

Maxime Chupin et Guillaume Legendre

CEREMADE — Université Paris-Dauphine

13 février 2025



et son calcul numérique

Stage pour élèves de 3^e



C'est quoi une méthode numérique?

- 1 C'est quoi une méthode numérique?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

C'est quoi une méthode numérique? (I)

- › Moyen de résoudre un problème mathématique avec un **calculateur** (**ordinateur**)

0011010110011001101011001
100110101100110011010
1100110011010110011

C'est quoi une méthode numérique? (I)

- › Moyen de résoudre un problème mathématique avec un **calculateur** (**ordinateur**)
- › Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : **algorithmes**

0011010110011001101011001
100110101100110011010
1100110011010110011

C'est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un **calculateur** (**ordinateur**)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : **algorithme**
- En mathématiques, on est souvent confronté à l'**infini** : par exemple, il y a une infinité d'entiers



C'est quoi une méthode numérique? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un **calculateur** (**ordinateur**)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : **algorithme**
- En mathématiques, on est souvent confronté à l'**infini** : par exemple, il y a une infinité d'entiers
- Certaines méthodes ont besoin d'un nombre **infini** d'opérations pour fournir le résultat

C'est quoi une méthode numérique ? (I)

- Moyen de résoudre un problème mathématique avec un **calculateur** (**ordinateur**)
- Opérations arithmétiques simples de manière répétitive : **algorithme**
- En mathématiques, on est souvent confronté à l'**infini** : par exemple, il y a une infinité d'entiers
- Certaines méthodes ont besoin d'un nombre **infini** d'opérations pour fournir le résultat
- Un calculateur ne peut faire qu'un nombre **fini** d'opérations : la méthode fournit une **approximation** de la solution

Quelques aspects du calcul numérique

- 1 Comment calculer avec l'ordinateur ?
→ **algorithmes**, programmation (scratch, python), machine (cluster), etc.



Quelques aspects du calcul numérique

- 1 Comment calculer avec l'ordinateur ?
→ **algorithmes**, programmation (scratch, python), machine (cluster), etc.
- 2 Est-ce qu'on calcule vraiment ce qu'on souhaite calculer ?
→ existence, unicité, **convergence**, etc.



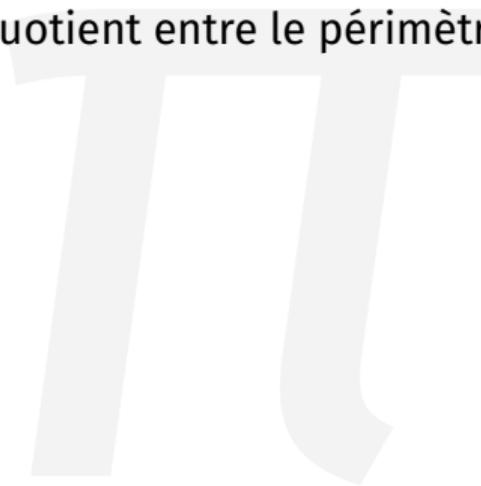


C'est quoi π ?

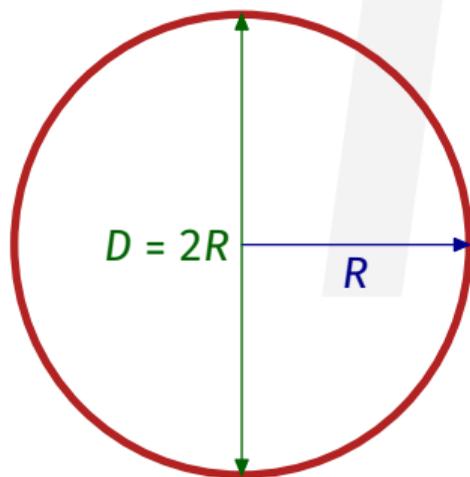
- 1 C'est quoi une méthode numérique ?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4 ?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

- **Constante mathématique** donnée par le quotient entre le périmètre d'un **cercle** et son diamètre



- › **Constante mathématique** donnée par le quotient entre le périmètre d'un **cercle** et son diamètre
- › Sert aussi à calculer son aire (πR^2)



- › Utilisé depuis des milliers d'années pour des applications pratiques



- Utilisé depuis des **milliers d'années** pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Utilisé depuis des **milliers d'années** pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Nombre **irrationnel**, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)

- Utilisé depuis des **milliers d'années** pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Nombre **irrationnel**, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)
- Sa représentation sous la forme d'un nombre à virgule possède une **infinité** de chiffres

- Utilisé depuis des **milliers d'années** pour des applications pratiques
- Intervient dans de nombreuses formules en mathématiques et en physique, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Nombre **irrationnel**, c'est-à-dire qu'il ne peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ (qui est une approximation de π)
- Sa représentation sous la forme d'un nombre à virgule possède une **infinité** de chiffres
- **Nombreuses manières** de calculer π avec une précision arbitraire, une des plus anciennes remontant à 250 avant J.-C.



π vaut-il 4?

- 1 C'est quoi une méthode numérique?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie



Polygones d'Archimède

- 1 C'est quoi une méthode numérique?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

- › En inscrivant le cercle dans un carré, la précédente méthode nous informe que $\pi < 4$

- Grâce à des formules permettant de calculer les périmètres de polygones inscrits et circonscrits au cercle, mais avec deux fois plus de côtés :

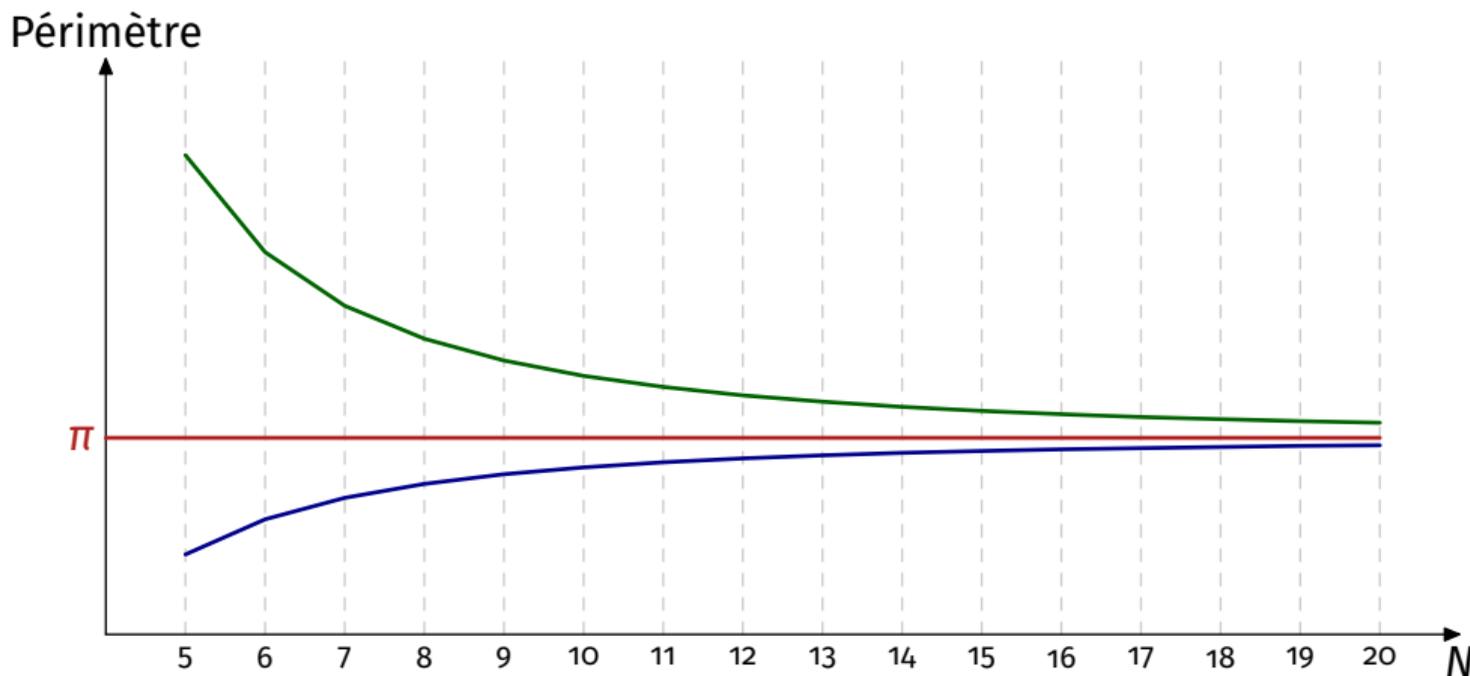
$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \text{ et } p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

Il obtint l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7},$$

en allant jusqu'à 96 côtés.

- Vers 1610, Ludolph VAN CEULEN parvint à calculer **les 35 premières décimales de π** par cette méthode, en considérant des polygones ayant des **centaines de milliards de côtés**



- Encadrements toujours plus précis de la valeur de π en **augmentant progressivement le nombre de côtés** des polygones

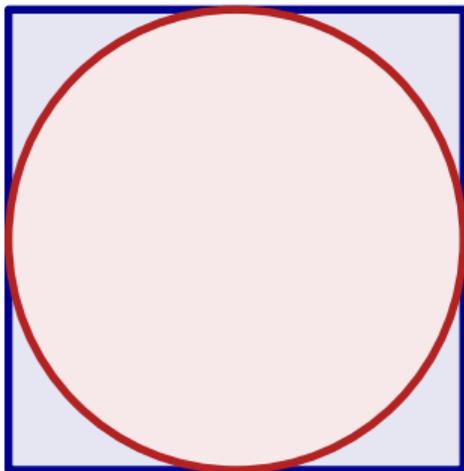


Un peu de hasard

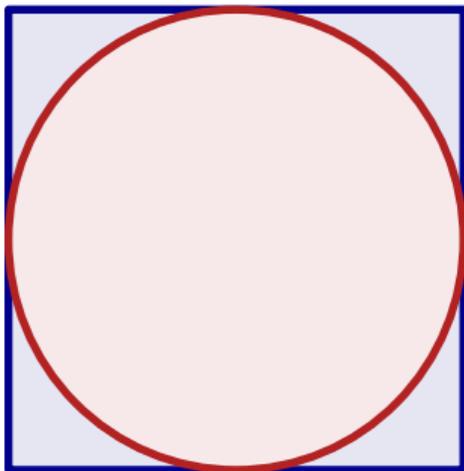
- 1 C'est quoi une méthode numérique ?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4 ?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

Un cercle dans un carré

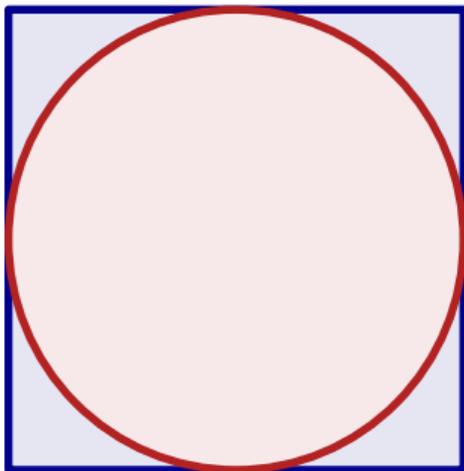


Un cercle dans un carré

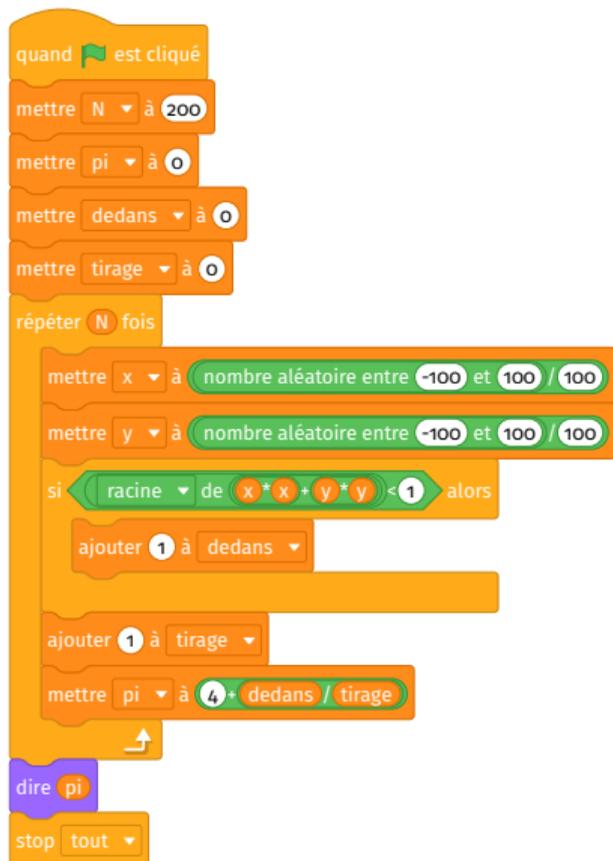


- Des **probabilités** : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré

Un cercle dans un carré



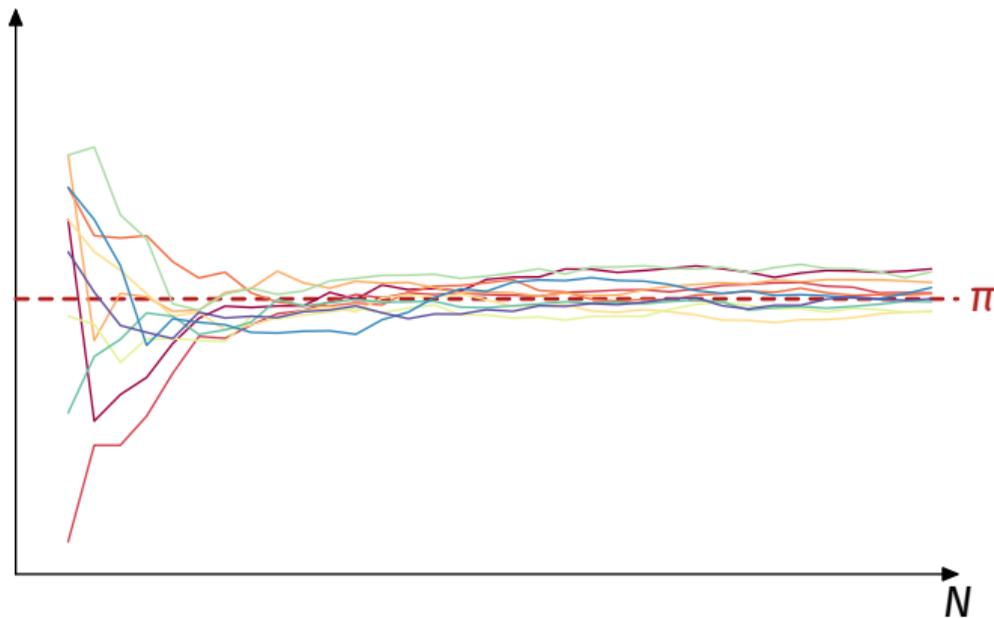
- Des **probabilités** : on jette des cailloux, sans viser, dans le carré
- On **compte** alors ceux qui sont **dans le cercle** (et on multiplie par 4...)

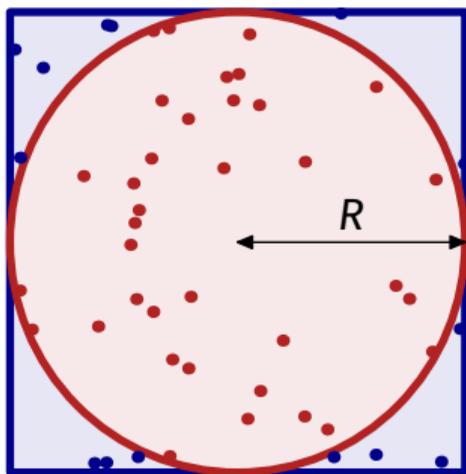


```
N = 200
pi = 0
dedans = 0
tirage = 0
for i in range(N):
    x = random.uniform(-1,1)
    y = random.uniform(-1,1)
    if x**2+y**2<1:
        dedans += 1
    tirage += 1
pi = 4*dedans/tirage
print(pi)
```

Évolution du résultat en fonction du nombre de tirages

- › On réalise la même expérience plusieurs fois





Quand N devient très grand (*loi des grands nombres*) :

$$\text{Probabilité d'être dans le cercle} = \frac{\text{Aire cercle}}{\text{Aire carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour aller plus loin

- 1 C'est quoi une méthode numérique ?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4 ?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

- Pour la plupart des applications courantes, on a besoin d'une précision de seulement quelques décimales (3, 141592653589793 suffit en général largement)

- › Pour la plupart des applications courantes, on a besoin d'une précision de seulement quelques décimales (3, 141592653589793 suffit en général largement)
- › Le calcul de π est en revanche utilisé pour **tester de nouveaux super-ordinateurs** et régulièrement battre des records!

D'autres algorithmes

- Pour calculer un grand nombre de décimales, on peut utiliser une **série numérique**, c'est-à-dire qu'on écrit le nombre π comme une somme **infinie**, en se servant du développement d'une fonction bien choisie.

Par exemple, **la série de Madhava–Gregory–Leibniz** (vers 1400, 1671 et 1673) s'écrit

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right).$$

Sa convergence est extrêmement **lente** (il faut sommer cinq milliards de termes pour obtenir les dix premières décimales).

D'autres algorithmes

- Pour calculer un grand nombre de décimales, on peut utiliser une **série numérique**, c'est-à-dire qu'on écrit le nombre π comme une somme **infinie**, en se servant du développement d'une fonction bien choisie.

Par exemple, la **série de Madhava–Gregory–Leibniz** (vers 1400, 1671 et 1673) s'écrit

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right).$$

Sa convergence est extrêmement **lente** (il faut sommer cinq milliards de termes pour obtenir les dix premières décimales).

- Une méthode voisine et préférable est donnée par la **formule de Machin** (1706)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5} \right)^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239} \right)^{2n+1}.$$

D'autres algorithmes

- › Méthode **très rapide** :
Brent-Salamin (1976)

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, p_0 = 1, t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n, t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

D'autres algorithmes

- Méthode **très rapide** :
Brent-Salamin (1976)

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, p_0 = 1, t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n, t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

- Approximation donnée par :

$$\pi_{n+1} = \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}} < \pi.$$

D'autres algorithmes

- Méthode **très rapide** :
Brent-Salamin (1976)

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, p_0 = 1, t_0 = \frac{1}{4}.$$

Répéter, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$p_{n+1} = 2p_n, t_{n+1} = t_n - p_n(a_{n+1} - a_n)^2.$$

- Approximation donnée par :

$$\pi_{n+1} = \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}} < \pi.$$

- Premières valeurs :

3,140
3,14159264
3.1415926535897932382
3.14159265358979323846264338327950288419711

Le nombre de décimales exactes *double* à chaque itération, mais l'exécution de cette méthode demande beaucoup de mémoire.

D'autres algorithmes

- Tous les records récents utilisent la **formule des frères Chudnovsky** (1988) pour l'inverse de π :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)! (n!)^3 (640320)^{3n+3/2}}$$

et une technique d'optimisation appelée **scindage binaire**, qui la rend peu coûteuse.

D'autres algorithmes

- Tous les records récents utilisent la **formule des frères Chudnovsky (1988)** pour l'inverse de π :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)! (n!)^3 (640320)^{3n+3/2}}$$

et une technique d'optimisation appelée **scindage binaire**, qui la rend peu coûteuse.

- Leur vérification se fait avec la **formule de Bailey–Borwein–Plouffe (1995)** ou **celle de Bellard (1997)**, qui permettent de calculer le k^{e} chiffre (en base 16) après la virgule du nombre π sans avoir à en calculer les précédents.

Historique de la connaissance de π (1)

Avant l'ordinateur

-2500 avant J.-C. : $\frac{22}{7} \approx 3.14$

-250 avant J.-C. : ARCHIMÈDE, Grèce, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

480 après J.-C. : ZU CHONGZHI, Chine, $\frac{355}{113} \approx 3.141592$

Avant l'ordinateur, avec les séries

1120 : FIBONACCI, Italie, $\pi \approx 3.141818$

1579 : François VIÈTE, France, calcul de $\frac{2}{\pi}$, 9 décimales

1853 : William SHANKS, Angleterre, passe 15 ans à calculer 707 décimales mais seules les 527 premières sont justes

Avec l'ordinateur

1910 : RAMANUJAN, Inde, établit de nombreuses formules qui vont beaucoup servir par la suite (film *L'Homme qui défait l'infini*, 2015)

1973 : Jean GUILLOUD et Martin BOUYER, France, en 23h20min, 1001250 décimales

Entre 1981 et 1989 : record plusieurs fois par an, entre le Japon et les États-Unis

Années 2000 : différents records en 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2016, 2019, 2020, 2021, 2022

2024 : Ranous, O'Brien et Beeler, en 104 jours, plus de deux cent deux mille milliards ($2,0211229 \times 10^{14}$) de décimales



Un peu de poésie

- 1 C'est quoi une méthode numérique?
- 2 C'est quoi π ?
- 3 π vaut-il 4?

- 4 Polygones d'Archimède
- 5 Un peu de hasard
- 6 Pour aller plus loin
- 7 Un peu de poésie

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages!

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingénieur,

8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur?

3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

4 3 3 8 3 2 7 9

Maurice Decerf