Exercice n°1

1/ ▲ – Initialisation : pour $n = 0$ l'identité se réduit à $1 = \dfrac{1-x}{1-x}$.

– $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons que pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$. La récurrence est démontrée.

▼ On peut aussi montrer que $(1-x) \times \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = 1 - x^{n+1}$. Or

$$\begin{aligned}
(1-x) \times \sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x \times \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1}\right) = 1 - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

2/ ▲ En dérivant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(1-x)(n+1)x^n - (-1) \times (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{P_n(x)}{(1-x)^2}$.

▼ On peut aussi calculer $(1-x)^2 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$. On obtient

$$\begin{aligned}
(1-x)^2 \times \sum_{k=1}^{n} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k - 2x \times \sum_{k=1}^{n} kx^k + x^2 \times \sum_{k=1}^{n} kx^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} kx^k - 2 \times \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} kx^{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kx^k - 2 \times \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)x^k + \sum_{k=3}^{n+2} (k-2)x^k
\end{aligned}$$

On regroupe les termes par degré. – $k = 1$: x

– $k = 2$: $(2-2)x^2 = 0$

– $3 \leq k \leq n$: $\big(k - 2(k-1) + (k-2)\big)x^k = 0$

– $k = n+1$: $\big(-2n + (n-1)\big)x^{n+1} = -(n+1)x^{n+1}$

$-\ k = n+2 :\ nx^{n+2}$.

On retrouve $P_n(x) = x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}$.

Exercice n$^{\mathrm{o}}$2

1/ $S_1 = \dfrac{1}{2}$. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3+1}{6} = \dfrac{2}{3}$, $S_3 = S_2 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{8+1}{12} = \dfrac{3}{4}$.

2/ ▲ − La récurrence a été initialisée au 1/.

$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ Si $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, alors

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

D'où le résultat.

▼ On a
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

3/ De $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ on déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2}. \end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \times \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{n+1}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Exercice n$^{\mathrm{o}}$3

1/ D'après la formule du binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \times \frac{a^k}{n^k} \qquad .$$

Il suffit donc de montrer, pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \times \frac{a^k}{n^k} \leq \frac{a^k}{k!} \quad \text{soit} \quad \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad n! \leq (n-k)!n^k.$$

Pour $k = 0$ l'inégalité est évidente. On note que pour tout $k \leq (n-1)$,

$(n-k-1)! \times n^{k+1} - (n-k)! \times n^k = (n-k-1)! \times n^k \times \big(n-(n-k)\big) = k\,(n-k-1)! \times n^k \geq 0.$

Donc la suite finie $k \longmapsto (n-k)! \times n^k$ est croissante sur $[0,n]$ et on a bien $n! \leq (n-k)! \times n^k$ pour tout $k \in [0,n]$.

2/ D'après la formule de Taylor Lagrange, il existe $c \in]0,a[$ tel que $e^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\, e^c$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \leq e^a$. Le résultat découle du 1/.

3/ Pour $n \geq 1$ on pose $x_n = n \ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$ de sorte que $e^{x_n} = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$. D'après 2/, $e^{x_n} \leq e^a$ d'où $x_n < a$ [1]. D'après le T.A.F. il existe $c_n \in]x_n, a[$ tel que $e^a - e^{x_n} = (a-x_n)e^{c_n}$. Par le DL du logarithme à l'ordre 2 on a $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) = \dfrac{a}{n} - \dfrac{a^2}{2n^2} + o(n^{-2})$. D'où

$$a - x_n = a - n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = a - a + \frac{a^2}{2n} + o(n^{-1}) = \frac{a^2}{2n} + o(n^{-1}).$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{c_n} = e^a$ et $a - x_n \sim \dfrac{a^2}{2n}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Finalement
$$e^a - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^2\, e^a}{2n}.$$

1. Ceci peut se voir aussi en appliquant Taylor-Lagrange au logarithme.