

Optimisation linéaire et convexité

TP2

5 février 2014

Maxime CHUPIN, bureau 16-26-333, chupin@ann.jussieu.fr.

L'objectif de cette séance est double. Il s'agira dans un premier temps de revenir sur la méthode du pivot de GAUSS-JORDAN en particulier sur l'interprétation vectorielle de cette dernière. Dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation linéaire, ce formalisme est en effet très utile. Dans un second temps la résolution graphique de problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2 sera traitée. Cette méthode de résolution s'étend bien sûr difficilement aux problèmes posés en dimensions supérieures mais fournit néanmoins l'intuition géométrique des différentes situations rencontrées.

1 Pivot de GAUSS-JORDAN, suite

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. On notera L_i , $1 \leq i \leq p$, les lignes de la matrice A , et on adoptera également la représentation suivante : $A = (V_1, \dots, V_n)$ où $1 \leq k \leq n$, V_k désigne les coordonnées du vecteur éponyme dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p\}$ de \mathbf{R}^p . Lorsqu'on a choisi a_{jm} pour pivot, la méthode de GAUSS-JORDAN consiste en la série de transformations suivantes, pour tout $1 \leq i \leq p$:

1. si $i = j$:

$$L_i \rightarrow L_i / a_{im}$$

2. si $i \neq j$:

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{im}}{a_{jm}} L_j$$

La matrice obtenue contient les coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leq k \leq n}$ dans la base :

$$\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_p\}$$

de \mathbf{R}^p dite *base voisine* de \mathcal{B} .

Exercice 1: Interprétation vectorielle

1. Écrire une fonction scilab PIVOTGJ qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ associe la matrice B , de mêmes dimensions, contenant les coordonnées des vecteurs V_k dans la base $\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_p\}$ de \mathbf{R}^p . Cette fonction est de la forme :

```
function N=PIVOTGJ(M, j, m)
...
endfunction
```

Remarque : il faut bien sûr s'assurer avant d'appliquer cette fonction que \mathcal{B}' définit bien une nouvelle base de \mathbb{R}^p ; ce qui n'a rien d'évident lorsqu'on considère une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

2. Soit la matrice $A = (V_1, V_2, V_3, V_4)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer à l'aide de la fonction rank le rang de cette matrice.
- En utilisant la fonction PIVOTGJ, calculer la matrice B des coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leq k \leq 4}$ dans la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.
- Définir la matrice $P = (\epsilon_1, \epsilon_2, V_3)$, matrice de passage de la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ vers la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.
- Comparer A et $C = PB$. Conclusion.
- Pourquoi ne peut-on faire entrer V_2 ou V_4 dans la base à la place de ϵ_3 ?

Exercice 2: Application à la recherche algébrique de solutions de base.

On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante.

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 15x_2 + 25x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + & & 5x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + & & 3x_3 & \leq & 21 \\ x_1 + x_2 + & & 4x_3 & \leq & 10 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{cases} \quad (1)$$

1. Questions de cours

- En introduisant les variables d'écart $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, écrire la formulation standard du problème.
- Donner une solution de base du système des contraintes. Est-elle réalisable ? Commentaires.

2. Exploration des solutions de base

- Écrire le problème obtenu après introduction des variables d'écart sous forme matricielle $AX = b$, où $A \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$.
- Définir sous scilab la matrice $M = (A, b^T)$. C'est à cette matrice que l'on va appliquer la méthode du pivot de GAUSS-JORDAN.
- La matrice M ainsi définie correspond au tableau 1 ci-dessous.

	V_1	V_2	V_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	d
ϵ_1	2	0	5	1	0	0	5
ϵ_2	2	2	3	0	1	0	21
ϵ_3	1	1	4	0	0	1	10

TABLE 1 – Tableau associé au problème (1)

En utilisant la fonction PIVOTGJ, définie dans l'exercice 1, calculer la décomposition des vecteurs $V_1, V_2, V_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dans les bases successives :

$$\{V_3, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \{V_3, \epsilon_2, V_2\}, \{V_3, \epsilon_3, V_2\}, \{V_3, V_1, V_2\}, \text{ et } \{\epsilon_2, V_1, V_2\},$$

qui sont dans cet ordre voisine l'une de l'autre.

- Quelles sont les solutions de base associées à chacune de ces bases. Lesquelles sont réalisables ?

2 Résolution géométrique en dimension 2

Lorsqu'on travaille en dimension 2 et que le nombre de contraintes est restreint, on peut aisément résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide d'une représentation géométrique. En effet, à chaque contrainte *initiale* de type :

$$(C_i) : a_i x + b_i y \leq (\geq) c_i,$$

on associe un sous-ensemble de \mathbb{R}_+^2 défini par

$$C_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y \leq (\geq) \frac{c_i}{b_i} - \frac{a_i}{b_i} x \right\}.$$

L'ensemble $C = \cap_i C_i$ est convexe. C'est l'ensemble des points pour lesquels toutes les contraintes *initiales* sont vérifiées. La compacité de C et la forme de Z décident alors de l'existence et la nature des solutions. La faiblesse de cette approche tient évidemment à ce que lorsque la dimension et le nombre de contraintes croissent, C n'est plus représentable.

Exercice 3: Premier exemple

On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante.

$$\text{maximiser } Z(x, y) = 2x + y,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ 9x + 4y \leq 36 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Donner une solution de base réalisable.
2. À l'aide de la fonction `plot`, représenter le convexe C associé aux contraintes (2). Que peut-on en conclure quant à l'existence de solutions ?
3. À l'aide de la représentation sous `scilab` des lignes de niveaux de la fonction de coût Z , résoudre le problème.
4. Que se passe-t-il si l'on cherche à maximiser la fonction de coût $Z_2(x, y) = x + y$ sous les mêmes contraintes ?
5. On suppose, plus généralement, que la fonction de coût $Z_a(x, y) = ax + y$ dépend d'un paramètre a . Décrire la solution du problème de programmation linéaire suivant les valeurs du paramètre a .

Exercice 4: Différentes situations en dimension 2.

Résoudre graphiquement les problèmes de programmation linéaires suivants. Répondre dans chaque cas aux questions suivantes :

1. Représenter à l'aide `scilab` le convexe associé aux contraintes.
2. Existence et nature des solutions.

Problème 1

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } Z_1(x, y) = 2x + y, \\ &\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ x \geq 2 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Problème 2

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } Z_2(x, y) = 2x - 3y, \\ &\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 6 \\ x - 2y \geq 5 \\ 2x - y \geq 6 \\ x, y \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4)$$

Problème 3

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } Z_3(x, y) = 30x + 20y, \\ &\left\{ \begin{array}{l} x - y \leq -2 \\ x - 4y \leq -2 \\ 2x + y \geq 5 \\ 5x + 7y \leq 44 \\ x, y \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5)$$

Exercice 5: Solutions de base réalisable et sommet du convexe C .

On s'intéresse au problème (2) de l'exercice 3, pour la fonction de coût Z .

1. Mettre le problème sous forme standard et introduire les variables e_1, e_2, e_3 .
2. Encore en utilisant la fonction PIVOTGJ, parcourir *dans cet ordre* les bases voisines suivantes :

$$\begin{aligned} &\{V_2, e_2, e_3\}, \{V_2, e_1, e_3\}, \{V_2, e_1, e_2\} \\ &\quad \{V_1, e_1, e_2\}, \{V_1, e_1, e_3\}, \\ &\{V_1, V_2, e_3\}, \{V_1, V_2, e_2\}, \{V_1, V_2, e_1\}. \end{aligned}$$

3. Relever les solutions de base réalisables.
4. Comparer avec les sommets du convexe des contraintes C , tracé dans l'exercice 3. Conclusion ?