Maxime Chupin et Guillaume Legendre

CEREMADE — Université Paris-Dauphine

6 février 2024

π et son calcul numérique

Stage pour élèves de 3e

C'est quoi une méthode numérique ?

C'est quoi une méthode numérique ? (1)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un calculateur (ordinateur)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : algorithme
- En mathématiques, on est souvent confronté à l'infini : par exemple, il y a une infinité d'entiers
- Certaines méthodes ont besoin d'un nombre infini d'opérations pour fournir le résultat
- Un calculateur ne peut faire qu'un nombre fini d'opérations : la méthode fournit une approximation de la solution

C'est quoi une méthode numérique ? (2)

Quelques aspects du calcul numérique

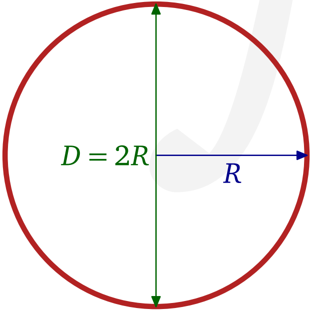
1. Comment calculer avec l'ordinateur ?
   → algorithmes, programmation (scratch, python), machine (cluster), etc.

2. Est-ce qu'on calcule vraiment ce qu'on souhaite calculer ?
   → existence, unicité, convergence, etc.

C’est quoi π ?

C'est quoi π ? (1)

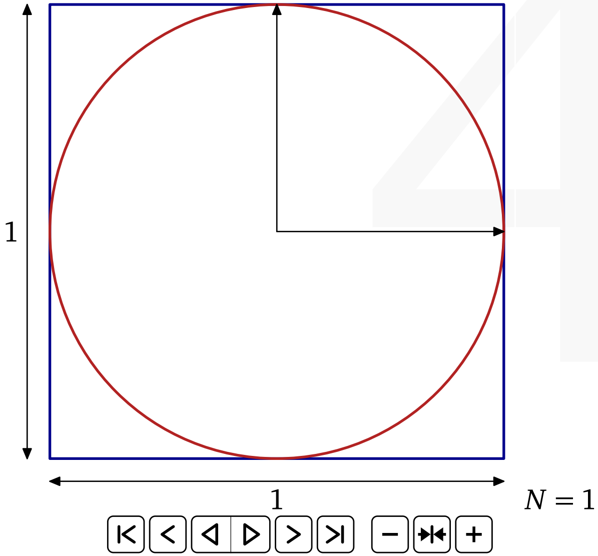
- Constante mathématique donnée par le quotient entre le périmètre d'un cercle et son diamètre
- Sert à calculer le périmètre ($2\pi R$) et son aire (πR^2)



C'est quoi π ? (2)

- Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique
- Nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)
- Sa représentation sous la forme d'un nombre à virgule possède une infinité de chiffres
- Nombreuses manières de calculer π avec une précision arbitraire, une des plus anciennes remontant à 250 avant J.-C.

π vaut-il 4 ?

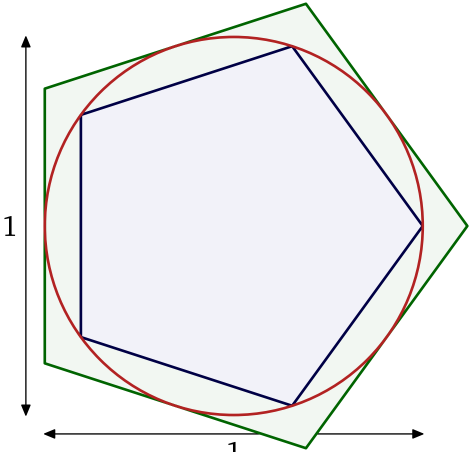

1
1
N = 1

Polygones d’Archimède

Polygones d'Archimède (1)

- En inscrivant le cercle dans un carré, la précédente méthode nous informe que $\pi < 4$
- Archimède a eu l'idée d'approcher le cercle par des polygones réguliers, respectivement *inscrits* et *circonscrits*

Polygones d'Archimède (2)



Polygones d'Archimède (3)

- Grâce à des formules permettant de calculer les périmètres de polygones inscrits et circonscrits au cercle, mais avec deux fois plus de côtés :

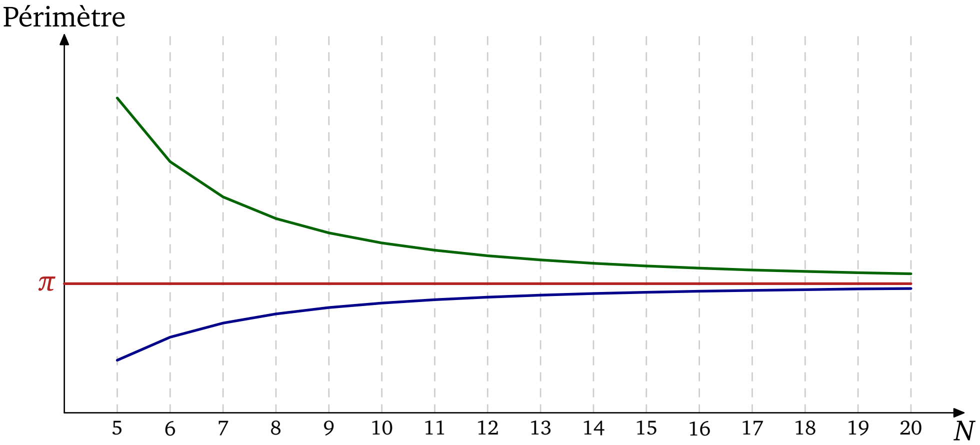
  $$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \text{ et } p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

  Il obtint l'encadrement :

  $$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

  en allant jusqu'à 96 côtés.
- Vers 1610, Ludolph van Ceulen parvint à calculer les 35 premières décimales de π par cette méthode, en considérant des polygones ayant des centaines de milliards de côtés

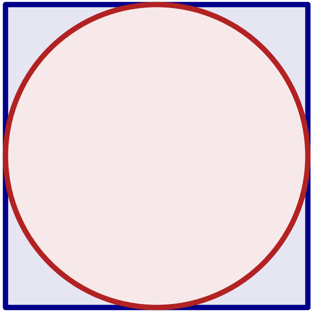
Polygones d'Archimède (4)



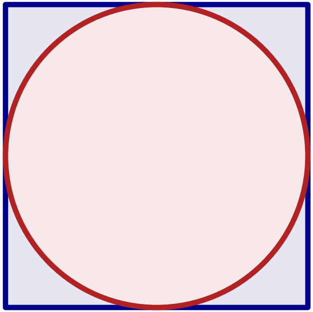
- Encadrements toujours plus précis de la valeur de π en augmentant progressivement le nombre de côtés des polygones

Un peu de hasard

Un cercle dans un carré

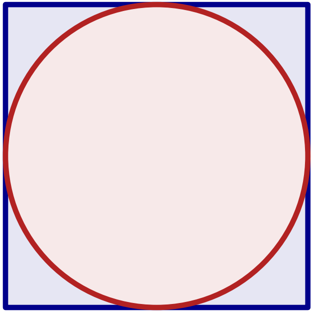


Un cercle dans un carré



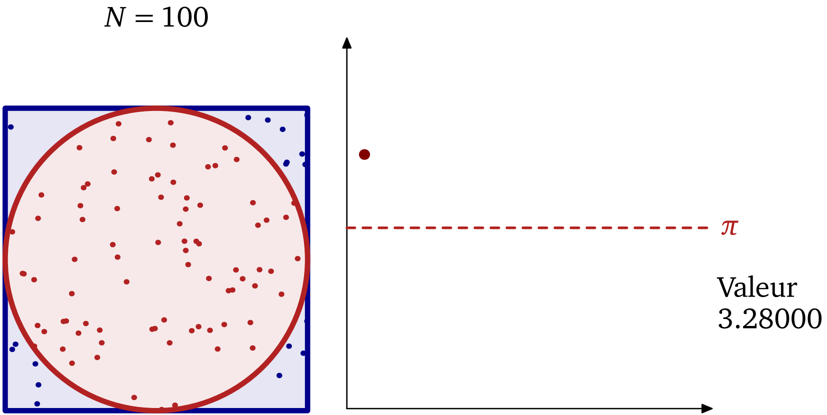
- Des probabilités : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré

Un cercle dans un carré



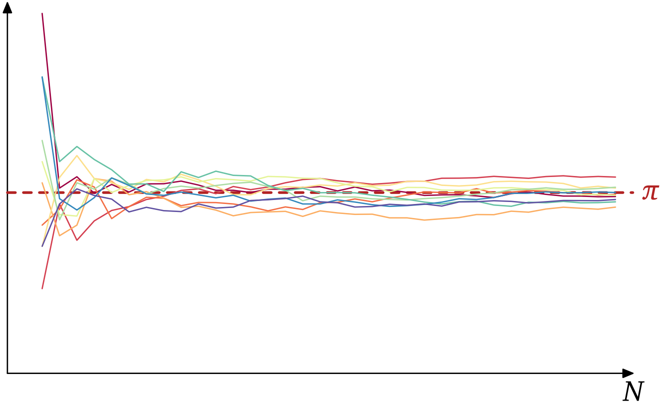
- Des probabilités : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré
- On compte alors ceux qui sont dans le cercle (et on multiplie par 4…)

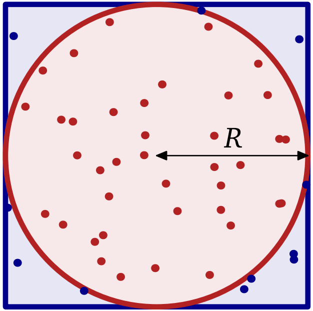
Évolution du résultat en fonction du nombre de tirages



De nombreuses expériences

- On réalise la même expérience plusieurs fois





Quand N devient très grand (*loi des grands nombres*) :

$$\text{Probabilité d'être dans le cercle} = \frac{\text{Aire cercle}}{\text{Aire carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour aller plus loin

Pour aller plus loin (1)

- Applications courantes, besoin de connaître π qu'avec une précision de quelques décimales ($3,141592653589793$)
- Le calcul de π est régulièrement utilisé pour tester de nouveaux super-ordinateurs (et aussi battre des records !)

Pour aller plus loin (2)

Connaissance de π

- Algorithmes très efficaces pour le calcul de *séries numériques*, c'est-à-dire le calcul de la somme du plus grand nombre possible de termes d'une somme *infinie*
  Par exemple, la série de Leibniz-Madhava-Gregory (1670) s'écrit

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right).$$

- Au cours des siècles, des séries à convergence plus rapide ont été découvertes, comme la formule des frères Chudnovsky pour l'inverse de π :

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}$$

Historique de la connaissance de π (1)

Avant l'ordinateur

-2500 avant J.-C. : $\frac{22}{7} \simeq 3.14$

-250 avant J.-C. : ARCHIMÈDE, Grèce, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

480 après J.-C. : ZU CHONGZHI, Chine, $\frac{355}{113} \simeq 3.141592$

Avant l'ordinateur, avec les séries

1120 : FIBONACCI, Italie, $\pi \simeq 3.141818$

1579 : François VIÈTE, France, calcul de $\frac{2}{\pi}$, 9 décimales

1853 : William SHANKS, Angleterre, passe 15 ans à calculer 707 décimales mais seules les 527 premières sont justes

Historique de la connaissance de π (2)

Avec l'ordinateur

1910 : RAMANUJAN, Inde, établit de nombreuses formules qui vont beaucoup servir par la suite (film *L'Homme qui défiait l'infini*, 2015)

1973 : Jean GUILLOUD et Martin BOUYER, France, en 23h20min, 1001250 décimales

Entre 1981 et 1989 : record plusieurs fois par an, entre le Japon et les États-Unis

Années 2000 : différents records en 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2016, 2019, 2020, 2021

2022 : Emma HARUKA IWAO, calcul de 158 jours, cent mille milliards (10^{14}) de décimales.

Un peu de poésie

Un peu de poésie

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

Maurice Decerf