
Formule de Shannon-Nyquist et échantillonnage

SOMMAIRE DU CHAPITRE

1.1	Transformées de FOURIER des fonctions L^1 . . .	10
1.1.1	Définitions et notations	10
1.1.2	Convolution	13
1.1.3	Le lemme de Riemann-Lebesgue . . .	14
1.1.4	La formule d'inversion	15
1.1.5	Dérivation et transformée de FOURIER	18
1.1.6	Transformée de FOURIER à deux dimensions	19
1.2	Séries de FOURIER des signaux L^1_{loc}	20
1.2.1	Définitions, coefficients de FOURIER . .	20
1.2.2	Convolution	21
1.2.3	Le Noyau de Poisson et son application à la formule d'inversion	22
1.3	Reconstruction des signaux périodiques	26
1.3.1	Le théorème de SHANNON-NYQUIST . .	27
1.3.2	Phénomène de recouvrement de spectre	31
1.3.3	Sur-échantillonnage	34
1.4	Note bibliographique	34

Dans ce chapitre, nous établissons un théorème fondamental du traitement du signal. En effet, comme discuté dans l'introduction, les signaux analogique, pour leur traitement, sont discrétisés, et donc, il est nécessaire d'être capable, à partir de relevés discrets d'un signal, de le reconstruire entièrement. Ceci se fait bien entendu au prix de quelques hypothèses de régularité sur le signal que nous allons détailler. Ce théorème est connu sous le nom du *théorème d'échantillonnage*, du *théorème de SHANNON* ou bien encore du *théorème de NYQUIST-SHANNON*.¹

La démonstration du théorème, ainsi que bon nombre de résultat de traitement du signal reposent sur la théorie de la Transformation de FOURIER.² Ainsi ce chapitre débute par quelques rappels de résultats bien connus.

1.1 Transformées de Fourier des fonctions L^1

Tout d'abord, donnons la définition de la transformée de FOURIER.

1.1.1 Définitions et notations

Introduisons tout d'abord quelques notations. On note :

$$L^1 := \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \int_{\mathbf{R}} |f| < +\infty \right\}.$$

Pour ce qui nous concerne, nous désignerons par *signal stable* une fonction de L^1 .

Étant donnée une partie A de \mathbf{R} , on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice, c'est-à-dire la fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui vaut 1 sur la partie A et 0 ailleurs.

Une fonction est dite *à support borné* si elle est nulle en dehors d'une partie bornée de \mathbf{R} . Venons-en à la définition qui nous intéresse.

Définition 1.1 – Transformée de FOURIER dans L^1

Soit $s \in L^1(\mathbf{R})$. La transformée de FOURIER de s , notée \hat{s} est définie sur \mathbf{R} par la formule :

$$\hat{s}(v) := \int_{\mathbf{R}} s(t)e^{-2i\pi vt} dt.$$

La transformée de FOURIER se note aussi $\mathcal{F}(s) = \hat{s}$.

1. (Wikipédia) À partir des années 1960, le théorème d'échantillonnage est souvent appelé théorème de SHANNON, du nom de l'ingénieur qui en a publié la démonstration en posant les bases de la théorie de l'information chez *Bell Laboratories* en 1949. Quelques années plus tard, on joint à ce nom celui de NYQUIST, de la même entreprise, qui avait ouvert la voie dès 1928.

2. Joseph FOURIER (21 mars 1768, Auxerre - 16 mai 1830, Paris) est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de FOURIER.

Remarque 1.1 :

Plusieurs conventions sont possibles pour la définition de la transformée de FOURIER : sans constante dans l'exponentielle (2π), soit avec une constante $1/2\pi$ facteur de l'intégrale. Le seul changement dans les résultats se situe au niveau des constantes dans les formules.

Remarque 1.2 :

Le cadre fonctionnel $L^1(\mathbf{R})$ est un cadre *naturel* pour la transformée de FOURIER. En effet, avec ce cadre là, la transformée \hat{s} est bien définie pour tout ν dans \mathbf{R} puis que $(x \mapsto s(x)e^{-2i\pi\nu x}) \in L^1$. Nous verrons que dans ce cadre fonctionnel, la transformée de FOURIER n'est pas toujours inversible. La transformée de FOURIER peut être étendue aux fonctions L^2 par un passage à la limite, cadre dans lequel elle est un isomorphisme et une isométrie (théorème de Plancherel). On adoptera ce cadre fonctionnel au chapitre 7. La transformée de FOURIER peut être considéré dans l'espace des *distributions tempérées* de Laurent Schwartz qui contient tous les L^p et dans lequel elle est encore inversible. Beaucoup de références de traitement du signal se placent dans ce cadre là. Nous ne l'aborderons presque pas ici.

Exercice 1.1 :

Montrer que :

1. pour $T > 0$, la transformée de FOURIER d'une fonction fenêtre, encore appelée *signal rectangulaire*, définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \text{rect}_T(t) := \mathbf{1}_{[-T/2, T/2]}(t)$$

est donnée par :

$$\widehat{\text{rect}_T}(\nu) := T \text{sinc}(\pi\nu T) = T \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}.$$

Voir figure 1.1 pour un tracé.

2. La transformée de FOURIER d'une gaussienne est une gaussienne :

$$\mathcal{F}(t \mapsto e^{-\pi t^2}) = \left(\nu \mapsto e^{-\pi \nu^2} \right),$$

et par changement de variable :

$$\mathcal{F}(t \mapsto e^{-\alpha t^2}) = \left(\nu \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} \nu^2} \right).$$

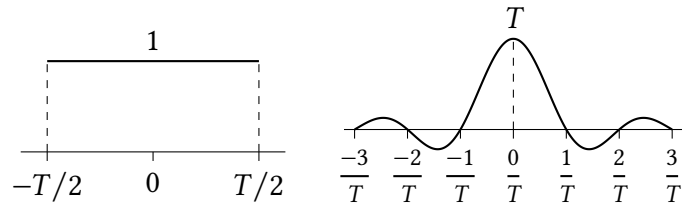


FIGURE 1.1 : Fonction fenêtre et sa transformée de FOURIER

Exercice 1.2 :

Soit f une fonction de $L^1(\mathbf{R})$ paire. Montrez que :

$$\forall v \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{F}(f)(v) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi vt) dt.$$

Exercice 1.3 :

Soit $a > 0$ et

$$f : t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-a|t|}.$$

Montrez que

$$\forall v \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{F}(f)(v) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}.$$

On montre par le calcul la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit s un signal stable. Alors, on a :

Transformations	f	\hat{f}
Délais	$f : t \mapsto s(t - t_0)$	$\hat{f} : v \mapsto e^{-2i\pi vt_0} \hat{s}(v)$
Modulation	$f : t \mapsto e^{2i\pi v_0 t} s(t)$	$\hat{f} : v \mapsto \hat{s}(v - v_0)$
Op. linéaires	$f : t \mapsto s(at)$	$\hat{f} : v \mapsto \frac{1}{ a } \hat{s}\left(\frac{v}{a}\right)$
	$f : t \mapsto \lambda s(t)$	$\hat{f} : v \mapsto \lambda \hat{s}(v)$
	$f : t \mapsto s^*(t)$	$\hat{f} : v \mapsto \hat{s}(-v)^*$

Exercice 1.4 :

Démontrer les résultats de la proposition 1.

Exercice 1.5 :

Montrer que la transformée de FOURIER est linéaire et continue dans $L^1(\mathbf{R})$.

1.1.2 Convolution

Une loi de composition est généralement associée à la transformée de FOURIER, c'est le *produit de convolution*³. Cette loi de composition donne les clés pour comprendre et analyser les problèmes soulevés par la conversion d'un signal analogique en signal digital (CAN : conversion analogique-numérique) et aussi pour la conversion inverse, d'un signal digital en un signal analogique (CNA : conversion numérique-analogique).

 **Définition 1.2 – Convolution**

Soit a, b deux fonctions de L^1 . On définit le produit de convolution ou *convoluée* de a et b par la formule :

$$a \star b := \int_{\mathbf{R}} a(t-u)b(u)du.$$

Cette définition a bien un sens : d'après le théorème de Tonelli, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |a(t-u)||b(u)|du dt = \left(\int_{\mathbf{R}} |a| \right) \times \left(\int_{\mathbf{R}} |b| \right),$$

et donc :

$$\int_{\mathbf{R}} |a(t-u)||b(u)|du < +\infty \quad p.p.,$$

par conséquent $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} a(t-u)b(u)du$ est définie presque partout.

Attention, ici le vocabulaire diverge entre physicien·ne·s et mathématicien·ne·s. En mathématiques, on parle de *convoluée* de deux fonctions, alors que les physicien·ne·s emploient le terme *convoluée*.

On vérifie aisément que cette loi de composition est commutative et associative. Le lien avec la transformée de FOURIER est donné par le lemme suivant.

3. qui elle aussi peut être généralisée à des cadres plus larges que celui des fonctions de $L^1(\mathbf{R})$.

Lemme 1.1 Soit a, b deux fonctions de L^1 . On a :

$$\widehat{a \star b} = \widehat{a} \widehat{b}.$$

Autrement dit, la transformée de FOURIER change le produit de convolution en simple produit.

Preuve : La fonction $a \star b$ étant intégrable, d'après le théorème de Fubini nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} a(t-u)b(u)du \right) e^{-2i\pi vt} dt &= \int_{\mathbf{R}} b(u) \left(\int_{\mathbf{R}} a(t-u)e^{-2i\pi v(t-u)} dt \right) e^{-2i\pi vu} du \\ &= \widehat{a} \widehat{b}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Exercice 1.6 :

Soit a de classe \mathcal{C}^1 , stable de dérivée a' stable, et soit b un signal stable. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \frac{d}{dt}(a \star b)(t) = a' \star b(t).$$

1.1.3 Le lemme de Riemann-Lebesgue

Dans les démonstrations que nous verrons dans la suite, nous ferons souvent appel à des passages à la limite sous le signe intégral. Nous aurons en particulier besoin du résultat suivant, généralement appelé Lemme de Riemann-Lebesgue.

Lemme 1.2 – Lemme de Riemann-Lebesgue La transformée de FOURIER d'un signal s stable vérifie :

$$\lim_{|v| \rightarrow +\infty} |\widehat{s}(v)| = 0.$$

Preuve : On procède en trois étapes.

1. Pour un signal rectangulaire, nous avons vu à la section 1.1.1 qu'il existe un $K > 0$ tel que :

$$|\widehat{s}(v)| \leq \frac{K}{|v|}.$$

Le résultat est donc vrai dans ce cas.

2. Ce résultat s'étend aux combinaisons linéaires finies de signaux rectangulaires, c'est-à-dire aux fonctions étagées.
3. Soit maintenant un signal stable s et un réel v . Par densité des fonctions étagées dans L^1 , nous savons qu'il existe une suite de fonctions étagées $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |s_n(v) - s(v)| dv = 0.$$

avec, d'après le point précédent,

$$|\widehat{s}_n(v)| \leq \frac{K_n}{|v|}.$$

Par linéarité de l'intégral :

$$\forall v \in \mathbf{R}, \int_{\mathbf{R}} s(t) e^{-2i\pi vt} dt = \int_{\mathbf{R}} (s(t) - s_n(t)) e^{-2i\pi vt} dt + \int_{\mathbf{R}} s_n(t) e^{-2i\pi vt} dt,$$

puis par inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\widehat{s}(v)| &\leq |\widehat{s}_n(v)| + \int_{\mathbf{R}} |s(t) - s_n(t)| dt \\ &\leq \frac{K_n}{|v|} + \int_{\mathbf{R}} |s(t) - s_n(t)| dt, \end{aligned}$$

qui peut être rendu arbitrairement petit, sous réserve que $|v|$ soit suffisamment grand.

1.1.4 La formule d'inversion

Les résultats précédents nous indiquent que la transformée de FOURIER d'un signal stable tend vers 0. On peut également montrer qu'elle est uniformément continue et bornée.

Par contre, elle ne constitue pas un signal stable. En effet, nous avons vu que la transformée de FOURIER du signal rectangulaire rect_T pour $T \in \mathbf{R}$ est proportionnelle au sinus cardinal et que celui-ci n'appartient pas à $L^1(\mathbf{R})$.

Exercice 1.7 :

Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'appartient pas à $L^1(\mathbf{R})$.

Ainsi, la transformée de FOURIER d'un signal stable n'est pas nécessairement un signal stable.

L'inversion de la transformée de FOURIER ne peut donc se faire que sur un sous-espace vectoriel de L^1 .

Théorème 1.1 – Formule d'inversion de la transformée de FOURIER — Soit s un signal stable, tel que sa transformée de FOURIER \hat{s} soit également stable. Alors, pour presque tout t :

$$s(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{2i\pi vt} dv.$$

Preuve : On procède de nouveau en trois étapes.

1. Par un calcul simple, sans problème de convergence, on montre le résultat pour les fonctions $f_{\alpha,\beta}$, α et β deux réels, définies par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_{\alpha,\beta}(t) = e^{-\alpha t^2 + \beta t}.$$

2. On considère ensuite la fonction h_σ définie par :

$$h_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

dont la transformée de FOURIER est :

$$\hat{h}_\sigma(v) = e^{-2\pi^2\sigma^2 v^2}.$$

Étant donné un signal stable s , la formule d'inversion est vraie pour $s \star h_\sigma$. En effet :

— on a successivement :

$$\begin{aligned} s \star h_\sigma(t) &= \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(t-u) du \\ &= \int_{\mathbf{R}} s(u) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} du \\ &= \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(u) f_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(t) du, \end{aligned}$$

— de plus :

$$\begin{aligned} \hat{s}(v) \hat{h}_\sigma(v) &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(u) f_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(t) e^{-2\pi i v t} dt du \\ &= \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(u) \underbrace{\int_{\mathbf{R}} f_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(t) e^{-2\pi i v t} dt}_{\hat{f}_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(v)} du, \end{aligned}$$

— donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) \hat{h}_\sigma(v) e^{2i\pi vt} dv &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(u) \hat{f}_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(v) e^{2i\pi vt} dudv \\ &= \int_{\mathbf{R}} s(u) h_\sigma(u) f_{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}, \frac{u}{\sigma^2}}(t) du \\ &= s \star h_\sigma(t), \end{aligned}$$

ce qui constitue la conclusion recherchée.

3. Enfin, nous avons :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \hat{h}_\sigma(v) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{2\pi^2 \sigma^2 v^2} = 1.$$

Par convergence dominée, ceci donne :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) \hat{h}_\sigma(v) e^{2i\pi vt} dv = \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{2i\pi vt} dv.$$

Il reste donc à montrer :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} s \star h_\sigma = s,$$

dans L^1 . Pour ce faire, en utilisant le fait que $\int_{\mathbf{R}} h_\sigma(u) du = 1$, notons que :

$$\int_{\mathbf{R}} |s \star h_\sigma - s| = \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} (s(t-u) - s(t)) h_\sigma(u) du \right| dt.$$

On pose alors $\phi(u) = \int_{\mathbf{R}} |s(t-u) - s(t)| dt$. On a que $\phi \in L^1(\mathbf{R})$ (bornée par $2 \|s\|_{L^1}$) et nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{R}} |s \star h_\sigma - s| \leq \int_{\mathbf{R}} \phi(u) h_\sigma(u) du = \int_{\mathbf{R}} \phi(\sigma u) h_1(u) du = I_\sigma.$$

Il reste à montrer que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} I_\sigma = 0$.

- Si s est à support compact et continue, alors par uniforme-continuité, pour toute suite u_n tendant vers 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |s(t - u_n) - s(t)| = 0.$$

Donc, puisque ϕ est intégrable, on obtient par convergence dominée :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} I_\sigma = 0.$$

- On utilise la densité des fonctions continue à support compact dans L^1 : ainsi pour s stable, il existe une suite de fonctions s_n à support compact qui converge vers s dans L^1 . On obtient alors le résultat cherché par l'intermédiaire de cette approximation.

1.1.5 Dérivation et transformée de Fourier

Théorème 1.2 – Dérivation –

1. Soit s un signal dans \mathcal{C}^n tel que toutes ses dérivées k -ième pour $k \in \{1, \dots, n\}$ sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}(s^{(k)}) = \left(v \mapsto (2i\pi v)^k \hat{s}(v) \right).$$

2. Soit s un signal intégrable tel que $t \mapsto t^k s(t) \in L^1(\mathbf{R})$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ où $n \in \mathbf{N}$, alors sa transformée de FOURIER est dans \mathcal{C}^n et pour tout k , on a

$$\mathcal{F}(t \mapsto (-2i\pi t)^k s(t)) = \left(v \mapsto \hat{s}^{(k)}(v) \right).$$

Preuve : Montrons la première assertion. Avec la définition de la transformée de FOURIER, et grâce au théorème de différentiation sous l'intégrale où intervient l'hypothèse $t \mapsto t^k s(t) \in L^1$ pour dominer la dérivée, on peut dériver k fois sous le signe intégral et obtenir :

$$\forall v \in \mathbf{R}, \quad \hat{s}^{(k)}(v) = \int_{\mathbf{R}} (-2i\pi t)^k s(t) e^{-2i\pi vt} dt.$$

La deuxième assertion se prouve par récurrence. On prouve le résultat pour $n = 1$ puis on itère le procédé.

Tout d'abord, on a que $\lim_{|a| \rightarrow \infty} s(a) = 0$. En effet, soit $a > 0$, on a :

$$s(a) = s(0) + \int_0^a s'(t) dt,$$

et puisque $s' \in L^1$, la limite existe et est finie. Cette limite est alors 0 puis que s est intégrable. Ensuite, on a

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi vt} s'(t) dt = \lim_{|a| \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} e^{-2i\pi vt} s'(t) dt.$$

Une simple intégration par partie donne

$$\int_{-a}^{+a} e^{-2i\pi vt} s'(t) dt = \left[e^{-2i\pi vt} s(t) \right]_{-a}^{+a} + \int_{-a}^{+a} (2i\pi v) e^{-2i\pi vt} s(t) dt.$$

Il suffit alors de faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir le résultat.

Exercice 1.8 :

Résoudre par transformée de FOURIER l'équation de la chaleur suivante

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

où

- pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}$, $\theta(x, t)$ est la température au temps t au point x d'une barre unidimensionnelle de conductance $\kappa \in \mathbf{R}$;
- à $t = 0$, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\theta(x, 0) = f(x)$ avec $f \in L^1(\mathbf{R})$.

On supposera l'application partielle $t \mapsto \theta(x, t)$ suffisamment régulière et intégrable, et on supposera l'application partielle $x \mapsto \theta(x, t) \in L^1(\mathbf{R})$.

1.1.6 Transformée de Fourier à deux dimensions

La transformée de FOURIER dans \mathbf{R}^n est une extension simple de la transformée de FOURIER à une dimension dont nous venons de rappeler les résultats qui nous seront utiles dans ce cours.

Nous allons ici nous restreindre au cas bidimensionnel utile au traitement des images par exemple.

📖 Définition 1.3 – Transformée de FOURIER dans $L^1(\mathbf{R}^2)$

Soit $s \in L^1(\mathbf{R}^2)$. La transformée de FOURIER de s , notée \hat{s} est définie sur \mathbf{R}^2 par la formule :

$$\hat{s}(v_1, v_2) := \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} s(x, y) e^{-2i\pi(v_1 x + v_2 y)} dx dy.$$

On a les résultats analogues aux précédents que nous synthétisons dans la proposition suivante.

Proposition 2 : – Si s et \hat{s} sont deux fonctions de $L^1(\mathbf{R}^2)$ alors on a la formule d'inversion pour tout $x \in \mathbf{R}^2$:

$$s(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} \hat{s}(v) e^{i2\pi(v \cdot x)} dv.$$

- Si s et h sont deux fonctions de $L^1(\mathbf{R}^2)$, alors la transformée de FOURIER de la convolution g définie pour tout $x \in \mathbf{R}^2$ par

$$g(x) = s \star h(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} s(u) h(x - u) du,$$

est, pour tout $v \in \mathbf{R}^2$:

$$\hat{g}(v) = \hat{s}(v)\hat{h}(v).$$

1.2 Séries de Fourier des signaux L^1_{loc}

Un signal périodique n'est ni stable ($L^1(\mathbf{R})$), ni d'énergie finie ($L^2(\mathbf{R})$). Pour ce type de signal, nous allons considérer leurs séries de FOURIER. Celles-ci peuvent être vues comme des transformées de FOURIER particulières : il s'agit en effet de transformées de FOURIER de fonctions périodiques. Dans la suite, L^1_{loc} désigne l'espace des signaux localement stable, i.e. :

$$L^1_{\text{loc}} := \{s; \forall A \text{ compact } \subset \mathbf{R}, \mathbf{1}_A \cdot s \in L^1\}.$$

1.2.1 Définitions, coefficients de Fourier

On rappelle le cadre fonctionnel considéré.

Définition 1.4 – Signal périodique

Soit $T > 0$. Un signal s est dit T -périodique si :

$$\forall t \in \mathbf{R}, s(t + T) = s(t).$$

Un signal s T -périodique est dit de plus *localement stable* si $s \in L^1_{\text{loc}}$.

Et dans le cas des fonctions périodiques, la transformée de FOURIER est définie sur un ensemble discret, c'est la suite des coefficients de FOURIER.

Définition 1.5 – Transformée de FOURIER dans L^1_{loc}

La transformée de FOURIER $(\hat{s}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'un signal localement stable T -périodique s est définie par la formule :

$$\hat{s}_n := \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt.$$

Étant donné $n \in \mathbf{Z}$, \hat{s}_n est appelé n -ième coefficient de FOURIER du signal s .

Les coefficients de FOURIER permettent d'écrire les fonctions périodiques localement intégrable comme une série :

$$\forall t \in [0, T], \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}_n e^{2i\pi t \frac{n}{T}}.$$

La convergence de ces séries de FOURIER est un problème et nous établirons de convergence presque partout, résultat analogue à la formule d'inversion dans le cas de la transformée de FOURIER dans L^1 .

On notera

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{s}_k e^{2i\pi t \frac{k}{T}}$$

la somme partielle.

Bien entendu d'autres résultats de convergence pour les séries de FOURIER existent et nous renvoyons à [5, 3] pour plus de détails.

1.2.2 Convolution

Puisque le produit de convolution est une opération essentiellement algébrique, elle s'applique au cadre précédemment défini. On peut même convoluer des fonctions périodiques et des fonctions L^1 , comme l'explique le résultat suivant.

Lemme 1.3 Soit s un signal localement stable T -périodique et h un signal stable. Alors la fonction g définie par la formule :

$$g(t) := \int_{\mathbf{R}} h(t-u)s(u)du$$

est T -périodique, définie presque partout et localement stable.

De plus son n -ième coefficient de FOURIER est donné par la formule :

$$\hat{g}_n = \hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) \hat{s}_n.$$

Cette dernière formule est à mettre en relation avec le fait que la transformée de FOURIER change un produit de convolution en produit.

Preuve : Par changement de variable, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} h(t-u)s(u)du = \int_0^T \tilde{h}_T(t-u)s(u)du,$$

où l'on a noté $\tilde{h}_T(u) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h(u+nT)$. De plus, on peut montrer que g est périodique de période T partout où elle est définie. En effet, en utilisant le fait que $h * s = s * h$, on a

$$g(t+T) = \int_{\mathbf{R}} h(u)s(t+T-u)du = \int_{\mathbf{R}} h(u)s(t-u)du = g(t).$$

Comme :

$$\int_0^T |\tilde{h}_T(u)|du \leq \int_{\mathbf{R}} |h(u)|du < +\infty,$$

on a en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^T |g(t)| dt &\leq \int_0^T \int_0^T |\tilde{h}_T(t-u)| |s(u)| du dt \\ &\leq \|h\|_{L^1} \int_0^T |s(u)| du \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Ainsi pour presque tout $t \in [0, T]$, $t \mapsto \int_{\mathbf{R}} h(t-u)s(u)du$ est définie, et par T -périodicité pour presque tout $t \in \mathbf{R}$. On vérifie ensuite aisément que g est localement stable et enfin, on montre :

$$\begin{aligned} \hat{g}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \tilde{h}_T(t-u) s(u) e^{2i\pi \frac{n}{T} t} du dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \left(\tilde{h}_T(t-u) e^{2i\pi \frac{n}{T} (t-u)} \right) s(u) e^{-2i\pi \frac{n}{T} u} du dt \\ &= \hat{h} \left(\frac{n}{T} \right) \hat{s}_n, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

La formule que nous venons d'obtenir sur les coefficients peut sembler sophistiquée, mais elle nous sera utile par la suite.

1.2.3 Le Noyau de Poisson et son application à la formule d'inversion

Dans cette section nous établissons la formule de Poisson qui permet de faire le lien entre transformée de FOURIER et série de FOURIER, et qui est une des briques élémentaires de la preuve du Théorème de SHANNON⁴-NYQUIST⁵ qui, rappelons le, est le but de ce chapitre.

4. Claude Elwood SHANNON (30 avril 1916 Gaylord, Michigan - 24 février 2001) est un ingénieur électricien et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la théorie de l'information.

5. Harry NYQUIST (7 février 1889 Nilsby, Suède- 4 avril 1976, Harlingen, Texas) a été un important contributeur à la théorie de l'information et à l'automatique. Ses travaux théoriques sur la détermination de la bande passante nécessaire à la transmission d'information, publiés dans l'article "Certain factors affecting telegraph speed" posent les bases des recherches de Claude SHANNON.

Noyau de Poisson

On introduit tout d'abord le noyau de Poisson et quelques-unes de ses propriétés.

Définition 1.6 – Noyau de Poisson

Étant donné un réel r appartenant à $] -1, 1[$ et $T > 0$, on appelle *noyau de Poisson* la fonction P_r définie sur \mathbf{R} et à valeur dans \mathbf{C} par :

$$P_r(t) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{2i\pi \frac{n}{T} t}.$$

Certaines propriétés de ce noyau sont indiquées dans la proposition suivante que nous ne démontrerons pas.

Proposition 3 : La fonction P_r vérifie :

1. $P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} r^{|n|} e^{2i\pi \frac{n}{T} t} + \sum_{n \in \mathbf{N}} r^{|n|} e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} - 1 = \frac{1-r^2}{\left|1 - re^{2i\pi \frac{t}{T}}\right|^2}.$

2. Pour tout réel t , on a :

$$P_r(t) \geq 0.$$

3. La fonction est normalisée :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_r(t) dt = 1.$$

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\frac{1}{T} \int_{[-T/2, T/2] - [-\varepsilon, \varepsilon]} P_r(t) dt \leq \frac{1-r^2}{\left|1 - re^{2i\pi \frac{\varepsilon}{T}}\right|^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0.$$

Les propriétés 2, 3, 4 correspondent à ce que l'on appelle une *identité approchée*. On a déjà rencontré cette notion, sans le signaler, avec la fonction h_σ de la preuve du théorème 1.1. Les identités approchées permettent de régulariser les fonctions par convolution et d'utiliser ensuite des formules du type :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) P_r(t) dt = \varphi(0), \quad (1.1)$$

lorsque l'on souhaite revenir à la fonction initiale. C'est ce raisonnement que nous allons maintenant effectuer avec le noyau de Poisson pour obtenir une formule d'inversion.

Théorème 1.3 Soit s un signal T -périodique localement stable, tel que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{s}_n| < +\infty.$$

Alors, pour presque tout $t \in \mathbf{R}$,

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}_n e^{2i\pi \frac{n}{T} t}.$$

Autrement dit, si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{s}_n| < +\infty$, la fonction s est connue dès lors que ses coefficients de FOURIER sont connus.

Remarque 1.3 :

Si on suppose en outre que s est continue, alors la formule d'inversion devient vraie pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Preuve : Par le calcul, on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(u) P_r(t-u) du = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}_n r^{|n|} e^{2i\pi \frac{n}{T} t},$$

puisque toutes les intégrales considérées sont convergentes. De plus :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^T \left| \frac{1}{T} \int_0^T s(u) P_r(t-u) du - s(t) \right| dt = 0,$$

d'après (1.1) et le théorème de convergence dominée. Par conséquent la suite de fonctions $\varphi_r(t) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}_n r^{|n|} e^{2i\pi \frac{n}{T} t}$ (indexée par r) converge dans L^1_{loc} vers s . D'autre part, puisque $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{s}_n| < +\infty$, la fonction $\varphi_r(t)$ tend vers $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}_n e^{2i\pi \frac{n}{T} t}$ ponctuellement. On utilise alors le résultat du cours d'intégration suivant :

« Si une suite de fonction f_n converge vers f dans L^p et vers g presque partout, alors $f = g$ presque partout »

pour conclure que pour presque tout $t \in \mathbf{R}$:

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}_n e^{2i\pi \frac{n}{T} t}.$$

Au passage, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1 : Deux signaux T -périodiques stable ayant les mêmes coefficients de FOURIER sont égaux presque partout.

Formule de Poisson faible

La formule que nous allons établir est une version faible du résultat fort suivant : pour tout $s \in L^1$,

$$T \sum_{n \in \mathbf{Z}} s(nT) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Théorème 1.4 – Formule de Poisson faible – Soit s un signal stable et $T > 0$. La série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} s(t + nT)$ converge presque partout vers une fonction ϕ T -périodique, localement intégrable et dont le n -ième coefficient de FOURIER est donné par la formule :

$$\hat{\phi}_n = \frac{1}{T} \hat{s}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Ce théorème établit donc un lien entre séries de FOURIER et transformée de FOURIER. Formellement, il nous dit que ϕ est telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \phi(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} s(t + nT),$$

et que ϕ est T -périodique et que sa série de FOURIER formelle S_f est :

$$S_f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2i\frac{\pi}{T}t}.$$

On utilise ici le mot formelle car nous ne disons rien sur la convergence de cette série de FOURIER.

Remarque 1.4 :

Si on arrive à montrer $\phi(0) = S_f(0)$, alors on aura la formule de Poisson forte.

Ce résultat faible nous suffira pour établir le théorème de SHANNON-NYQUIST dans la section suivante.

Preuve : Notons tout d'abord que ϕ est bien définie, puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{n \in \mathbf{Z}} |s(t + nT)| dt &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^T |s(t + nT)| dt \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} |s(t)| dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |s(t)| dt < +\infty, \end{aligned} \tag{1.2}$$

et que donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s(t + nT)| < +\infty$ presque partout.

On montre aisément que ϕ est T -périodique. La formule (1.2) montre en outre que ϕ est localement intégrable. On peut donc calculer son coefficient de FOURIER. On obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t + kT) \right) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t + kT) e^{-2i\pi \frac{n}{T} (t+kT)} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2i\pi \frac{n}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \hat{s} \left(\frac{n}{T} \right). \end{aligned}$$

Pour aller un peu plus loin vers la version forte, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 4 : Soit s un signal stable tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{s} \left(\frac{n}{T} \right) \right| < +\infty$. Alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} s(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{s} \left(\frac{n}{T} \right) e^{2i\pi \frac{n}{T} t}.$$

Ce résultat est en fait une simple application de la formule d'inversion obtenue au théorème 1.3.

1.3 Reconstruction des signaux périodiques

Dans cette dernière section nous allons répondre aux deux questions suivantes :

1. Étant donné un signal continu, quels critères doivent-êtré appliqués pour en extraire une suite discrète représentative ?
2. Comment reconstruire un signal continu à partir d'un échantillon discret de valeurs ?

Les réponses à ces deux questions sont en partie données par le théorème de SHANNON-NYQUIST, lui-même obtenu à partir de la formule de Poisson vue à la section précédente.

1.3.1 Le théorème de Shannon-Nyquist

Avant d'énoncer le théorème, on montre deux résultats préliminaires.

Lemme 1.4 Soit s , un signal stable et continu, de transformée de FOURIER \hat{s} stable et un réel $B > 0$. Supposons que :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| < +\infty. \quad (1.3)$$

Alors :

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{s}(v + 2jB) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-2i\pi v \frac{n}{2B}},$$

pour presque tout $v \in \mathbf{R}$.

Preuve : D'après la formule de Poisson faible, la fonction $v \mapsto \phi(v) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{s}(v + 2jB)$ est localement intégrable et son n -ième coefficient de FOURIER vaut :

$$\hat{\phi}_n = \frac{1}{2B} \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{-2i\pi \frac{nv}{2B}} dv.$$

Mais puisque \hat{s} est stable, on peut appliquer la formule d'inversion du théorème 1.1. Dans notre cas, celle-ci s'écrit :

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{-2i\pi \frac{nv}{2B}} dv = \frac{1}{2B} s\left(-\frac{n}{2B}\right).$$

En combinant les deux formules, nous obtenons donc formellement :

$$\phi(v) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-2i\pi \frac{nv}{2B}}.$$

Mais l'hypothèse (1.3), permet l'utilisation du théorème d'inversion 1.3 et donc justifie rigoureusement cette dernière formule.

Montrons maintenant un second lemme technique. .

Lemme 1.5 Soit s un signal vérifiant les hypothèses du lemme 1.4 et h un signal de la forme :

$$h(t) = \int_{\mathbf{R}} T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (1.4)$$

où T est stable. Alors, le signal :

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) h\left(t - \frac{n}{2B}\right) \quad (1.5)$$

admet la représentation :

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{s}(\nu + 2jB) \right) T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

Preuve : Notons tout d'abord que \tilde{s} est borné et continu, en tant que somme d'une série normalement convergente (en plus des hypothèses sur s , h est bornée, et uniformément continue).

En remplaçant h par sa valeur dans (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \int_{\mathbf{R}} T(\nu) e^{2i\pi\nu\left(t - \frac{n}{2B}\right)} d\nu \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{2B} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-\frac{2i\pi\nu n}{2B}} T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini, applicable car :

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| \cdot |T(\nu)| d\nu = \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| s\left(\frac{n}{2B}\right) \right| \right) \cdot \left(\int_{\mathbf{R}} |T(\nu)| d\nu \right) < +\infty.$$

Donc :

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbf{R}} g(\nu) T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu,$$

avec :

$$g(\nu) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{2B} s\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-\frac{2i\pi\nu n}{2B}},$$

ou encore, d'après le lemme 1.4 :

$$g(\nu) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{s}(\nu + 2jB),$$

ce qui conduit au résultat annoncé.

On peut alors énoncer le fameux théorème de SHANNON-NYQUIST.

Théorème 1.5 – de SHANNON-NYQUIST – Soit s , un signal stable et continu dont la transformée de FOURIER \hat{s} s'annule en dehors d'un intervalle $[-B, B]$. Supposons également que (1.3) soit vérifiée. Alors,

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}\left((2Bt - n)\pi\right). \quad (1.6)$$

Dans le cadre temporel, ce théorème nous dit que si un signal n'a pas de fréquence plus haute que B hertz, alors il est complètement déterminé par les valeurs discrètes séparées de $1/2B$ seconde.

Ainsi le théorème de SHANNON-NYQUIST nous indique comment choisir une fréquence d'échantillonnage lorsqu'on a des informations sur le support de la transformée de FOURIER du signal⁶ considérée.

Démontrons ce théorème.

Preuve : Définissons T par la formule :

$$T := \mathbf{1}_{[-B, B]},$$

de telle sorte que la fonction h de lemme 1.5 soit définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}.$$

Alors :

$$\left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{s}(v + 2jB) \right) T(v) = \hat{s}(v) T(v) = \hat{s}(v),$$

d'après le choix de T et l'hypothèse faite sur le support de \hat{s} .

Le lemme 1.5 donne alors :

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{2i\pi vt} dv = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{N}} s\left(\frac{n}{2B}\right) h\left(t - \frac{n}{2B}\right),$$

puis, par le théorème d'inversion 1.1, on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{s}(v) e^{2i\pi vt} dv = s(t),$$

ce qui achève la démonstration.

La fonction T joue donc finalement le rôle d'une troncature, puisqu'elle tronque artificiellement le support de la fonction considérée.

6. Les ingénieurs parlent plutôt de spectre d'un signal.

Échantillonnage, distribution de Dirac et illustration **

Lorsqu'on utilise le cadre des distributions tempérées, alors l'échantillonnage d'un signal s revient à multiplier ce signal par un *peigne de Dirac*.

Définition 1.7 – Distribution de Dirac

La distribution de Dirac, notée δ_0 , peut être vue comme la forme linéaire continue de norme 1 définie par :

$$\delta_0 : \begin{array}{ll} \mathcal{D}(\mathbf{R}) & \rightarrow \mathbf{R} \\ \phi & \mapsto \langle \delta_0, \phi \rangle := \phi(0) \end{array}$$

où $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact.

Par abus de langage, cette distribution est souvent expliquée comme étant une « fonction » qui vaut zéro partout, sauf en 0 où sa valeur infinie correspond à une « masse » de 1.

À partir de cette distribution, on peut définir un outil important de traitement du signal.

Définition 1.8 – Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac III_T est défini par

$$\text{III}_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}$$

où pour $a \in \mathbf{R}$, δ_a est la masse de Dirac translatée en a , i.e. :

$$\delta_a : \begin{array}{ll} \mathcal{D}(\mathbf{R}) & \rightarrow \mathbf{R} \\ \phi & \mapsto \langle \delta_a, \phi \rangle := \phi(a) \end{array}$$

Grâce au peigne de Dirac, l'échantillonnage d'un signal s de fréquence $1/T$, noté s_T , est alors simplement sa multiplication avec le peigne de Dirac.

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta_{nT}(t),$$

avec l'abus de notation $\delta_a(\cdot)$ comme « fonction ».

Cette formalisation donne une bonne vision de l'échantillonnage qui correspond au fait de prendre des points sur le graph du signal, voir figure 1.2.

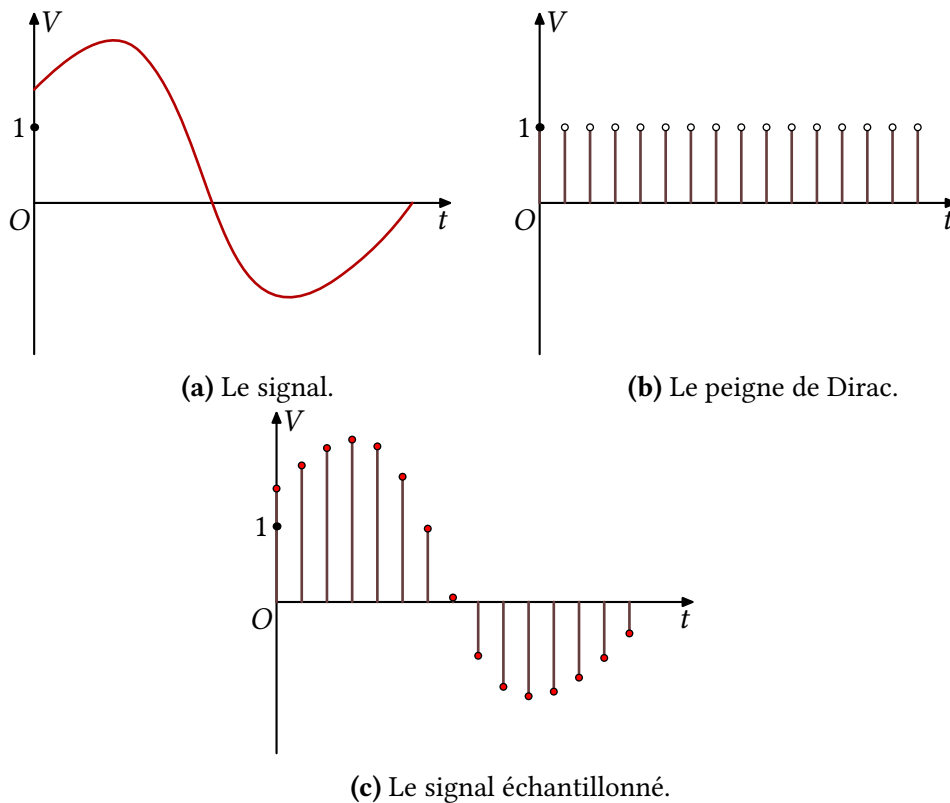


FIGURE 1.2 : Procédé d'échantillonnage d'un signal vu comme multiplication du signal avec un peigne de Dirac.

1.3.2 Phénomène de recouvrement de spectre

Si le support de la transformée de FOURIER du signal, ou encore le spectre du signal, est inclus dans l'intervalle $[-B, B]$, alors, une fréquence d'échantillonnage correcte est $f_e = 1/2B$, parfois appelée *fréquence de NYQUIST*. Mais que se passe-t-il lorsqu'on sous-échantillonne, c'est-à-dire, lorsque l'hypothèse faite sur le support n'est plus valide ?

Sans passer par l'analyse de FOURIER, on peut se convaincre qu'il faut une certaine fréquence d'échantillonnage $1/T$ pour être capable de reconstruire le signal, sans même le traiter. La figure 1.3 montre un signal sinusoïdale, un échantillonnage de celui-ci, et le signal sinusoïdale qu'on peut reconstruire à partir des échantillon.

Supposons donc que l'affirmation $\text{supp}(\hat{s}) \subset [-B, B]$ soit fautive. Après multiplication de \hat{s} par $\mathbf{1}_{[-B, B]}$, c'est-à-dire convolution par $h(t) = 2B \text{sinc}(2\pi Bt)$, on se

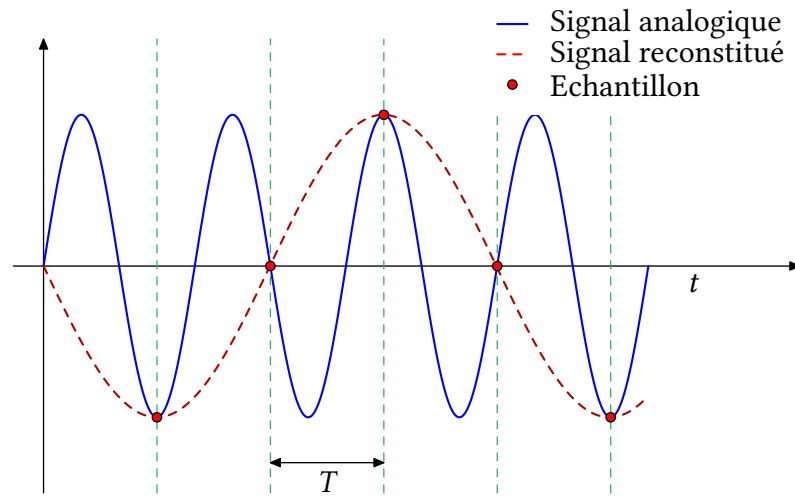


FIGURE 1.3 : Phénomène de sous-échantillonnage.

ramène au cadre précédent et on a :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}((2Bt - n)\pi).$$

Quelle est la transformée de FOURIER de ce signal ?

Proposition 5 : Soit s un signal stable et continu tel que la condition (1.3) soit satisfaite. Alors le signal :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}((2Bt - n)\pi),$$

admet la représentation :

$$\tilde{s}(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{\tilde{s}}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu,$$

avec :

$$\hat{\tilde{s}}(\nu) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{s}(\nu + 2jB) \right) \mathbf{1}_{[-B, B]}(\nu). \quad (1.7)$$

La démonstration de ce résultat s'obtient en reprenant ligne à ligne celle du théorème 1.5, voir la figure 1.4 pour une illustration de celui-ci.

En conséquence, on voit que les supports des fonctions dans la somme (1.7) vont se recouvrir sur les bords de l'intervalle $[-B, B]$, ce qui altérera le spectre du signal reconstitué et par conséquent, le signal lui-même. Ce phénomène est appelé *recouvrement du spectre* ou encore, en anglais, *aliasing*.

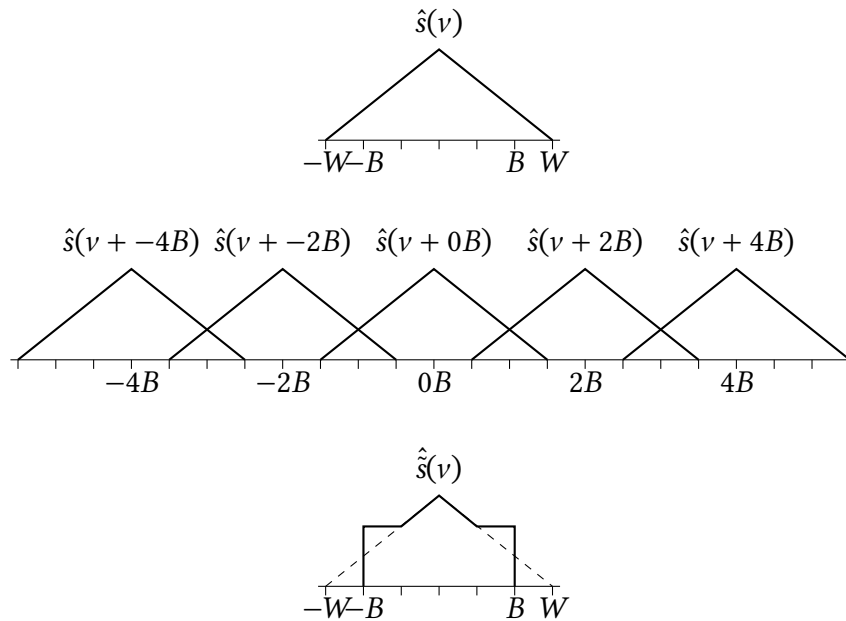


FIGURE 1.4 : Illustration du phénomène de recouvrement de spectre, phénomène connu sous le nom d'*aliasing*.

La conclusion pratique que l'on peut tirer de cette proposition est que, lorsque l'on souhaite discrétiser⁷ un signal, il faut tout d'abord en tronquer le spectre — à l'aide d'un filtre, voir les chapitres 5 et 6 — puis l'échantillonner à une fréquence au moins égale à celle de NYQUIST.

Un exemple simple est celui de la numérisation de signaux sonores. Les fréquences audibles pour un nourrisson vont de 20 Hz à 20 kHz. Pour concevoir le format de codage des CD audio, les ingénieurs ont choisi une fréquence d'échantillonnage de 44 kHz, c'est-à-dire à peu près le double de la fréquence maximale audible, ce qui correspond bien à la fréquence de NYQUIST. Les 4 kHz supplémentaires correspondent à des corrections d'erreurs qui seront présentées au chapitre 3. De même, l'échantillonnage des conversations téléphoniques se fait à la cadence de 8 kHz, qui est plus faible que celle des CD audio, car les spectres considérés sont beaucoup plus étroits et la qualité du rendu n'est plus un critère prédominant.

7. En utilisant un vocabulaire plus proche de celui des ingénieurs, on dirait "numériser".

1.3.3 Sur-échantillonnage

On peut maintenant se poser la question inverse. Quelles sont les conséquences d'un échantillonnage à une fréquence trop élevée ?

Nous allons voir que le sur-échantillonnage peut permettre d'accélérer la vitesse de convergence. En effet, on peut remarquer que dans la formule (1.6) la série obtenue converge très lentement, grosso-modo en $1/n$. En effet, la quantité $\text{sinc}(2Bt - n)$ est d'ordre $1/n$ et de signe alterné. Elle n'est donc pas satisfaisante d'un point de vue pratique.

Supposons que l'on sur-échantillonne un signal s : soit W tel que $\text{supp}(\hat{s}) \subset [-W, W]$, et choisissons la fréquence d'échantillonnage $1/2B$ telle que $B = (1 + \alpha)W$, pour un certain $\alpha > 0$.

Choisissons notre fonction de troncature T de telle sorte que :

$$\forall v \in [-W, W], \quad T(v) = 1,$$

et

$$\forall v \in \mathbf{R} - [-B, B], \quad T(v) = 0,$$

où nous ne disons rien entre sur $] - B, -W[$ et sur $]W, B[$.

Alors, le théorème de SHANNON-NYQUIST s'applique et en reproduisant la preuve, on obtient :

$$s(t) = \frac{1}{2B} \sum_{n \in \mathbf{Z}} s\left(\frac{n}{2B}\right) h\left(t - \frac{n}{2B}\right),$$

où la fonction h est la transformée inverse de T donnée par la formule (1.4). On met ainsi en évidence un nouveau degré de liberté : par un choix judicieux de h , i.e. de T sur $] - B, -W[$ et sur $]W, B[$, on peut accélérer la vitesse de convergence. Ceci se fait en particulier en augmentant la régularité de la fonction T .

1.4 Note bibliographique

Pour plus détails sur ce chapitre, avec le même cadre fonctionnel, on consultera les parties A et B de la référence [3]. Pour approfondir la théorie de la transformée de FOURIER, on pourra consulter [5]. Enfin, pour les résultats analogues dans le cadre de la théorie des distributions, on consultera [2, 10].