaisseurs gaussiennes en bornant l'épaisseur gaussienne d'un cône par sa distance au cône polaire. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cône convexe non vide. Alors :

Proposition 6. Si $g \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, alors :

$$w(\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^{n-1}) \leq \mathbb{E}_g [\text{dist}(g, \mathcal{C}^*)],$$

où dist est la distance euclidienne d'un point à un ensemble.

Lemme 10. Si \mathcal{C} est fermé, alors :

$$w(\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^{n-1})^2 + w(\mathcal{C}^* \cap \mathbb{S}^{n-1})^2 \leq n.$$

La prochaine majoration de l'épaisseur du cône \mathcal{C} utilise le volume de $\mathcal{C}^* \cap \mathbb{S}^{n-1}$. On définit le volume d'un sous-ensemble de \mathbb{S}^{n-1} par la fraction de la sphère recouverte par cet ensemble (par rapport à la mesure de Haar de \mathbb{S}^{n-1}).

Théorème 20. Si \mathcal{C} est fermé et si le volume de $\mathcal{C}^* \cap \mathbb{S}^{n-1}$ est égale à $\Theta \in [0, 1]$, alors :

$$\forall n \geq 9, w(\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^{n-1}) \leq 3 \sqrt{\log\left(\frac{4}{\Theta}\right)}.$$

5.4 Application à la minimisation ℓ^1

On est maintenant capable d'estimer le nombre de mesures minimal à faire pour que la reconstruction ℓ^1 soit exacte ou robuste.

Proposition 7. *Soit $k \leq n$ un entier. Si c^* est k -parcimonieux, alors :*

$$w(\mathcal{T}(c^*) \cap \mathbb{S}^{n-1})^2 \leq 2k \log \left(\frac{n}{k} \right) + \frac{5}{4}k.$$

Ce résultat et le corollaire 4 montrent que $2k \log \left(\frac{n}{k} \right) + \frac{5}{4}k + 1$ mesures aléatoires gaussiennes suffisent pour la reconstruction ℓ^1 soit exacte avec une forte probabilité.

6 Pourquoi le Basis Pursuit ?

Dans cette section, nous traiterons la reconstruction dans un cadre relativement général et abstrait. Ici, le problème se pose de la façon suivante : on cherche à reconstruire une donnée $c^* \in \mathbb{R}^n$ (image médicale, variation de la structure géologique, etc) à partir d'un certain nombre d de mesures. Pour des raisons de vitesse de calcul, d'espace de stockage ou autre (par exemple, lorsqu'on passe un scanner, on souhaiterait recevoir le moins possible de rayons X), on cherche à faire peu de mesures par rapport à la dimension n de l'objet considéré, sans pour autant trop sacrifier la qualité de la reconstruction. La référence principale de cette section est l'article [12] de Donoho.

On va supposer que, a priori, le vecteur coefficient c^* est *presque-parcimonieux*. Cela signifie que l'information contenue dans c^* est, d'une certaine façon, redondante. Dans ce contexte, on dira que c^* est presque-parcimonieux si

$$\|c^*\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |c_i^*|^p \right)^{1/p} \leq R,$$

pour un certain $p \in]0, 1]$ et un certain $R > 0$. On notera $X_p(R)$ la classe des vecteurs coefficient qui vérifie cette relation. Lorsque p tend vers 0, les éléments de $X_p(R)$ ressemblent à des vecteurs parcimonieux, comme l'illustre la figure 8. On peut modéliser le processus d'acquisition de c^* par deux étapes :

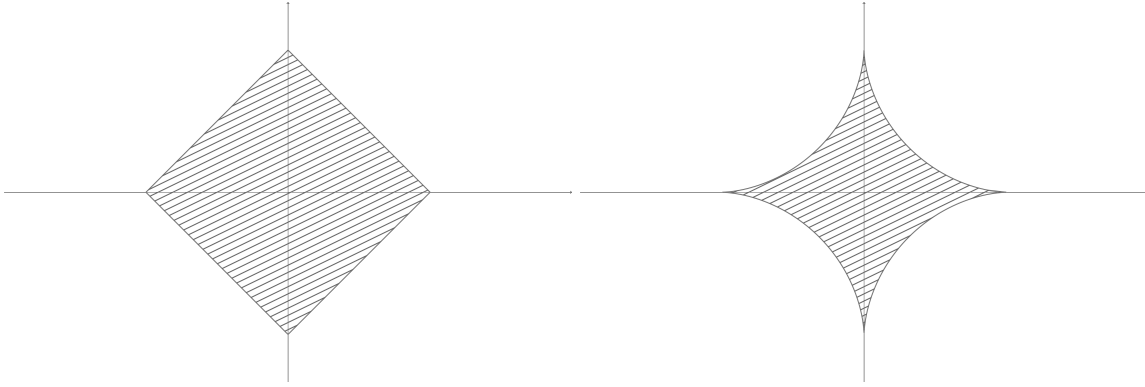


FIGURE 8 – À gauche : schéma de $X_1(1)$. À droite : schéma de $X_{0.6}(1)$. Les éléments de l'ensemble de droite sont plus proches de vecteurs parcimonieux (qui sont situés sur les deux axes) que ceux de gauche, cependant, à droite, l'ensemble n'est pas convexe.

- la prise d'information, on réalise des mesures sur c^* à l'aide d'une fonction d'information que l'on note $I_d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ (dans ce rapport, I_d est souvent égale à Φ une matrice de synthèse),
- l'analyse, on utilise un procédé de reconstruction à partir de l'information acquise, on le notera $A_d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ (par exemple, A_d peut associer à un signal s^* la ou les solutions d'un des problèmes d'optimisation présentés dans l'introduction).

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Pour mesurer la qualité de la reconstruction, on utilisera l'erreur d'approximation ℓ^2 minimax, c'est-à-dire :

$$E_d(X) = \inf_{A_d, I_d} \sup_{c \in X} \|c - A_d(I_d(c))\|_2,$$

où l'infimum est pris sur tous les opérateurs d'information déterministes (contrairement aux opérateurs d'information adaptatifs les mesures sont réalisées indépendamment les unes des autres) et toutes les méthodes de reconstruction possibles. Dans un premier temps, on veut évaluer $E_d(X_p(R))$. Pour qu'il n'y ait pas de surprises, on énonce tout de suite le théorème important que l'on veut montrer :

Théorème 21. Soient (d, n_d) une suite de dimensions de problèmes, avec $d < n_d$ et $n_d \underset{+\infty}{\sim} Ad^\gamma$, où $A > 0$ et $\gamma > 1$. Pour tout $p \in]0, 1]$, il existe une constante $C = C(p, A, \gamma)$ telle que, pour d assez grand :

$$E_d(X_p(R)) \leq C \cdot R \cdot \left(\frac{d}{\log(n_d)} \right)^{1/2-1/p}.$$

Une fois ce résultat démontré, on expliquera pourquoi le Basis Pursuit (BP) est presque optimal, ce qui justifiera son utilisation par la suite.

6.1 Liens avec la géométrie

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble. On peut envisager une approche géométrique du problème. Pour cela, on introduit la d -épaisseur de Gel'fand de X qui, d'une certaine façon, mesure l'erreur que fait la meilleure approximation de X par un sous-espace vectoriel de dimension d .

Définition 5. Soit $d \in \Omega$. La d -épaisseur de Gel'fand de X est :

$$\mathcal{G}^d(X) = \inf_{V_d} \sup \left\{ \|c\|_2 : c \in X \cap V_d^\perp \right\},$$

où l'infimum est pris dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension d et où V_d^\perp désigne le sous-espace orthogonal à V_d pour le produit scalaire hermitien.

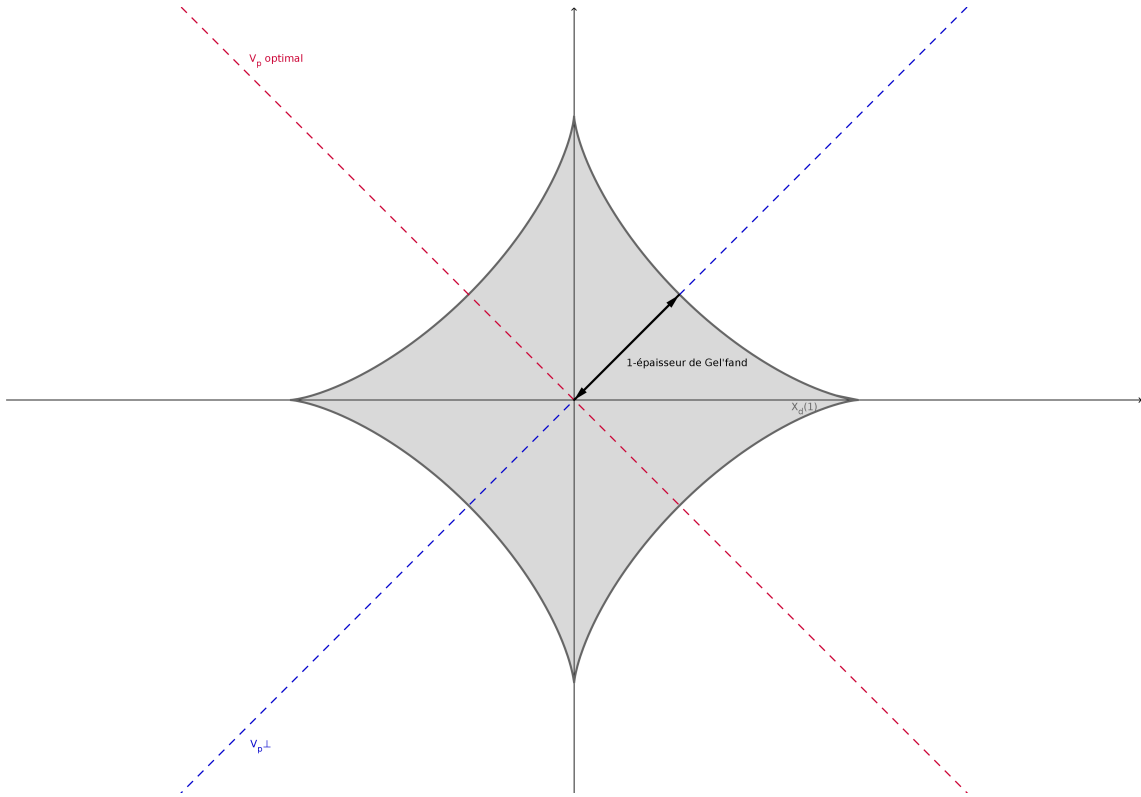


FIGURE 9 – En gris : schéma de $X_{0.7}(1)$. En rouge : un espace vectoriel de dimension 1 optimal et en bleu son orthogonal. La double-flèche noir représente la 1-épaisseur de Gel'fand de $X_{0.7}(1)$.

La raison pour laquelle on introduit cette notion est le théorème suivant qui montre que l'erreur de reconstruction de $X_p(R)$ avec d mesures est proche de la d -épaisseur de Gel'fand de $X_p(R)$.

Théorème 22. Pour $0 < p \leq 1$,

$$\mathcal{G}^d(X_p(R)) \leq E_d(X_p(R)) \leq 2^{1/p-1} \mathcal{G}^d(X_p(R)).$$

Avant de montrer ce théorème, on introduit une certaine classe de fonction d'information.

6.2 Fonction d'information

On choisit les fonctions d'informations qui sont linéaires : $I_d = \Phi \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$. Cela revient à considérer, comme dans l'introduction, la matrice de synthèse d'un dictionnaire. On va supposer de plus que Φ

vérifie trois conditions supplémentaires (conditions de type acquisition comprimée) que l'on va décrire maintenant.

Si $\Lambda \subset \Omega$, on note pour $s \in \mathbb{R}^d$:

$$Q_{\Lambda^c}(s) = \min \left\{ \|c\|_{\ell^1(\Lambda^c)} : \forall c \in \mathbb{R}^n, \Phi_{\Lambda^c} c = s \right\}.$$

Soient $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \rho > 0$ des constantes. Les trois conditions sont :

CS1 les valeurs singulières de Φ_{Λ} sont de module supérieur à η_1 , uniformément pour $|\Lambda| < \rho d / \log(n)$,

CS2 $\forall s \in \text{Im}(\Phi_{\Lambda}), \|s\|_1 \geq \eta_2 \cdot \sqrt{d} \cdot \|s\|_2$, uniformément pour $|\Lambda| < \rho d / \log(n)$,

CS3 $\forall s \in \text{Im}(\Phi_{\Lambda}), Q_{\Lambda^c}(s) \geq \eta_3 / \sqrt{\log(n/d)} \cdot \|s\|_1$, uniformément pour $|\Lambda| < \rho d / \log(n)$.

Le théorème suivant montre qu'imposer ces conditions n'est pas excessivement restrictif puisque beaucoup de matrices les vérifient.

Théorème 23. *Soient (d, n_d) une suite de dimensions de problèmes, avec $d < n_d$ et $n_d \underset{+\infty}{\sim} Ad^\gamma$, où $A > 0$ et $\gamma \geq 1$. Il existe $\eta_i > 0$ et $\rho > 0$ ne dépendant que de A et γ tels que pour tout $\delta > 0$, la proportion de matrices de taille $d \times n_d$ vérifiant les conditions CS1-CS3 avec les paramètres (η_i) et ρ est supérieure à $1 - \delta$ pour d assez grand.*

Nous ne montrerons pas ce résultat dont la démonstration est un peu technique (et surtout longue!). Dans ce théorème, la proportion de matrice de taille $d \times n$ vérifiant une propriété est définie par la mesure de Haar relativement à

$$\overset{\leftarrow n \text{ fois}}{\mathbb{S}^{d-1} \times \dots \times \mathbb{S}^{d-1}}$$

de l'ensemble des matrices vérifiant cette propriété. On veut montrer que cette classe de fonctions d'information est presque *optimale*. Pour cela, on introduit l'épaisseur d'une ensemble X relativement à un opérateur linéaire $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$w(\Psi, X) = \sup \{ \|c\|_2 \text{ tel que } c \in X \cap \text{Ker}(\Psi) \}.$$

On remarque que cette notion est liée à la d -épaisseur de Gel'fand par la relation suivante :

$$\mathcal{G}^d(X) = \inf \{ w(\Psi, X) : \Psi \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R}) \}. \quad (41)$$

Ainsi, minimiser la d -épaisseur de Gel'fand d'un ensemble X revient à trouver un opérateur Ψ qui minimise l'épaisseur de X relativement à Ψ . Le théorème suivant dit que les opérateurs vérifiant les conditions CS1-CS3 sont presque optimaux.

Théorème 24. *Soient (d, n_d) une suite de dimensions de problèmes, avec $d < n_d$ et $n_d \underset{+\infty}{\sim} Ad^\gamma$, où $A > 0$ et $\gamma \geq 1$. Soit Φ_{d, n_d} une suite de matrices vérifiant CS1-CS3 avec comme paramètres (η_i) et ρ ne dépendant pas de d . Alors, pour tout $p \in]0, 1]$, il existe une constante $C = C(p, (\eta_i), \rho, A, \gamma)$ telle que, pour d assez grand :*

$$w(\Phi_{d, n_d}, X_p(R)) \leq C \cdot R \cdot \left(\frac{d}{\log(n_d)} \right)^{1/2-1/p}.$$

On en déduit immédiatement le

Corollaire 5. *Avec les hypothèses du théorème 24, on a :*

$$\mathcal{G}^d(X_p(R)) \leq C \cdot R \cdot \left(\frac{d}{\log(n_d)} \right)^{1/2-1/p}.$$

Le théorème 21 est une conséquence directe du théorème 22 et de ce corollaire. Il ne reste plus qu'à trouver un algorithme optimal de reconstruction. C'est le thème de la prochaine sous-section.

6.3 Optimalité du BP

Dans toute cette sous-section, on considère que l'on dispose d'une fonction d'information I_d . Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Pour évaluer la qualité de l'information I_d sur X , on introduit :

$$E_d(I_d, X) = \inf_{A_d} \sup_{c \in X} \|c - A_d(I_d(c))\|_2,$$

et si A_d est un algorithme de reconstruction, pour évaluer les performances de la paire (A_d, I_d) sur X , on introduit :

$$E_d(A_d, I_d, X) = \sup_{c \in X} \|c - A_d(I_d(c))\|_2.$$

6.3.1 Algorithme de minimisation ℓ^p et cas $p = 1$

On va définir un algorithme de reconstruction presque optimal. Notons $s^* = I_d(c^*)$ le signal acquis à l'aide de la fonction d'information I_d . L'algorithme de minimisation ℓ^p consiste à résoudre la problème d'optimisation suivant :

$$\min_{c \in X_p(R)} \|c\|_p \text{ tel que } I_d(c) = s^*. \quad (L_p)$$

Si on note \hat{c}^* sa solution, alors on a :

Lemme 11. *Pour tout $0 < p \leq 1$,*

$$\sup_{c \in X_p(R)} \|c - \hat{c}^*\|_2 \leq 2 \cdot E_d(I_d, X_p(R)).$$

Ainsi, cette méthode est presque optimale pour tout $0 < p \leq 1$. Cependant, sauf pour le cas $p = 1$, la solution du problème (L_p) est difficile à calculer effectivement car la fonction $\|\cdot\|_p$ n'est pas convexe, tandis que le problème (L_1) est équivalent à un problème d'optimisation linéaire avec contraintes que l'on sait traiter relativement bien. C'est une des raisons pour lesquelles on s'y intéresse. Le lemme 11 montre que cette procédure est presque optimale pour $X_{1,m}(R)$.

Corollaire 6. *Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que :*

$$E_d(I_d, X_1(1)) \leq C \cdot E_d(X_1(1)),$$

alors, si $BP(s^)$ désigne la solution du problème (L_1) , on a :*

$$E_d(I_d, BP, X_1(R)) \leq 2C \cdot E_d(X_1(R)), \quad R > 0.$$

Cependant, on aimerait étendre ce résultat pour $p < 1$, car cela correspond à des vecteurs qui sont proches de vecteurs parcimonieux.

6.3.2 Optimalité du BP pour le cas $0 < p < 1$

Théorème 25. *Soient (d, n_d) une suite de dimensions de problèmes, avec $d < n_d$ et $n_d \underset{+\infty}{\sim} Ad^\gamma$, où $A > 0$ et $\gamma \geq 1$. Soit $I_d = \Phi \in \mathcal{M}_{d, n_d}(\mathbb{R})$ une fonction d'information et qui vérifie les conditions CS1-CS3 pour (η_i) et ρ . Il existe une constante $C = C(p, (\eta_i), \rho, A, \gamma)$ telle que la solution \hat{c}^* du problème (L_1) vérifie*

$$\|c^* - \hat{c}^*\|_2 \leq C \cdot \|c^*\|_p \cdot \left(\frac{d}{\log(n_d)} \right)^{1/2-1/p}.$$

Ce théorème justifie la relaxation $\ell^0 - \ell^1$.

7 Conclusion générale

7.1 Comparaisons numériques des différentes approches

La figure 10 est une comparaison numérique entre quelques critères rencontrés dans ce rapport. Pour la construire, on a tiré aléatoirement une matrice Φ de taille $d \times n$ (ici 100×200) de la façon suivante. Les coefficients de Φ sont i.i.d. selon une loi gaussienne centrée réduite puis les colonnes de Φ sont normalisées. L'ordonnée de la courbe représente la fraction des vecteurs coefficient d'une parcimonie donnée qui vérifient un critère. Pour calculer cette fraction, on teste les critères sur un certain nombre (ici 200) de vecteurs coefficient tirés aléatoirement selon le modèle générique k -parcimonieux (où k est l'abscisse). On a vu que la plupart des critères ne dépendaient que du support signé ainsi notre étude n'est clairement pas exhaustive. Cependant, si on veut tester les critères sur un vecteur coefficient de chaque classe de supports il faut faire 3^n tests (ici $3^{200} \approx 2,656139889 \cdot 10^{95}$), ce qui n'est pas possible en pratique.

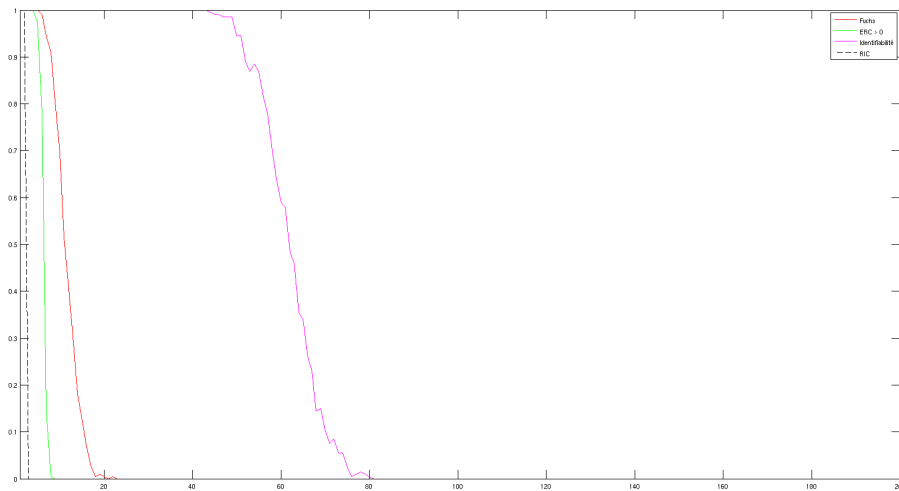


FIGURE 10 – Comparaison numérique entre le critère de Fuchs (en rouge), le RIP (en pointillé) et le critère $\text{ERC} > 0$ (en vert). La courbe d'identifiabilité est en magenta.

On remarque que le critère RIP est très restrictif et que le critère de Fuchs est celui qui s'approche le plus de la réalité (la courbe magenta). Si on compare la courbe magenta aux transitions de phases obtenues dans la section 2 (voir le tableau 2.5.2), on remarque que c'est l'approche par les polytopes qui donne les meilleurs résultats (même si cette approche n'est pas valable dans le cas bruité).

7.2 Impressions générales

Abou Bakr al-Baghdadi, calife de l'autoproclamé État Islamique (Daesh), a rendu le début de mon stage difficile. En effet, certains problèmes administratifs ont fait que ma convention de stage n'a pu être signée avant le 10 mai (plus d'un après le début du stage) et puisque la France était à ce moment là en état d'urgence (conséquence des malheureux attentats du 13 novembre 2015 perpétrés par Daesh), l'Université de Bordeaux et l'Institut de Mathématiques de Bordeaux étaient dans l'impossibilité de m'octroyer un bureau. Ainsi, pendant plus d'un mois, j'ai dû travailler dans la bibliothèque de l'IMB (ouverte au public) physiquement éloignée de l'équipe Image, Optimisation et Probabilités avec laquelle je travaillais. Cela a ralenti mon intégration à l'institut. Un fois la convention signée, j'ai enfin pu avoir accès à un bureau que je partageais avec une doctorante et le deuxième stagiaire (en M2) de Charles Dossal, ce qui a grandement augmenté mon implication dans ce stage.

Le stage s'est globalement déroulé de la façon suivante : Charles me donnait un ou plusieurs articles, je devais ensuite les lire pour en comprendre les intérêts et les limites, je devais ensuite faire des liens avec les articles précédemment lus. Le but était de me montrer un panorama relativement complet de la

littérature sur l'étude du problème inverse. Cependant, j'étais libre d'approfondir ou non une approche ou un article en particulier. Régulièrement, je devais faire un compte rendu d'un article plus ardu que les autres devant Charles. Mon travail a donc principalement un travail de synthèse mais aussi un travail de critique, les deux étant primordiaux dans le processus de recherche. J'ai aussi assisté à plusieurs conférences dont les sujets étaient plus ou moins proche de celui de mon stage. Ce stage m'a donc donné un large aperçu du métier de chercheur.

7.3 Remerciements

Je remercie l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et toute l'équipe Image, Optimisation et Probabilités qui m'ont accueilli durant ce stage. Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de stage, Charles Dossal, qui m'a guidé durant ces quatre mois très enrichissants mais surtout, qui m'a fait découvrir ce qu'est réellement le travail d'enseignant-chercheur. Je remercie également mes deux co-bureaux, Vassilis pour tous les échanges qu'on a pu avoir ensemble et Elsa pour ses conseils et sa bonne humeur. Plus généralement, je remercie tous les doctorants de l'IMB pour leur accueil chaleureux et leur grande gentillesse. Je remercie aussi mes parents pour leurs relectures assidues et pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté. Je remercie en particulier Clochette pour ses subtils traits d'humour. Enfin, je remercie Maeva de m'avoir, notamment, hébergé et nourris durant ces quatre mois à Bordeaux.

A Preuves de la section 2

A.1 Preuves de la section 2.2

Démonstration du lemme 1. On note v_1, \dots, v_N les sommets de P , et comme F est un k -simplexe, F a $k+1$ sommets. Sans perte de généralité, on suppose que v_1, \dots, v_{k+1} sont les sommets de F . Comme les sommets de F sont affinement indépendants et $c \in F$, il existe une unique représentation de c en tant que combinaison convexe des $(v_i)_{i=1, \dots, k+1}$. F étant une face de P , il existe une forme linéaire λ_F et $r \in \mathbb{R}$ qui séparent F et $P \setminus F$. Soit $c = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i v_i$ une représentation de c en tant que combinaison convexe des sommets de P qui place des poids non nuls sur des sommets qui ne sont pas dans F . On a :

$$\begin{aligned} \lambda_F(c) &= \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \lambda_F(v_i) + \sum_{i=k+2}^N \beta_i \lambda_F(v_i) \\ &< \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i c + \sum_{i=k+2}^N \beta_i c = c, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Ce qui montre le sens direct.

L'hypothèse (i) implique que F ne rencontre pas l'intérieur de P . En effet, si c'était le cas, soit $c \in F \cap \overset{\circ}{P}$. c est le barycentre de l'origine et d'un élément de la frontière de P . Or il existe plusieurs représentations de l'origine (par exemple $v_1/2 + (-v_1)/2$ ou $v_2/2 + (-v_2)/2$), donc la représentation de c n'est pas unique. Ainsi, F est inclus dans une k -face G de P . Si l'hypothèse (i) est vraie, alors nécessairement, G est un k -simplexe (sinon les sommets de G ne seraient pas indépendants). Si l'hypothèse (ii) est vraie, alors nécessairement, les sommets de G sont dans F , d'où $F = G$. \square

Démonstration du lemme 2. Si on note $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n}$ les colonnes de Φ , alors nécessairement l'ensemble des sommets de $\Phi(C^n)$ est $(\pm \varphi_i)_{i=1, \dots, n}$. Une $k-1$ -face F de C^n est déterminée par k indices i_ℓ , $1 \leq \ell \leq k$ et k signes $\sigma_\ell \in \{-1, +1\}$, $1 \leq \ell \leq k$. On a

$$F = \text{conv}(\sigma_1 e_{i_1}, \dots, \sigma_k e_{i_k}) \implies \Phi(F) = \text{conv}(\sigma_1 a_{i_1}, \dots, \sigma_k a_{i_k}),$$

Puisque que P est k -neighborly, $\Phi(F)$ est une face de P .

Réciproquement, (8) pour $\ell = 0$ implique que P a $2n$ sommets et pour $\ell = k-1$, (8) est équivalent à la définition de k -neighborly. \square

Démonstration du théorème 1. Supposons que P est k -neighborly et que c^* a k composantes non nulles. On peut supposer sans pertes de généralités que $\|c^*\|_1 = 1$. Puisque c^* a k composantes non nulles, c^* appartient à une k -face F de C^n . Ainsi, $s^* \in \Phi(F)$ qui est une k -face de P d'après le lemme 2. Le lemme 1 montre qu'il existe une unique représentation convexe de s^* par les sommets de $\Phi(C^n)$, or c^* en est déjà une donc, il existe une unique représentation c de s^* par Φ telle que

$$\|c\|_1 \leq 1.$$

Réciproquement, supposons que pour tout $c^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|c^*\|_0 \leq k$ du problème (L_1) engendré par $s^* = \Phi c^*$ a pour unique solution c^* , alors le cas où $c^* = \pm e_i$ et le lemme (1) impliquent que P a $2m$ sommets. Maintenant, soient k indices i_ℓ , $1 \leq \ell \leq k$ et k signes $\sigma_\ell \in \{-1, +1\}$, $1 \leq \ell \leq k$ qui représentent une k -face F de C^n . Notons $c^* = \sum_{\ell} \alpha_\ell \sigma_\ell e_{i_\ell} \in F$ où $\alpha_\ell \geq 0$ et $\sum_{\ell} \alpha_\ell = 1$. D'après le lemme 1 et l'hypothèse, $\Phi(F)$ est une k -face P . Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2 pour conclure. \square

A.2 Preuves de la section 2.3

Tout est basé sur le lemme suivant :

Lemme 12. $\Lambda \subset \Omega$ est un support d'équivalence locale si et seulement si la section intrinsèque de dimension $|\Lambda|$ de $P = \Phi(C^n)$ correspondante est un polytope croisé.

Démonstration du lemme 12. Supposons que Λ est un support d'équivalence locale. Ainsi, chaque élément représenté par une combinaison linéaire de $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ a en fait une unique représentation en tant que combinaison convexe de cette famille. Notons Q_Λ l'ensemble des s qui sont combinaison convexe de

$(\pm\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. C'est l'image affine d'un polytope croisé de dimension $|\Lambda|$. Par unicité des représentations, Q_Λ est aussi un polytope croisé. Montrons que $P_\Lambda = Q_\Lambda$. D'abord, $Q_\Lambda \subset P_\Lambda$ car $Q_\Lambda \subset V_\Lambda \cap P = P_\Lambda$. Ensuite, $P_\Lambda \subset Q_\Lambda$ car $\mathcal{F}_0(P_\Lambda) \subset Q_\Lambda$ donc $P_\Lambda = \text{conv}(\mathcal{F}_0(P_\Lambda)) \subset \text{conv}(Q_\Lambda) = Q_\Lambda$.

Pour la réciproque, on utilise les mêmes outils que pour la démonstration du théorème 1. \square

Démonstration du théorème 3. Soit K un ensemble de $|K|$ sommets de P (sans paire antipodale). Le sous-espace V_K peut être décrit uniquement à l'aide d'un support Λ puisque V_K ne dépend pas des signes choisis pour les sommets de K . Il y a ainsi une bijection entre les sections intrinsèques de dimension k et les support de taille k . Le lemme 12, conclut la preuve du théorème. \square

B Preuves de la section 6

B.1 Preuve du lemme 11

Pour montrer ce lemme, on va utiliser un algorithme abstrait qui a la vertu d'être optimal mais qui, malheureusement, est difficile à implémenter. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. Le *centre* de S est l'ensemble

$$\text{center}(S) = \operatorname{argmin}_{c \in S} \sup_{x \in S} \|x - c\|_2.$$

Le centre de S est bien défini car la fonction $c \mapsto \sup_{x \in S} \|x - c\|_2$ est convexe. Étant donné une fonction d'information I_d , on définit l'algorithme de *centralisation* par

$$\hat{c}_d \in \text{center} \left(I_d^{-1}(s^*) \cap X_p(R) \right).$$

Démonstration du lemme 11. Soit $\hat{X}(s^*) = I_d^{-1}(s^*) \cap X_p(R)$. On montre d'abord que l'algorithme de centralisation est optimal. On définit le *rayon* d'un ensemble à partir de son centre;

$$\begin{aligned} \text{radius}(\hat{X}(s^*)) &= \inf_{c \in \hat{X}(s^*)} \sup\{\|x - c\|_2 : x \in \hat{X}(s^*)\} \\ &= \sup\{\|x - \hat{c}_d\|_2 : x \in \hat{X}(s^*)\}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\sup\{\text{radius}(\hat{X}(s^*)) : s^* \in I_d(X_p(R))\} = E_d(I_d, X_p(R)).$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité triangulaire à $\|\hat{c}^* - c\|_2$ pour $c \in \hat{X}(s^*)$.

$$\begin{aligned} \|\hat{c}^* - c\|_2 &\leq \|c - \hat{c}_d\|_2 + \|\hat{c}_d - \hat{c}^*\|_2 \\ &\leq 2 \cdot \text{radius}(\hat{X}(s^*)) \\ &\leq E_d(I_d, X_p(R)). \end{aligned}$$

□

B.2 Preuve du théorème 22

On va utiliser la p -inégalité triangulaire.

Lemme 13. Pour $0 < p \leq 1$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p.$$

Démonstration du lemme 13. Cela revient à montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y|^p \leq |x|^p + |y|^p$. On évacue tout de suite les cas où x ou y est nul où la validité du résultat est immédiate. La fonction $f_p : x \mapsto |x|^p$ est concave sur \mathbb{R}^+ donc pour $x, y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_p(x) &\geq \frac{y}{x+y} f_p(0) + \frac{x}{x+y} f_p(x+y), \\ f_p(y) &\geq \frac{x}{x+y} f_p(0) + \frac{y}{x+y} f_p(x+y). \end{aligned}$$

Comme $f_p(0) = 0$, si on additionne ces deux inégalités, on a le résultat recherché pour x et y positifs. De même si x et y sont tout deux négatifs. Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors :

$$f_p(x+y) \leq \max(f_p(x), f_p(y)) \leq f_p(x) + f_p(y),$$

ainsi la fonction f_p est sous-additive, ce qui termine la preuve. □

Démonstration du théorème 22. Soit $I_d = \Phi \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On a vu dans la preuve du lemme 11 que

$$\sup\{\text{radius}(\hat{X}(s^*)) : s^* \in I_d(X_p(R))\} = E_d(I_d, X_p(R)).$$

or

$$\mathcal{G}^d(X_p(R)) = \text{radius}(\hat{X}(0))$$

d'où $E_d(X_p(R)) \geq \mathcal{G}^d(X_p(R))$ (en prenant l'infimum sur les I_d). On admet (POURQUOI BORDEL DE MERDE ?) qu'il existe c_1 et c_{-1} tels que :

$$\begin{aligned} I_d(c_1) &= I_d(c_{-1}) = s^*, \\ E_d(I_d, X_p(R)) &= \|c_1 - c_{-1}\|_2 = \|c_{-1} - c_1\|_2, \end{aligned}$$

où $c = \text{center}(\hat{X}(s^*))$. Soit $\delta = (c_1 - c_{-1})/2^{1/p}$. En utilisant le lemme 13

$$\|c_1 - c_{-1}\|_p^p \leq \|c_1\|_p^p + \|c_{-1}\|_p^p,$$

d'où

$$\|\delta\|_p \leq R.$$

Donc $\delta \in X_p(R)$. Et comme $I_d(\delta) = 0$, δ est aussi dans $\text{Ker}(I_d)$. D'après la définition de l'épaisseur, on a : $\|\delta\|_2 \leq w(I_d, X_p(R))$, d'où :

$$E_d(I_d, X_p(R)) = \|c_1 - c_{-1}\|_2/2 = 2^{1/p-1}\|\delta\|_2 \leq 2^{1/p-1}w(I_d, X_p(R)).$$

Il suffit d'appliquer l'infimum sur l'ensemble des fonctions d'informations (linéaires) et d'utiliser la remarque 41 pour conclure. \square

B.3 Preuve du théorème 24

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 14. Soient $c = (c_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathbb{R}^\Omega = \mathbb{R}^n$, $0 < p \leq 1$ et $0 \leq N \leq n$ un entier. Notons $\Lambda \subset \Omega$ les indices correspondant aux N plus grandes composantes de c en module (il n'y a pas unicité). Alors :

$$\begin{aligned} \|c_{\Lambda^c}\|_2 &\leq \|c\|_p \cdot (N+1)^{1/2-1/p}, \\ \|c_{\Lambda^c}\|_1 &\leq \|c\|_p \cdot (N+1)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 14. Soit $\nu \in \Lambda^c$ l'indice correspondant à la plus grande composante en module de c_{Λ^c} (plusieurs choix sont possibles). On a :

$$\begin{aligned} \|c_{\Lambda^c}\|_2 &= \sum_{\omega \in \Lambda^c} |c_\omega|^2 \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{\omega \in \Lambda^c} |c_\omega|^p \right)}_{\leq \|c\|_p^p} \cdot \underbrace{|c_\nu|^{2-p} (N+1)^{2/p-1}}_{=[(N+1)|c_\nu|^p]^{2/p-1}} \cdot (N+1)^{1-2/p} \\ &\leq \|c\|_p^p \cdot \left(\sum_{\omega \in \Lambda \cup \{\nu\}} |c_\omega|^p \right)^{2/p-1} \cdot (N+1)^{1-2/p} \\ &\leq \|c\|_p^{p+2-p} \cdot (N+1)^{1-2/p} \\ &\leq \|c\|_p^2 \cdot (N+1)^{1-2/p}. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer la deuxième inégalité du lemme. \square

Démonstration du théorème 24. Pour simplifier les notations, on notera Φ à la place de Φ_{d,n_d} . Traitons d'abord le cas $R = 1$. On veut borner la valeur minimale du problème

$$\sup_{c \in \mathbb{R}^n} \|c\|_2 \text{ tel que } \Phi c = 0, \|c\|_p \leq 1.$$

Soit $c \in \text{Ker } \Phi$. Notons Λ les indices des $k = \lfloor \rho d / \log(n_d) \rfloor$ plus grandes composantes en module. Notons $c_\Lambda = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $c_{\Lambda^c} = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda^c}$. On remarque tout de suite que $\|c_{\Lambda^c}\|_p \leq \|c\|_p \leq 1$. De plus, le lemme donne :

$$\begin{aligned} \|c_{\Lambda^c}\|_2 &\leq (k+1)^{1/2-1/p}, \\ \|c_{\Lambda^c}\|_1 &\leq (k+1)^{1-1/p} \leq (d/\log(n_d))^{1-1/p}. \end{aligned}$$

On a aussi : $0 = \underbrace{\Phi_\Lambda c_\Lambda}_v + \underbrace{\Phi_{\Lambda^c} c_{\Lambda^c}}_{-v}$. Comme $v \in V_\Lambda$ et $|\Lambda| < d\rho/\log(n_d)$, on peut invoquer les conditions CS2 et CS3 :

$$\begin{aligned} \|c_{\Lambda^c}\|_1 &\geq Q_{\Lambda^c}(-v) \geq \eta_3/\sqrt{\log(n_d/d)} \cdot \|v\|_1, \\ \|v\|_1 &\geq \eta_2 \cdot \sqrt{d} \cdot \|v\|_2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|v\|_2 \leq (\eta_2\eta_3)^{-1} \cdot (\sqrt{\log(n_d/d)}/\sqrt{d}) \cdot \|c_{\Lambda^c}\|_1 \leq c_1 \cdot (d/\log(n_d))^{1/2-1/p}, \quad (42)$$

avec $c_1 = \rho^{1-1/p}/\eta_2\eta_3$. La condition CS1 donne :

$$\|c_\Lambda\|_2 \leq \|\Phi_\Lambda c_\Lambda\|_2/\eta_1 \leq \|v\|_2/\eta_1, \quad (43)$$

et en notant $c_2 = c_1/\eta_1$, on a :

$$\begin{aligned} \|c\|_2 &\leq \|c_\Lambda\|_2 + \|c_{\Lambda^c}\|_2 \\ &\leq c_2 \cdot (n/\log(n_d))^{1/2-1/p} + (\rho d/\log(n_d))^{1/2-1/p}, \end{aligned}$$

d'où le théorème avec $C = \left(\frac{1}{\eta_1\eta_2\eta_3} + 1\right) \rho^{1/2-1/p}$. □

Les constantes ne sont pas garanties 100% optimales!

B.4 Preuve du théorème 25

Soient $\Phi \in \mathcal{M}_{d,n_d}(\mathbb{R})$ une matrice et $\Lambda \subset \Omega$. On introduit la *concentration* de Φ sur Λ par

$$\nu(\Phi, \Lambda) = \sup \left\{ \frac{\|\beta_\Lambda^*\|_1}{\|\beta\|_1} : \beta \in \text{Ker}(\Phi) \right\},$$

qui mesure la concentration maximale du noyau de Φ sur les composantes indexées par Λ . Pour démontrer le théorème 25, on va utiliser deux lemmes.

Lemme 15. *Soit $c^* \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $\nu(\Phi, \Lambda) \leq \nu_0 < 1/2$. Si on note \hat{c}^* la solution du problème (L_1) définie par $s^* = \Phi c^*$ alors, pour $\epsilon > 0$:*

$$\|c_{\Lambda^c}^*\| \leq \epsilon \implies \|c^* - \hat{c}^*\|_1 \leq \frac{2\epsilon}{1-2\nu_0}.$$

Démonstration du lemme 15. Notons $c^* - \hat{c}^* = \beta \in \text{Ker}(\Phi)$. Par définition de la concentration,

$$\|\beta\|_1 \leq \frac{\|\beta_{\Lambda^c}\|_1}{1-\nu_0}.$$

De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que \hat{c}^* est solution de (L_1) , on a :

$$\begin{aligned} \|\beta_{\Lambda^c}\|_1 &\leq \|c_{\Lambda^c}^*\|_1 + \|\hat{c}_{\Lambda^c}^*\|_1, \\ \|\hat{c}_\Lambda^*\|_1 + \|\hat{c}_{\Lambda^c}^*\|_1 &\leq \|c^*\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \|\beta_{\Lambda^c}\|_1 &\leq \|c^*\|_1 + \|c_{\Lambda^c}^*\|_1 - \|\hat{c}_\Lambda^*\|_1 \\ &\leq 2 \underbrace{\|c_{\Lambda^c}^*\|_1}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\|c_\Lambda^*\|_1 - \|\hat{c}_\Lambda^*\|_1}_{\leq \|\beta_\Lambda^*\|_1 \leq \nu_0 \|\beta\|_1}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\|\beta\|_1 \leq (2\epsilon + \nu_0\|\beta\|_1)/(1-\nu_0)$ ce qui équivaut au résultat attendu. □

Lemme 16. *Supposons que $\Phi \in \mathcal{M}_{d,n_d}(\mathbb{R})$ vérifie les conditions CS1-CS3 avec les constantes (η_i) et ρ . Il existe une constante η_0 qui ne dépend que des (η_i) et telle que pour tout $\Lambda \subset \llbracket 1, n_d \rrbracket$ et $\rho_1 \leq \rho$:*

$$|\Lambda| \leq \rho_1 d / \log(n_d) \implies \nu(\Phi, \Lambda) \leq \eta_0 \cdot \sqrt{\rho_1}.$$

Démonstration du lemme 16. Soit $\beta \in \text{Ker}(\Phi)$. On a : $0 = \Phi_\Lambda \beta_\Lambda^* + \Phi_{\Lambda^c} \beta_{\Lambda^c}$ et on note $v = \Phi_\Lambda \beta_\Lambda^*$. On reprend la preuve du théorème 24 et on combine les inégalités (42) et (43) avec $\|\beta_\Lambda^*\|_1 \leq \sqrt{|\Lambda|} \cdot \|\beta_\Lambda^*\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) pour trouver

$$\|\beta_\Lambda^*\|_1 \leq \sqrt{|\Lambda|} \cdot \eta_0 \cdot \sqrt{\log(n_d)/d} \cdot \|\beta\|_1,$$

avec $\eta_0 = \eta_2 \eta_3 / \eta_1$. D'où le lemme. □

Démonstration du théorème 25. On note $\beta = c^* - \hat{c}^* \in \text{Ker}(\Phi)$. Soit η_0 comme dans le lemme 16 de sorte que $\nu(\Phi, \Lambda) \leq 1/4$. Posons $\rho_0 = \min(\rho, (4\eta_0)^{-2})$. Soit $\Lambda \subset \llbracket 1, n_d \rrbracket$ l'ensemble qui indexe les $\lfloor \rho_0 d / \log(d_n) \rfloor$ plus grandes composantes de c^* . Les lemmes 15 et 14 donnent

$$\|\beta\|_1 \leq c_1 \cdot R \cdot (|\Lambda| + 1)^{1-1/p}, \quad (44)$$

où $c_1 = \frac{2}{1-2\eta_0\rho_0}$. De plus, on peut appliquer le théorème 24 à β :

$$\|\beta\|_2 \leq c_2 \cdot \|\beta\|_1 \cdot (d/\log(n_d))^{-1/2}, \quad (45)$$

où $c_2 = \left(\frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3} + 1\right) \rho^{1/2-1/p}$. en combinant les inégalités (44) et (45), on obtient

$$\|\beta\|_2 \leq C \cdot R \cdot (d/\log(n_d))^{1/2-1/p},$$

avec $C = c_1 c_2$. □

Références

- [1] Fernando Affentranger and Rolf Schneider. Random projections of regular simplices. *Discrete & Computational Geometry*, 7(3) :219–226, 1992.
- [2] Károly Böröczky Jr and Martin Henk. Random projections of regular polytopes. *Archiv der Mathematik*, 73(6) :465–473, 1999.
- [3] Włodzimierz Bryc. A uniform approximation to the right normal tail integral. *Applied mathematics and computation*, 127(2) :365–374, 2002.
- [4] Emmanuel J Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(9) :589–592, 2008.
- [5] Emmanuel J Candès and Carlos Fernandez-Granda. Super-resolution from noisy data. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 19(6) :1229–1254, 2013.
- [6] Emmanuel J Candès and Carlos Fernandez-Granda. Towards a mathematical theory of super-resolution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 67(6) :906–956, 2014.
- [7] Emmanuel J Candès, Yaniv Plan, et al. Near-ideal model selection by ℓ_1 minimization. *The Annals of Statistics*, 37(5A) :2145–2177, 2009.
- [8] Emmanuel J Candès and Justin Romberg. ℓ_1 -magic : Recovery of sparse signals via convex programming. URL : www.acm.caltech.edu/l1magic/downloads/l1magic.pdf, 4 :14, 2005.
- [9] Emmanuel J Candès and Terence Tao. Near-optimal signal recovery from random projections : Universal encoding strategies? *IEEE transactions on information theory*, 52(12) :5406–5425, 2006.
- [10] Venkat Chandrasekaran, Benjamin Recht, Pablo A Parrilo, and Alan S Willsky. The convex geometry of linear inverse problems. *Foundations of Computational mathematics*, 12(6) :805–849, 2012.
- [11] David L Donoho. Neighborly polytopes and sparse solutions of underdetermined linear equations. 2005.
- [12] David L Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on information theory*, 52(4) :1289–1306, 2006.
- [13] David L Donoho. High-dimensional centrally symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension. *Discrete & Computational Geometry*, 35(4) :617–652, 2006.
- [14] David L Donoho and Jared Tanner. Neighborliness of randomly projected simplices in high dimensions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102(27) :9452–9457, 2005.
- [15] Charles Dossal, Marie-Line Chabanol, Gabriel Peyré, and Jalal Fadili. Sharp support recovery from noisy random measurements by ℓ_1 -minimization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 33(1) :24–43, 2012.
- [16] Charles Dossal, Gabriel Peyré, and Jalal Fadili. A numerical exploration of compressed sampling recovery. *Linear Algebra and its Applications*, 432(7) :1663–1679, 2010.
- [17] Charles Dossal and Remi Tesson. Consistency of ℓ_1 recovery from noisy deterministic measurements. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 36(3) :508–513, 2014.
- [18] Vincent Duval and Gabriel Peyré. Exact support recovery for sparse spikes deconvolution. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(5) :1315–1355, 2015.
- [19] Jean-Jacques Fuchs. On sparse representations in arbitrary redundant bases. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 50(6) :1341–1344, 2004.
- [20] Jean Jacques Fuchs. Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(10) :3601–3608, 2005.
- [21] Yehoram Gordon. On milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in n . In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, pages 84–106. Springer, 1988.
- [22] Markus Grasmair, Otmar Scherzer, and Markus Haltmeier. Necessary and sufficient conditions for linear convergence of ℓ_1 -regularization. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 64(2) :161–182, 2011.
- [23] Branko Grünbaum. Grassmann angles of convex polytopes. *Acta Mathematica*, 121(1) :293–302, 1968.

- [24] Branko Grünbaum, Victor Klee, Micha A Perles, and Geoffrey Colin Shephard. *Convex polytopes*. Springer, 1967.
- [25] Peter McMullen and Geoffrey C Shephard. Diagrams for centrally symmetric polytopes. *Mathematika*, 15(02) :123–138, 1968.
- [26] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [27] Thomas Strohmer and Robert W Heath. Grassmannian frames with applications to coding and communication. *Applied and computational harmonic analysis*, 14(3) :257–275, 2003.
- [28] Joel A Tropp. Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 50(10) :2231–2242, 2004.
- [29] Joel A Tropp. Just relax : Convex programming methods for subset selection and sparse approximation. *ICES report*, 404, 2004.
- [30] Joel A Tropp. Norms of random submatrices and sparse approximation. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(23) :1271–1274, 2008.
- [31] Martin J Wainwright. Sharp thresholds for high-dimensional and noisy sparsity recovery using-constrained quadratic programming (lasso). *IEEE transactions on information theory*, 55(5) :2183–2202, 2009.
- [32] Günter M Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152. Springer Science & Business Media, 1995.