Exercice n°1

Vérifier que les intégrales suivantes sont convergentes, sans chercher à les calculer.

$$1/ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} \qquad 2/ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+2)\sqrt{t}} \qquad 3/ \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+2)\sqrt{t}}\, dt$$

$$4/ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \qquad 5/ \int_0^{2} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} \qquad 6/ \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{(t-1)^{5/2}}\, dt$$

Exercice n°2

Pour chaque intégrale déterminer selon $\alpha \in \mathbb{R}$

− ses singularités éventuelles,

− sa nature lorsqu'elle est généralisée.

$$1/ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\, dt \qquad 2/ \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cos t)}{t^\alpha}\, dt, \qquad 3/ \int_0^{\pi/2} \tan^\alpha t\ dt$$

Exercice n°3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\, dt \quad L_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)^n}\, dt$$

M.L.A.S.:

1/ $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

2/ I_n et J_n convergent pour tout $n \geq 1$, K_n pour $n \geq 2$ et L_n pour $n \geq 3$.

3/ $J_{n-1} - J_n = K_n$ pour $n \geq 2$.

4/ $J_n \sim J_{n-1}$.

5/ $J_n - I_n \leq \dfrac{1}{2}\, nL_n$.

6/ $J_n \sim I_n$.

7/ $J_n \sim \dfrac{I_1}{\sqrt{n}}$.