Exercice n°1

Pour tout $k \leq n$ on note $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

1/ Vérifier pour $n = 1, 2, 3$ que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \qquad \blacklozenge$$

2/ Montrer $\blacklozenge$ pour tout $n \geq 0$.

$\left(\text{Noter } P_n = (1+X)^{2n} \text{ et remarquer que } P_n = \big((1+X)^n\big)^2\right)$

Exercice n°2

On définit les suites $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ en posant

$$\forall\, p \geq 0,\ X_p = \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

M.L.A.S. (Montrer les assertions suivantes.)

1/ $\forall\, p \geq 1$, $X_p - X_{p-1} \geq \dfrac{1}{2}$. 2/ $\lim\limits_{p\to+\infty} X_p = +\infty$. 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice n°3

On définit les suites $(S_n)_{n\geq1}$, $(U_n)_{n\geq1}$, $(T_n)_{n\geq1}$ et $(V_n)_{n\geq1}$ en posant pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad T_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

M.L.A.S.

1/ $\forall\, n \geq 1$, $U_n \leq 1 + S_{n-1}$.

2/ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$[1].

3/ La suite $(U_n)_{n\geq1}$ est convergente.

4/ $\forall\, n \geq 1$, $\dfrac{V_{n+1} - V_n}{2} \leq T_{n+1} - T_n$.

5/ La suite $(V_n)_{n\geq1}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n \leq 3$.

Exercice n°4

M.L.A.S.:

1/ $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x - 1$.

2/ $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq \dfrac{1}{a} \times (x^a - 1)$.

3/ $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$.

1. Voir feuille 1 exo 2

Exercice n°5

Pour $n \geq 1$ on pose $P_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{X^j}{j}$ et, pour $x < 1$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

On rappelle (exo 1 feuille 1) que pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x}$.

M.L.A.S.:

1) Pour $x < 1$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

2) – si $0 < x < 1$, $\big|R_n(x)\big| \leq \dfrac{1}{(n+1)(1-x)}$,

– si $-1 \leq x < 0$, $\big|R_n(x)\big| \leq \dfrac{1}{(n+1)}$.

3) Conclusion ?