Exercice n°1

Soit pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n} t \; dt$ et $u_n = I_n + I_{n+1}$.

1/ Montrer que $\forall\, n \geq 0,\ u_n = \dfrac{1}{2n+1}$

2/ Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

3/ Montrer que $\forall\, n \geq 0,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

4/ En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice n°2

Déterminer selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la nature[1] des intégrales suivantes.

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt \qquad\qquad J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, dt.$$

Exercice n°3

1/ Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\beta} \right)$ converge ssi $\beta > 1$.

2/ Déterminer selon $a > 0$ la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$.

Exercice n°4

1/ Déterminer la convergence des séries suivantes, dont le TG est défini pour $n \geq 2$.

$$\blacktriangle \quad \sum \frac{1}{n \ln^2 n} \qquad\qquad \blacktriangledown \quad \sum \frac{1}{n \ln n}$$

2/ Soit N minimum tel que $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} \geq 100$. Montrer que

$$100 + \ln(\ln 2) - \frac{1}{2\ln 2} \quad \leq \quad \ln(\ln N) \quad \leq \quad 100 + \ln(\ln 2)$$

1. i.e. CV ou DV. En LM250 il n'est jamais demandé de prouver la semi-convergence des intégrales.