Optimisation linéaire et convexité
TP4

09 mars 2016

Maxime Chupin, bureau 16-26-333, `chupin@ann.jussieu.fr`.

Dans cette séance on s'intéressera à l'application de la méthode du simplexe aux problèmes de deuxième espèce. Pour cette famille plus générale de problèmes, cette dernière se décline en deux *phases*. La première correspond à l'identification d'une éventuelle solution de base réalisable, moins aisée que dans le cadre des problèmes de première espèce. La seconde consiste en une application classique de la méthode du simplexe, à partir d'une solution de base réalisable. À chaque phase est possiblement associé un certain nombre de situations pathologiques : convexe des contraintes vide pour la première étape ; existence d'une infinité de solutions ou convexe des contraintes non borné pour la seconde.

1 Résolution pas à pas d'un problème de deuxième espèce

Exercice 1: On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3,$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leqslant & 180 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geqslant & 30 \\ 35x_1 & + & 56x_2 & + & 40x_3 & \leqslant & 1400 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 140 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 40 \\ & & x_1,x_2,x_3 & \geqslant & 0. & & \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Reformulation du problème
   - Mettre ce problème sous forme matricielle standard $AX = b$ en introduisant les variables d'écart e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.
   - Pourquoi ne dispose-t-on pas d'une solution de base réalisable ?
   - Introduire, comme dans le cours, une variable supplémentaire $\alpha_1 \geqslant 0$ et une fonctionnelle $U = -\alpha_1$. Écrire la nouvelle formulation du système des contraintes intégrant la variable α_1.
   - À quelle condition sur U peut-on trouver une solution de base réalisable ?
   - Écrire le tableau final correspondant à cette dernière reformulation du problème.
2. Construction avec `python` du tableau associé au problème (1).
   - Définir le vecteur $v = (5,8,4,0,0,0,0,0) \in \mathbf{R}^8$, $u = (0,0,0,0,0,0,0,0) \in \mathbf{R}^8$ et $\alpha_1 = (-1,-1,-1,-1,-1)^T \in \mathbf{R}^5$.
   - Construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{7,10}(\mathbf{R})$ définie par bloc de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & \alpha & b \\ u & -1 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_5 \\ L_U \\ L_Z \end{pmatrix}.$$

3. Recherche d'une solution de base réalisable.
   — En utilisant la fonction `pivot`, définie dans le TP2, appliquer *à la matrice M* les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe *appliqué à la fonctionnelle U* (avant dernière ligne de la matrice M).
   — Pourquoi U possède-t-elle un maximum ? Quel est-il ? Conclusion.
4. Recherche du maximum pour Z
   — Appliquer *à la matrice* obtenue à partir de M après la première phase, les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe *appliqué à la fonctionnelle Z*. On pourra supprimer les lignes et colonnes correspondantes au problème auxiliaire devenues inutiles grâce à la fonction `np.delete`.
   — Conclusion.

2 Situations moins classiques

Exercice 2: On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leqslant 40 \\ 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leqslant 35 \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geqslant 51 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart, et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
2. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour U.
3. En quel point ce maximum est-il atteint ? Quelle interprétation géométrique donner à ce résultat ?

Exercice 3: On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2x_2 + 20x_3,$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - x_3 \geqslant 30 \\ + 5x_2 - x_3 \geqslant 10 \\ 25x_1 - 10x_2 + 2x_3 \leqslant 105 \\ x_1 - 2x_2 + 20x_3 \leqslant 96 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Donner une estimation *a priori* du maximum. Parmi les situations rencontrées lors du TP2, dans le cadre de la résolution graphique des problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2, à laquelle peut-on ici s'attendre ? Sous quelle condition ?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour U.
4. Quelle situation est ici illustrée ? Qu'en déduire de l'optimum ? Interprétation géométrique ?

Exercice 4: On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\textbf{Minimiser } Z(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 30 \\ 15x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geqslant 90 \\ 15x_1 + 13x_2 + 15x_3 \geqslant 210 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Le convexe des contraintes associé à ces inégalits est non borné, néanmoins le problème d'optimisation possède bien une solution. Pourquoi ?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent. (Il peut être utile de transformer ce problème en un problème de maximisation pour être exactement dans le cadre des résultats de cours).
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour $-Z$.