

# Une approche implicite pour la segmentation de surfaces et de contours fermés basée sur le maillage géodésique et l'équation de transport

## An implicit approach to closed surface and contour segmentation based on geodesic meshing and transport equation

F. Benmansour<sup>1</sup>

S. Bonneau<sup>1,2</sup>

L.D. Cohen<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CEREMADE

Universite Paris Dauphine, UMR CNRS 7534  
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny  
75775 Paris cedex 16, FRANCE

<sup>2</sup> Laboratoire Kastler Brossel

Ecole Normale Supérieure  
24, rue Lhomond  
75231 Paris cedex 05, FRANCE

benmansour@ceremade.dauphine.fr, bonneau@ceremade.dauphine.fr,  
cohen@ceremade.dauphine.fr

### Résumé

Nous présentons une nouvelle méthode de segmentation de surfaces ou de courbes fermées à partir d'un seul point. Nous nous sommes basé sur une variante du Fast Marching et sur une approche implicite qui résout une équation de transport. L'utilisateur choisi d'abord, un point initial sur la frontière désirée. Une approche par propagation de front permet ensuite de détecter de nouveaux points clés sur la frontière de l'objet. Le critère utilisé pour la détection des points clés est basé sur la longueur euclidienne de chemin. Etant donné que l'objet désiré a une frontière fermée, on utilise un critère approprié pour arrêter la détection des points clés et la propagation de front. Finalement, le domaine visité par le front correspond à une bande entourant l'objet étudié. En joignant les points clés adjacents avec des chemins minimaux, on arrive ainsi à extraire des courbes fermées en 2D ou des maillages géodésiques en trois dimensions. L'introduction d'une approche implicite qui résout une équation linéaire aux dérivées partielles, permet d'obtenir une surface complète contenant le maillage. Le niveau zéro de la solution de l'équation correspond à la segmentation finale. Nous avons appliqué cette méthode à des données 2D et 3D d'images synthétiques et réelles avec succès.

### Mots Clef

Algorithm du Fast Marching, Maillage géodésique, segmentation d'images, chemins minimaux, équation de transport

### Abstract

We present a new method for segmenting closed surfaces from a single point. Our work builds on a variant of the

Fast Marching algorithm and an implicit approach which solves a transport equation. First, an initial point on the desired boundary is chosen by the user. Next, new keypoints are detected automatically using a front propagation approach. Since the desired object has a closed boundary, a relevant criterion for stopping the keypoint detection and front propagation is used. The final domain visited by the front will yield a band surrounding the object of interest. Linking pairs of neighboring keypoints with minimal paths allows us to extract a network of minimal paths from a 3D image called Geodesic Meshing. To obtain a complete 3D surface that contains the meshing, we introduce an implicit approach that, through a linear partial differential equation, generates a function whose zero level set is the final segmentation. The proposed method has been successfully applied to 2D and 3D synthetic and real biological data.

### Keywords

Fast Marching algorithm, Geodesic Meshing, Image segmentation, Minimal paths, Transport Equation

## 1 Introduction

Les techniques de minimisation d'énergie ont été appliquées à une large variété de problèmes dans le traitement d'image et la vision par ordinateur. Depuis leur introduction, les contours actifs [9] ont été utilisées dans de nombreux travaux pour trouver les contours d'un objet dans une image. Un contour actif, ou un *snake*, est une courbe qui se déforme afin de minimiser une énergie combinant un terme interne qui lisse la courbe et un terme externe qui guide la courbe vers les objet d'intérêt dans l'image. Par exemple, le modèle des contours actifs géodésiques [3, 15] se base sur la minimisation d'une fonctionnelle géométrique qui dé-

forme une courbe initiale vers les géodésiques locales pour une métrique Riemannienne dérivée de l'image. Même si le modèle des contours actifs géodésiques présente des améliorations significatives par rapport au modèle original de Kass-Witin-Terzopoulos [9], il reste enclin au minima locaux, et donc dépendant de l'initialisation.

Pour éviter les minima locaux, les auteurs de [5] ont utilisé des chemins minimaux. L'avantage de cette méthode est de permettre d'éviter les minima locaux et de simplifier l'étape d'initialisation classique et fastidieuse des snakes en la remplaçant par la localisation des deux extrémités du contour recherché. Cette approche minimise globalement l'énergie du contour actif géodésique sous la forme  $\int_{\gamma} \tilde{\mathcal{P}}$ , où la fonctionnelle de coût prend de faibles valeurs le long de la courbe d'intérêt et  $\gamma$  est un chemin joignant les deux points. La solution du problème de minimisation est obtenu pas le calcul de la *carte d'action minimal* associée à un point source. La carte d'action minimale correspond au temps d'arrivée d'un front se propageant à partir du point source avec la vitesse  $(1/\tilde{\mathcal{P}})$ . Elle satisfait l'équation Eikonale. Ainsi, on peut calculer simultanément et efficacement la carte d'action minimal et la longueur euclidienne des chemins avec l'algorithme du Fast Marching comme cela sera détaillé dans la section 2.2.

Dans la partie 3, nous introduisons une nouvelle approche de propagation de front basée sur le *Fast Marching*, pour distribuer un ensemble de points clés sur une variété fermée de codimension 1, non connue a priori, à partir d'un seul point (ou plusieurs si on le souhaite) initialisé sur le contour. La détection des points clés est basée sur la longueur euclidienne de chemin. En effet, le front se propageant plus rapidement sur l'objet d'intérêt, le point du front qui atteint en premier une longueur euclidienne donnée  $\lambda$  est forcément localisé dans cette région (prenant de faibles valeurs de  $\tilde{\mathcal{P}}$ ). Ainsi ce point est un bon choix de point clé. Dès qu'un point clé est détecté, ce dernier est immédiatement défini comme nouvelle source de propagation et ainsi de suite. Pour éviter de déborder de l'objet d'intérêt, nous utilisons la connaissance a priori sur la topologie de l'objet pour arrêter la détection des points clés et la propagation du front. Le critère d'arrêt topologique est valable en deux dimensions et en trois dimensions. Dans la partie 4, nous expliquons comment on peut extraire une courbe fermée sur une image 2D ou un réseau de chemins minimaux, appelé *maillage géodésique*, en 3D. Dans la partie 5, on introduit une méthode implicite basée sur les travaux de Ardon *et al* [2]. On résout une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles en utilisant les résultats précédents. La solution de l'équation est une fonction telle que sa ligne de niveau zéro contient le maillage géodésique. Nous montrons les résultats sur des images synthétiques et naturelles en 2D et en 3D.

Ainsi, les contributions principales dans ce travail sont :

- (1) Introduction d'une nouvelle approche de propagation de front pour distribuer un ensemble de points clés à partir d'un seul ou de plusieurs points sources.

- (2) Définition d'un critère d'arrêt basé sur la topologie du front permettant d'arrêter la détection des points clés et de la propagation de front pour des variétés fermées de codimension 1.
- (3) Introduction d'une approche implicite permettant de compléter les surfaces fermées.

## 2 Quelques Rappels sur les chemins minimaux

### 2.1 Définitions

Étant donnée une image 2D  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  et deux points  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ , l'approche introduite par Cohen et Kimmel [5] consiste à construire un potentiel  $\mathcal{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$  prenant de faibles valeurs près des objets d'intérêt sur l'image  $I$ . Le choix du potentiel  $\mathcal{P}$  dépend du type d'image et de l'application souhaitée. Par exemple, on peut définir  $\mathcal{P}$  comme étant une fonction décroissante du gradient de l'image  $\|\nabla I\|$  pour extraire les bords des objets sur l'image en trouvant la courbe qui minimise globalement la fonctionnelle d'énergie

$$E(\gamma) = \int_{\gamma} \{ \mathcal{P}(\gamma(s)) + w \} ds = \int_{\gamma} \tilde{\mathcal{P}}(\gamma(s)) ds, \quad (1)$$

où  $\mathcal{A}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$  est l'ensemble de tout les chemins joignant le point  $\mathbf{p}_1$  au point  $\mathbf{p}_2$ ,  $s$  est le paramètre de longueur le long de la courbe,  $w > 0$  est un paramètre de régularisation et  $\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} + w)$ . Un chemin joignant  $\mathbf{p}_1$  à  $\mathbf{p}_2$  qui minimise globalement l'énergie (1) est un *chemin minimal* entre  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ , noté  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$ . La solution de ce problème de minimisation est obtenue par le calcul de la *carte d'action minimale*  $\mathcal{U}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  associée à la source  $\mathbf{p}_1$ . L'action minimale est l'énergie minimale intégrée le long d'un chemin entre  $\mathbf{p}_1$  et n'importe quel point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$  :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \mathcal{U}_1(\mathbf{x}) = \min_{\gamma \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{x}}} \left\{ \int_{\gamma} \tilde{\mathcal{P}}(\gamma(s)) ds \right\}. \quad (2)$$

Les valeurs de  $\mathcal{U}_1$  correspondent aux temps d'arrivée d'un front se propageant depuis la source  $\mathbf{p}_1$  avec la vitesse  $(1/\tilde{\mathcal{P}})$ .  $\mathcal{U}_1$  vérifie l'équation eikonale

$$\begin{cases} \|\nabla \mathcal{U}_1(\mathbf{x})\| &= \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{U}_1(\mathbf{p}_1) &= 0. \end{cases} \quad (3)$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  est l'unique minimum local de la carte  $\mathcal{U}_1$ , et les lignes de champs de cette dernière vérifient l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle (1). Ainsi, pour déterminer le chemin minimal  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$ , il suffit d'effectuer une descente de gradient sur  $\mathcal{U}_1$  du point  $\mathbf{p}_2$  à la source  $\mathbf{p}_1$  en résolvant l'équation différentielle ordinaire avec une méthode numérique standard comme celle de Heun ou de Runge-Kutta :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(s)}{ds} &= -\nabla \mathcal{U}_1(\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(s)), \\ \mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(0) &= \mathbf{p}_2. \end{cases} \quad (4)$$

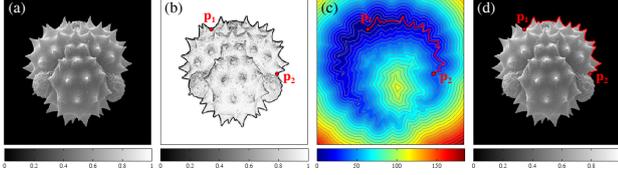


FIG. 1 – Extraction d'un contour ouvert à partir d'une image de microscopie électronique. (a) Image originale  $I$ . (b) Potentiel  $\mathcal{P} = (\|\nabla I\| + \varepsilon)^{-3}$ , où  $\varepsilon$  est une petite constante positive, et l'utilisateur donne en entrée les points  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ . (c) La carte d'action minimale  $\mathcal{U}_1$  et le chemin minimal  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$  entre  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ . (d) L'image  $I$  et le chemin minimal  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$ .

Nous allons étendre ces définitions au cas de plusieurs sources en introduisant d'autres définitions utiles dans la suite. Ces définitions sont valables en 2D et en 3D. La *carte d'action minimale* associée au potentiel  $\tilde{\mathcal{P}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$  et à l'ensemble des  $n$  sources  $\mathcal{S} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$  est la fonction  $\mathcal{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathcal{U}(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq j \leq n} \{\mathcal{U}_j(\mathbf{x})\},$$

$$\text{où } \mathcal{U}_j(\mathbf{x}) = \min_{\gamma \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}_j, \mathbf{x}}} \left\{ \int_{\gamma} \tilde{\mathcal{P}}(\gamma(s)) ds \right\}. \quad (5)$$

La fonctionnelle  $\mathcal{U}$  est une distance pondérée par rapport à l'ensemble des sources  $\mathcal{S}$ , et vérifie l'équation Eikonale :

$$\begin{cases} \|\nabla \mathcal{U}(\mathbf{x})\| = \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{U}(\mathbf{p}_j) = 0 & \text{pour } \mathbf{p}_j \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (6)$$

La *région de Voronoï* associée à la source  $\mathbf{p}_j \in \mathcal{S}$ , notée  $\mathcal{R}_j$ , est l'ensemble des points qui sont plus proches de  $\mathbf{p}_j$  dans le domaine  $\Omega$  (pour la distance pondérée). La région  $\mathcal{R}_j$  est un sous ensemble connexe du domaine  $\Omega$ , et sa frontière est notée  $\partial \mathcal{R}_j$ . Les régions de Voronoï forment une partition de l'ensemble  $\Omega$ . La carte de Voronoï est la fonction  $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \{1, \dots, n\}$  qui associe à un point l'indice de la région de Voronoï où il est contenu :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}_j, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = j. \quad (7)$$

Si deux régions de Voronoï  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$  sont adjacentes, alors le chemin minimal  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j}$  passe par le point de  $\partial \mathcal{R}_i \cap \partial \mathcal{R}_j$  ayant la plus petite valeur de l'action minimal. Ce point, noté  $\mathbf{m}_{i|j}$ , est un point milieu (pour la distance géodésique) du chemin minimal.

La *carte des distances euclidiennes* est la fonctionnelle  $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui associe à un point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$  la longueur euclidienne du chemin minimal entre le point  $\mathbf{x}$  et la source la plus proche (maintenant, dans le sens de la distance pondérée) :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}_j, \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{p}_j, \mathbf{x}}} ds. \quad (8)$$

Table 1 : Algorithme du Fast Marching pour résoudre l'équation (6).

---

- **Notations.**  
 $\mathcal{N}_M(\mathbf{x})$  est l'ensemble des  $M$  voisins de  $\mathbf{x}$  sur la grille, où  $M = 4$  en 2D et  $M = 6$  en 3D.
- **Initialisation.**  
 Pour tout point de la grille  $\mathbf{x}$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}) := +\infty$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}) := 0$  and  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) := +\infty$ .  
 étiqueter le point  $\mathbf{x}$  en tant que point *Far*.  
 Pour toute source  $\mathbf{p}_j \in \mathcal{S}$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{p}_j) := 0$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{p}_j) := j$  and  $\mathcal{L}(\mathbf{p}_j) := 0$ .  
 étiqueter  $\mathbf{p}_j$  en tant que *Trial*.
- **Boucle principale.**  
 Tant que l'ensemble des points *Trial* est non vide,  
 Trouver  $\mathbf{x}_{\min}$ , le point *Trial* ayant la plus petite valeur de  $\mathcal{U}$ .  
 étiqueter  $\mathbf{x}_{\min}$  en tant que *Alive*.  
 pour tout point de la grille  $\mathbf{x}_n \in \mathcal{N}_M(\mathbf{x}_{\min})$  n'étant pas *Alive*,  
 $\{u, v, \ell\} := \text{UpdateSchemeFMM}(\mathbf{x}_n, \mathcal{N}_M(\mathbf{x}_n))$ .  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_n) := u$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_n) := v$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{x}_n) := \ell$ .  
 si  $\mathbf{x}_n$  est *Far*, l'étiqueter en tant que *Trial*.

---

Remarquez que si  $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = 1$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , alors les fonctionnelles  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{L}$  sont identiques, et correspondent à la distance euclidienne par rapport à l'ensemble des points sources  $\mathcal{S}$ .

## 2.2 Méthode du Fast Marching

La *Méthode du Fast Marching* (FMM) est une méthode numérique introduite par Sethian dans [11, 12, 13] et Tsitsiklis dans [14] pour résoudre efficacement l'équation Eikonale isotrope sur une grille régulière. Dans l'équation (6), les valeurs de  $\mathcal{U}$  correspondent aux temps d'arrivée d'un front se propageant à partir des points de  $\mathcal{S}$  avec la vitesse  $(1/\tilde{\mathcal{P}})$ . L'idée centrale derrière le FMM repose sur un ordre consistant de parcours des points de la grille. Cet ordre est basé sur le fait que l'information se propage vers l'extérieur dans une seule direction. Ainsi, l'algorithme du Fast Marching résout en une seule passe l'équation Eikonale (6) et calcule les cartes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  simultanément (voir le tableau 1). Le FMM est une approche par propagation de front qui calcule les valeurs de  $\mathcal{U}$  dans l'ordre croissant. L'algorithme du FMM est similaire à l'algorithme de Dijkstra pour le calcul des plus courts chemins dans un graphe [8]. Au cours de l'algorithme, les points de la grille portent un label qui peut être *Alive* (points où  $\mathcal{U}$  est calculé et fixé), ou bien *Trial* (points où  $\mathcal{U}$  a été estimé mais pas encore fixé), ou bien *Far* (point où  $\mathcal{U}$  n'est pas encore calculé). L'ensemble des points *Trial* forme une interface entre les points de la grille où  $\mathcal{U}$  est fixé (points *Alive*) et les autres points (les points *Far*). Cette interface peut être vue comme l'ensemble des fronts se propageant à partir des points sources avec une vitesse inversement proportionnelle à  $\tilde{\mathcal{P}}$ . L'algorithme s'arrête lorsque tous les points de la grille sont visités, i.e ont l'étiquette *Alive* (voir Tableau 1). En utilisant une file de priorité pour trouver le point *Trial* ayant la plus petite valeur de  $\mathcal{U}$  (en ordonnant les points *Trial* dans une structure de Tas), on obtient une complexité de  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$  où  $N$  est le nombre des points de la grille.

Maintenant, nous présentons comment les valeurs de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$

et  $\mathcal{L}$  sont estimées pour une point de la grille  $\mathbf{x}_n$ , i.e les résultats de la routine `UpdateSchemeFMM`. Nous limitons ici au cas 2D, tant que l'extension au cas 3D est immédiate. En adoptant des notations standards on notera  $\mathcal{U}_{i,j}$  la valeur de  $\mathcal{U}$  au sommet  $(i, j)$  de la grille associé au point  $\mathbf{x}_n$  de coordonnées  $(ih_x, jh_y)$ , où  $h_x$  et  $h_y$  sont les pas de discrétisation de l'image selon  $x$  et  $y$ .

Pour estimer  $\mathcal{U}_{i,j}$ , on résout une version discrétisée de l'équation (6). Rouy et Tourin [10] ont démontré qu'une solution de viscosité pour  $\mathcal{U}_{i,j}$  est donnée par le schéma décentré amont :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\max\{\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i-1,j}, (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i+1,j}), 0\}}{h_x} \right)^2 \\ + & \left( \frac{\max\{\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j-1}, (\mathcal{U}_{i,j} - \mathcal{U}_{i,j+1}), 0\}}{h_y} \right)^2 = (\tilde{\mathcal{P}}_{i,j})^2 \end{aligned}$$

Pour calculer  $\mathcal{U}_{i,j}$ , on considère les quatre triangles construits autour du point  $(i, j)$ ,  $\{(i-1, j), (i, j), (i, j-1)\}$  par exemple. Dans chaque triangle, on résout l'équation (9) en utilisant seulement les valeurs des points *Alive*. La longueur euclidienne des chemins,  $\mathcal{L}_{i,j}$  est calculée de la même manière, dans le même triangle, en remplaçant  $\tilde{\mathcal{P}}$  par 1. L'indice de Voronoï donné est celui du voisin *Alive* ayant la plus petite valeur de l'action minimale.

Pour chacun des quatre triangles, on obtient un triplet  $\{u, v, \ell\}$ . Finalement, on choisit le triplet qui correspond à la plus petite valeur de  $u$ . Notons que le calcul de  $\nabla\mathcal{U}(\mathbf{x}_n)$  en utilisant le triangle qui a servi à l'estimation de  $\mathcal{U}_{i,j}$  donne une estimation consistante de  $\nabla\mathcal{U}$ . Le calcul de ce gradient est utile pour la résolution de l'équation de transport présentée ultérieurement.

### 3 Comment distribuer un ensemble de points clés sur une variété fermée

Soit  $\Omega$  un domaine 2D ou 3D. On suppose donné un ensemble de points sources  $\mathcal{S} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$  sur une variété fermée, le long de laquelle  $\tilde{\mathcal{P}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{++}$  prend de faibles valeurs. Notez que l'ensemble  $\mathcal{S}$  peut être réduit à un point.

On présente dans cette partie une variante du FMM, appelée *Méthode du Fast Marching avec Detection de Points Clés* (Fast Marching Method With keypoint Detection, FMMWKD, voir le tableau 2), qui propage des fronts à partir des sources avec la vitesse  $(1/\tilde{\mathcal{P}})$  et qui détecte séquentiellement, lors de la propagation des fronts, un ensemble de points clés  $\mathcal{S}^* = \{\mathbf{p}_{n+1}^*, \dots, \mathbf{p}_{n+m}^*\}$  sur la variété. Dès qu'un point clé est détecté, ce dernier est immédiatement défini comme nouvelle source de propagation. La détection des points clés est basée sur un critère de longueur euclidienne de chemin minimal. Ce critère dépend d'un seul paramètre, noté  $\lambda$ . La propagation de front et la détection de points clés sont arrêtées dès que le domaine visité par les fronts contient toute la variété.

Finalement, le domaine visité par les fronts, noté  $\Omega_F$ , correspond à une bande entourant l'objet d'intérêt. Le FMMWKD permet de calculer la carte d'action minimale  $\mathcal{U} : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^+$ , les indices de Voronoï  $\mathcal{V} : \Omega_F \rightarrow \{1, \dots, n+m\}$  et la carte des longueurs euclidiennes des chemins  $\mathcal{L} : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^+$  associés au potentiel  $\tilde{\mathcal{P}}$  et à l'ensemble des sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ .

#### Détection des points clés et correction locale des cartes $\mathcal{U}$ , $\mathcal{V}$ et $\mathcal{L}$ .

Initialement, les fronts se propagent à partir des points de  $\mathcal{S}$  jusqu'à ce qu'un point  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \geq \lambda$  soit étiqueté *Alive*. Ce point est défini comme le premier point clé, noté  $\mathbf{p}_{n+1}^*$  (voir Fig. 2).

Ce critère fut utilisé dans [6] pour trouver un chemin minimal de longueur donnée à partir d'un point. Supposons que le point  $\mathbf{p}_{n+1}^*$  appartient à la région de Voronoï  $\mathcal{R}_j$  au moment de sa détection. Ce critère assure que le chemin minimal  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{n+1}^*}$  minimise l'intégrale de  $\tilde{\mathcal{P}}$  par rapport à toutes les courbes ouvertes de longueur euclidienne supérieure ou égale à  $\lambda$  et de source dans  $\mathcal{S}$ . Par conséquent,  $\mathbf{p}_{n+1}^*$  est susceptible d'appartenir à la variété le long de laquelle les valeurs de  $\tilde{\mathcal{P}}$  sont faibles.

Une fois que le premier point clé a été détecté, ce dernier est considéré comme un nouvelle source de propagation. Il n'est pas nécessaire de relancer tout l'algorithme à partir de toute les sources. En effet, les valeurs de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  à proximité des éléments de  $\mathcal{S}$  au sens de la distance pondérée ont été estimées et ne changeront pas suite à l'introduction d'une nouvelle source. Ainsi, pour réduire le coût des calculs, on réinitialise  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  comme suit :

$$\mathcal{U}(\mathbf{p}_{n+1}^*) := 0, \quad \mathcal{V}(\mathbf{p}_{n+1}^*) := n+1, \quad \mathcal{L}(\mathbf{p}_{n+1}^*) := 0,$$

en étiquetant  $\mathbf{p}_{n+1}^*$  en tant que point *Trial*; et on continue la propagation. Cependant, si l'on n'apporte pas des modifications au FMM original, les valeurs finales de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  seront incorrecte pour les points fixés (étiquetés *Alive*) et proche de  $\mathbf{p}_{n+1}^*$  dans le sens de la distance pondérée. Ces erreurs sont seulement dues au fait que, dans le FMM original, les valeurs de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  sont fixées pour les points *Alive*. Une manière facile pour résoudre ce problème consiste à autoriser un point *Alive* à redevenir *Trial* s'il est plus proche de la nouvelle source. Cette astuce algorithmique nous permet de corriger localement  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  dans le voisinage de  $\mathbf{p}_{n+1}^*$ .

Ensuite, la propagation de front continue jusqu'à ce qu'un nouveau point  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) \geq \lambda$  soit étiqueté *Alive*. Ce point est le second point clé, noté  $\mathbf{p}_{n+2}^*$ , et est ajouté à l'ensemble des sources. Après, le front continue de se propager et ainsi de suite. Ainsi, pendant la propagation de front, les points clés sont séquentiellement détectés sur la variété le long de laquelle  $\tilde{\mathcal{P}}$  prend de faibles valeurs (voir Fig. 2).

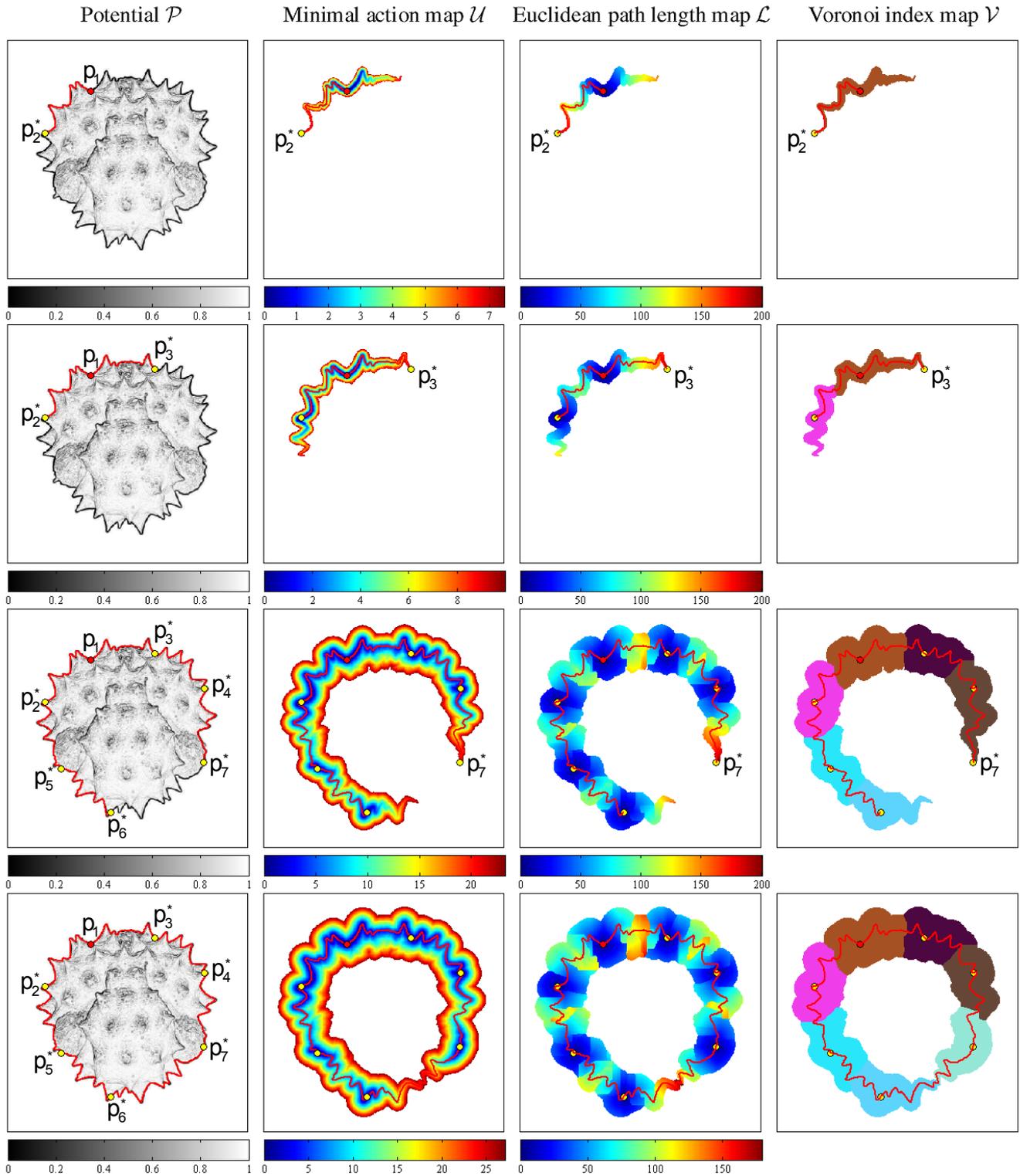


FIG. 2 – Résultats intermédiaires et final pour FMMWKD appliqué au potentiel 2D de la figure Figure 1b, avec  $S = \{\mathbf{p}_1\}$  et  $\lambda = 200$ . Sur la première, deuxième et troisième ligne on voit les résultats intermédiaires quand les points  $\mathbf{p}_2^*$  (premier point clé),  $\mathbf{p}_3^*$  (second point clé) et  $\mathbf{p}_7^*$  (dernier point clé) sont détectés. Le résultat final est sur la dernière ligne.

**Table 2 :** Fast Marching Method With keypoint Detection.

- **Notation.**  
 $\mathcal{N}_M(\mathbf{x})$  est l'ensemble des  $M$  voisins de  $\mathbf{x}$  sur la grille, où  $M = 4$  en 2D et  $M = 6$  en 3D.  $\mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x})$  est l'ensemble des  $M^+$  voisins d'un point  $\mathbf{x}$ , où  $M^+ = 8$  en 2D et  $M^+ = 26$  en 3D.
- **Initialisation.**  
 Pour tout point de la grille  $\mathbf{x}$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}) := +\infty$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}) := 0$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) := +\infty$ .  
 étiqueter  $\mathbf{x}$  en tant que point *Far*.  
 Pour toute source  $\mathbf{p}_j \in \mathcal{S}$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{p}_j) := 0$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{p}_j) := j$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{p}_j) := 0$ .  
 étiqueter  $\mathbf{p}_j$  en tant que *Trial* en tant que *Boundary*.  
 $m := 1$ , *StopDetection* := *FALSE*.
- **Boucle principale.**  
 Tant que l'ensemble des points *Trial* est non vide,  
 trouver  $\mathbf{x}_{\min}$ , le point *Trial* ayant la plus petite valeur de  $\mathcal{U}$ .  
 Si (*StopDetection* = *FALSE*) et ( $\mathcal{L}(\mathbf{x}_{\min}) \geq \lambda$ ),  
 ici,  $\mathbf{x}_{\min}$  est considéré comme une nouvelle source  $\mathbf{p}_{n+m}^*$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_{\min}) := 0$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_{\min}) := n + m$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{x}_{\min}) := 0$ .  
 $m := m + 1$ .  
 Sinon  
 étiqueter  $\mathbf{x}_{\min}$  en tant que *Alive*.  
 Pour tout point  $\mathbf{x}_n \in \mathcal{N}_M(\mathbf{x}_{\min})$ ,  
 Si  $\mathbf{x}_n$  n'est pas *Alive*,  
 $\{u, v, \ell\} := \text{UpdateSchemeFMM}(\mathbf{x}_n, \mathcal{N}_M(\mathbf{x}_n))$ .  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_n) := u$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_n) := v$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{x}_n) := \ell$ .  
 Si (*StopDetection* = *FALSE*) et ( $\mathbf{x}_n$  est *Far*),  
 étiqueter  $\mathbf{x}_n$  en tant que *Trial* et *Boundary*.  
 Sinon, si  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_n) \neq \mathcal{V}(\mathbf{x}_{\min})$ ,  
 $\{u, v, \ell\} := \text{UpdateSchemeFMM}(\mathbf{x}_n, \mathcal{N}_M(\mathbf{x}_n))$ .  
 Si  $u < \mathcal{U}(\mathbf{x}_n)$ ,  
 poser  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_n) := u$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_n) := v$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{x}_n) := \ell$ .  
 étiqueter  $\mathbf{x}_n$  en tant que *Trial*.  
 Si  $\mathbf{x}_{\min}$  est *Boundary*,  
 étiqueter  $\mathbf{x}_{\min}$  en tant que *Interior*.  
 Si *StopDetection* = *FALSE*,  
*StopDetection* :=  
 $\text{IsBoundarySplit}(\mathbf{x}_{\min}, \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min}))$ .

### Critère d'arrêt topologique.

Afin d'empêcher l'algorithme de distribuer des points clés sur tout le domaine  $\Omega$ , il est nécessaire d'arrêter l'algorithme dès que la variété fermée est contenue dans le domaine visité. Notez que même si la variété est inconnue à priori, on sait qu'elle est fermée. Cette information topologique est utilisée pour concevoir un critère approprié pour arrêter la détection de points clés et la propagation de front.

Une stratégie possible consiste à prendre en compte les partitions de Voronoï et d'arrêter l'algorithme dès que chaque région de Voronoï est adjacente à au moins deux autres régions. Cette stratégie est correcte mais limitée au cas 2D. Pour avoir un schéma valable en dimension supérieure (notamment en 3D), on choisit une autre stratégie pour le FMMWKD. Notons  $\Omega_F$  le domaine visité par les fronts, i.e les points ayant une étiquette différente de *Far* (étiquetés *Alive* ou *Trial*). Dans l'algorithme FMMWKD, la détection des points clés est stoppée dès que  $\Omega_F$  est délimité par exactement deux bords connexes.

L'ensemble  $\Omega_F$  peut être partitionné en deux sous-ensemble : l'ensemble des points intérieurs noté  $\text{int}(\Omega_F)$ , et l'ensemble des points du bord, noté  $\partial\Omega_F$ . Dans le Fast Marching Classique,  $\text{int}(\Omega_F)$  et  $\partial\Omega_F$  correspondent res-

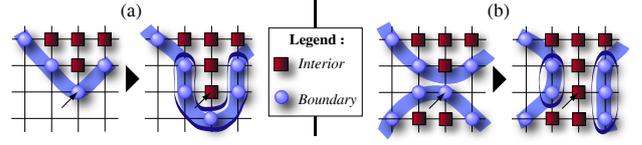


FIG. 3 – Test local appliqué au voisinage d'un point  $\mathbf{x}_{\min}$  (le point marqué par une flèche) pour détecter une collision de fronts. (a)  $\mathbf{x}_{\min}$  est un point simple  $\text{int}(\Omega_F)$  and  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})) = 1$ . (b) Choc de deux fronts au voisinage du point  $\mathbf{x}_{\min}$  et  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})) = 2$ .

pectivement aux ensembles des points *Alive* et des points *Trial*. Ceci n'est plus vrai pour le FMMWKD, du fait de la correction locale de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$ . C'est bien pour cela qu'un deuxième étiquetage binaire est introduit dans FMMWKD : en plus d'être étiqueté *Alive* ou *Trial*, un point non *Far* est aussi étiqueté *Interior* s'il appartient à  $\text{int}(\Omega_F)$  ou *Boundary* s'il appartient à  $\partial\Omega_F$ . Notons que l'itération à laquelle  $\text{int}(\Omega_F)$  devient une composante connexe délimitée par exactement deux bords connexes est aussi l'itération à laquelle le nombre de composantes connexes de  $\partial\Omega_F$  augmente pour la première fois. Il faut donc, juste surveiller les changements de la topologie de  $\partial\Omega_F$ .

Dans l'algorithme détaillé dans le tableau 2, le critère d'arrêt de détection de points clés est satisfait dès que *IsBoundarySplit* retourne *TRUE*. On appelle cette routine après que le point  $\mathbf{x}_{\min}$  ait été supprimé de l'ensemble des points *Trial* et ajouté à l'ensemble des points *Alive* et que ces  $M$  voisins aient été mis à jour (avec  $M = 4$  en 2D et  $M = 6$  en 3D). La routine *IsBoundarySplit* donne *TRUE* si les deux tests suivants sont satisfaits :

- **Test local pour une collision de fronts.**

On commence par vérifier s'il y a une collision de fronts à proximité du point  $\mathbf{x}_{\min}$ . Notons  $\mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})$  l'ensemble des  $M^+$  voisins de  $\mathbf{x}_{\min}$  (où  $M^+ = 8$  en 2D et  $M^+ = 26$  en 3D), et  $\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})$  l'ensemble des points de  $\mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})$  ayant l'étiquette *Boundary*. Le test local repose sur le dénombrement des composantes  $M^+$ -connexe de  $\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})$ , noté  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min}))$ . La majeure partie du temps,  $\mathbf{x}_{\min}$  est un point simple de  $\text{int}(\Omega_F)$ , et  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})) = 1$  (voir Fig. 3.pour un exemple en 2D). le test local est satisfait si  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})) > 1$ , i.e. quand il y a un choc entre deux fronts (voir Fig. 3.b).

- **Test global pour détecter un changement de la topologie de  $\partial\Omega_F$ .**

Si le nombre de composantes de  $\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}$  dépasse 1, on vérifie ensuite si les différentes composantes de  $\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}$  appartiennent à la même composante de  $\partial\Omega_F$ . Dans ce cas  $\partial\Omega_F$  n'a pas changé de topologie. Sinon, on en déduit qu'une composante de  $\partial\Omega_F$  s'est divisée en deux composantes connexes : le nombre de composante de  $\partial\Omega_F$  a alors augmenté et le critère d'arrêt topolo-

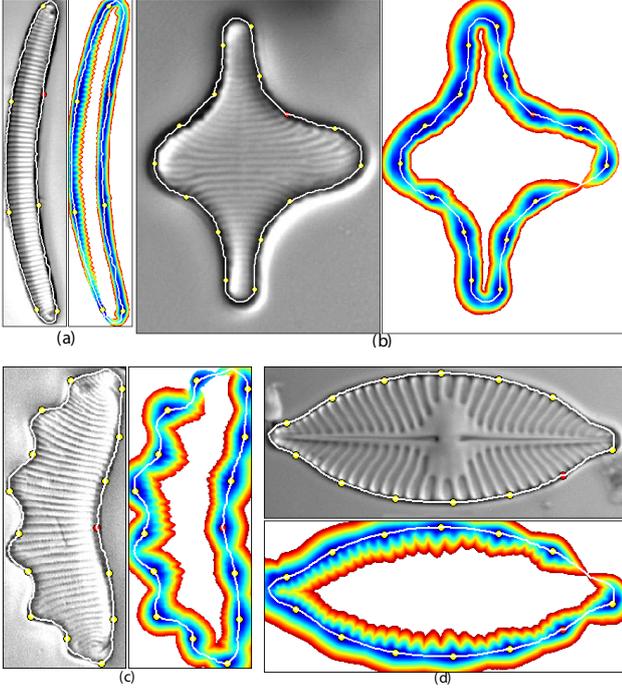


FIG. 4 – Extraction d’un contour fermé à partir d’images 2D. Potentiel  $\mathcal{P}$ , point source en rouge et points clés en jaune et chemins minimaux. (a) Image size  $101 \times 521$ ,  $\lambda = 180$ . (b)  $385 \times 532$ ,  $\lambda = 80$ . (c)  $153 \times 380$ ,  $\lambda = 60$ . (d)  $1032 \times 435$ ,  $\lambda = 160$ .

gique est vérifié.

Un tel test est facile à implémenter. En effet, considérons le cas où  $\#C(\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})) = 2$ . Soit  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux points tels que  $\mathbf{x}_1$  appartient à la première composante de  $\partial\Omega_F \cap \mathcal{N}_{M^+}(\mathbf{x}_{\min})$  et  $\mathbf{x}_2$  à la deuxième. Il faut seulement visiter tout les points de la grille appartenant à la même composante  $M^+$ -connexe de  $\partial\Omega_F$  que  $\mathbf{x}_1$ , en leurs assignant une étiquette temporaire. Ainsi, le test global est satisfait si  $\mathbf{x}_2$  n’a pas été étiqueté.

Comme le critère d’arrêt topologique commence par un test local, l’algorithme FMMWKD est beaucoup moins coûteux qu’une approche par test global où l’on dénombre les composantes simplement connexes de  $\text{int}(\Omega_F)$  et de  $\partial\Omega_F$  à chaque itération. Il est à noter aussi qu’un soin particulier est exigé pour traiter le cas où le front atteint le bord du domaine  $\Omega$ . Pour cela, on propose d’ajouter un bord virtuel au domaine  $\Omega$  sur lequel nous n’effectuons aucun calcul, mais un étiquetage évitant de créer des trous sur  $\partial\Omega_F$  lorsqu’un front atteint le bord.

Quand le critère d’arrêt topologique est satisfait, plus aucun point *Far* n’est ajouté à l’ensemble  $\Omega_F$ . On se contente de finir les corrections locales autour des points clés. Finalement, le domaine visité par le front  $\Omega_F$  est une bande entourant la variété.

L’algorithme FMMWKD (voir tableau 2) est valable en 2D et en 3D. Il suffit de bien choisir les indices de connectivité ( $M$  et  $M^+$ ) associés à la dimension. On obtient un en-

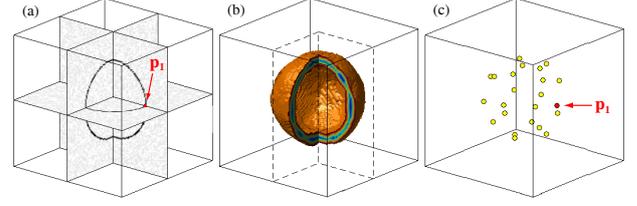


FIG. 5 – Distribution d’un ensemble de points sur une sphère, en appliquant FMMWKD sur une image 3D synthétique, avec  $\mathcal{S} = \{\mathbf{p}_1\}$ . (a) Potentiel  $\mathcal{P}$  bruité, prenant de faibles valeurs le long d’une sphère et le point source  $\mathbf{p}_1$ . (b) Vue en coupe du domaine  $\Omega_F$  montrant les valeurs de la carte d’action minimale  $\mathcal{U}$ . (c) Les points de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ .

semble de points  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  distribués sur la variété fermée (voir Fig. 5), mais aussi les cartes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{L}$  associées à l’ensemble des points sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ . Ces cartes sont définies sur le domaine  $\Omega_F$ , tel que  $\Omega_F$  est un sous ensemble de  $\Omega$  simplement connexe délimité par deux bords connexes (un bord intérieur et un bord extérieur). Sur la figure 4, des résultats de segmentation sur des images réelles, disponibles sur la base de données de ANSP Algae Image, Phycology Section, Patrick Center for Environmental Research, The Academy of Natural Sciences<sup>1</sup>. Les temps de calcul ne dépassent pas la seconde sur un ordinateur commercial.

## 4 Maillage géodésique d’une variété fermée

L’ensemble des sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ , la carte d’action minimale  $\mathcal{U}$  et la partition de Voronoï  $\mathcal{V}$  obtenus avec l’Algorithme 2 permettent finalement de construire un maillage géodésique décrivant la surface fermée le long de laquelle le potentiel  $\tilde{\mathcal{P}}$  est faible, ou de construire une séquence cyclique dans le cas 2D. On appelle ici *maillage géodésique* le réseau de courbes constitués des chemins minimaux reliant chaque source de l’ensemble  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  à ses plus proches voisins parmi les autres points de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ .

Pour déterminer la connexité du maillage, i.e. pour savoir quels points de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  doivent être reliés entre eux, il suffit de mettre à profit la partition de Voronoï  $\mathcal{V}$  : le point  $\mathbf{x}_1^*$  doit par exemple être relié à toutes les sources de l’ensemble  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  dont les régions de Voronoï sont adjacentes à  $\mathcal{V}_1$ , la région de Voronoï associée à  $\mathbf{x}_1^*$ . Ensuite, on cherche le point selle associé  $\mathbf{m}_{ij}$  comme décrit dans [4] pour effectuer une double descente de gradient. Le maillage géodésique est noté  $\mathcal{N}$ . Il permet de décrire entièrement une courbe fermée en 2D et partiellement une surface en 3D (voir les figures Fig. 6 et Fig. 7).

<sup>1</sup><http://diatom.acnatsci.org/AlgaeImage/>

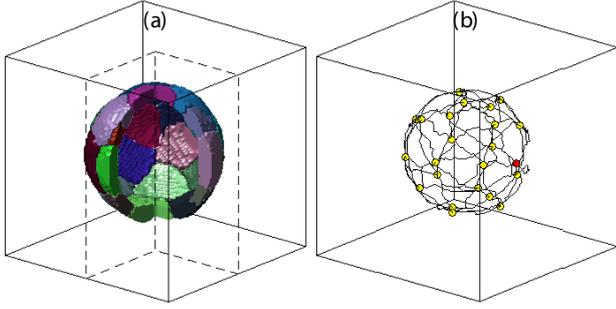


FIG. 6 – Maillage géodésique d’une sphère à partir d’un point  $\mathbf{p}_1$ . (a) Vue en coupe du domaine  $\Omega_F$  montrant les valeurs des indices de Voronoï  $\mathcal{V}$ . (b) Les points de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  et le maillage géodésique.

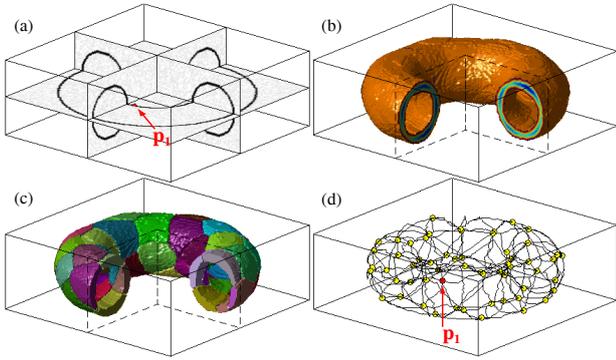


FIG. 7 – Maillage géodésique d’un tore à partir d’un potentiel synthétique bruité et un point de la surface  $\mathbf{p}_1$ . (a) Vue en coupe du domaine  $\Omega$  montrant le point source  $\mathbf{p}_1$  et les valeurs du potentiel  $\mathcal{P}$ . (b) Vue en coupe du domaine  $\Omega_F$  montrant les valeurs de la carte d’action minimale  $\mathcal{U}$ . (c) Vue en coupe du domaine  $\Omega_F$  montrant les valeurs des indices de Voronoï  $\mathcal{V}$ . (d) Les points de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  et le maillage géodésique.

## 5 Un modèle implicite basé sur l’équation de transport

### Travaux antérieurs

Comme vu précédemment, en utilisant l’algorithme du FMMWKD, on peut extraire un contour fermé sur une image 2D, mais seulement un maillage géodésique sur une image 3D, ce qui est insuffisant pour une description complète d’une surface. Néanmoins, une interpolation du réseau de chemins minimaux est possible en utilisant la méthode d’Ardon *et al* [1]. Une telle interpolation est uniquement basée sur le réseau de chemins et n’utilise pas l’information image. Or, en pratique les chemins du réseau  $\mathcal{N}$  peuvent prendre des raccourcis pour éviter les régions de fortes courbures.

Dans cette partie, on introduit une approche implicite basée sur les travaux de Ardon *et al* [2], où on résout la

même équation de transport mais dans un cadre complètement différent. L’objectif de leur méthode est de segmenter une surface s’appuyant sur deux courbes de contraintes, dessinées par l’utilisateur. La surface générée par leur méthode contient tous les chemins minimaux, guidés par un potentiel  $\tilde{\Psi}$ , joignant les courbes de contraintes. En effet, en résolvant une équation de transport stationnaire sous la forme  $\nabla \Psi \cdot \nabla \mathcal{U} + G(\Psi) = 0$ , où  $G$  est une fonction telle que  $G(0) = 0$ ,  $\mathcal{U}$  est la carte d’action minimale ayant pour source l’une des deux courbes de contraintes, et  $\Psi$  étant inconnue, ils ont démontré que tous les chemins minimaux joignant les courbes de contraintes sont inclus dans la surface de niveau zéro de la fonctionnelle  $\Psi$  : notée  $\Psi^{-1}(\{0\})$ . En pratique on prend  $G(\Psi) = \alpha \Psi$  où  $\alpha$  est une constante positive.

Dans ce qui suit, nous proposons d’utiliser, pour compléter la surface entre les chemins minimaux obtenus précédemment, la même équation de transport, mais de manière différente.

### Définition implicite d’une surface contenant le maillage géodésique

On reprend les notations de la section 1. Soit  $\mathcal{C}_{\mathbf{p}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*}$  un chemin minimal joignant un point  $\mathbf{p}$  à l’ensemble des sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ , et on suppose que  $J$  est son intervalle de paramétrisation. Le maillage géodésique, noté  $\mathcal{N}$ , est un sous ensemble de  $\Omega_F$ ,  $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$  implique que le point  $\mathbf{p}$  appartient à un chemin minimal reliant les points adjacents de  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ . On cherche une fonction  $\Psi$  définie sur  $\Omega_F$  telle que  $\mathcal{N} \subset \Psi^{-1}(\{0\})$ . On suppose que la fonction  $\Psi$  est continûment dérivable. Alors, pour tout point  $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ , on a  $\forall s \in J$ ,  $\Psi(\mathcal{C}_{\mathbf{p}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*}(s)) = 0$ . En dérivant par rapport à  $s$  on obtient  $\forall s \in J$ ,  $\nabla \Psi(\mathcal{C}_{\mathbf{p}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*}(s)) \cdot (d\mathcal{C}_{\mathbf{p}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*}/ds)(s) = 0$ . Utilisant l’équation (4) on déduit une condition nécessaire :  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{N}$ ,  $\nabla \Psi(\mathbf{p}) \cdot \nabla \mathcal{U}(\mathbf{p}) = 0$ , où  $\mathcal{U}$  est la carte d’action minimal relativement aux points sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ .

Ceci est une condition nécessaire vérifiée par la fonctionnelle  $\Psi$  sur l’ensemble  $\mathcal{N}$ . Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante satisfaite sur tout le domaine  $\Omega_F$ . En reprenant les résultats de [2], si la fonction  $\Psi$  vérifie l’équation :

$$\forall \mathbf{p} \in \Omega_F, \nabla \Psi(\mathbf{p}) \cdot \nabla \mathcal{U}(\mathbf{p}) + G \circ \Psi(\mathbf{p}) = 0, \quad (10)$$

si un point  $\mathbf{x}$  appartient à la surface de niveau zéro de  $\Psi$ , le chemin minimal menant de  $\mathbf{x}$  à l’ensemble des points sources  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$  est entièrement inclus dans  $\Psi^{-1}(\{0\})$ . D’après les résultats de la section 3, le domaine visité par FMMWKD, noté  $\Omega_F$ , est une bande entourant l’objet d’intérêt et est délimitée par deux bords simplement connexes, notés  $\partial \Omega_F^{\text{inner}}$  et  $\partial \Omega_F^{\text{outer}}$ . Il est ainsi naturel d’initialiser le transport à partir des parois intérieure et extérieure en utilisant des signes opposés car on ne s’intéresse qu’à la surface de niveau zéro. On cherche donc, une fonction  $\Psi$ , solution

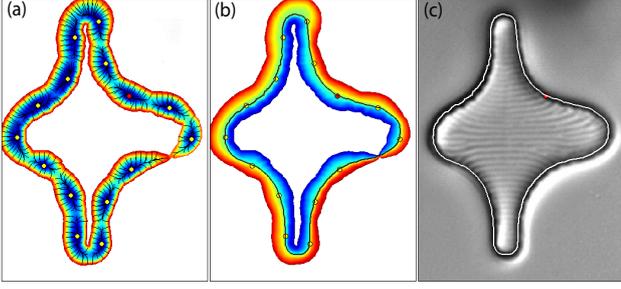


FIG. 8 – Un exemple de transport en 2D. (a) Carte d'action minimale et quelques chemins minimaux. (b) Fonction  $\Psi$  et sa ligne de niveau zéro. (c)  $\Psi^{-1}(\{0\})$  et le point source  $p_1$  sur l'image originale.

du problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla\Psi(p) \cdot \nabla\mathcal{U}(p) + G \circ \Psi(p) = 0 & \text{if } p \in \text{int}(\Omega_F), \\ \Psi(p) = \psi_{\text{inner}}(p) & \text{if } p \in \partial\Omega_F^{\text{inner}}, \\ \Psi(p) = \psi_{\text{outer}}(p) & \text{if } p \in \partial\Omega_F^{\text{outer}}, \end{cases} \quad (11)$$

où  $\psi_{\text{inner}}$  est une fonction positive définie sur  $\partial\Omega_F^{\text{inner}}$  et  $\psi_{\text{outer}}$  est une fonction négative définie sur  $\partial\Omega_F^{\text{outer}}$ . En pratique, on peut se contenter de fonctions constantes, l'essentiel est qu'elles aient des signes différents. L'équation (11) est une équation de transport stationnaire et linéaire. On choisit  $G \circ \Psi = \alpha\Psi$ , où  $\alpha$  est une constante positive. Avec ces choix,  $G \circ \Psi$  correspond à un terme d'absorption, qui fait en sorte que les valeurs de  $\Psi$  décroissent exponentiellement le long des chemins minimaux (voir [2] pour une démonstration détaillée). L'ajout du terme  $G \circ \Psi$  peut être vu comme une manière simple de régularisation de la solution sans avoir à introduire des dérivées d'ordre supérieur. La solution de l'équation (11) "transporte l'information" depuis les parois  $\Omega_F^{\text{inner}}$  et  $\Omega_F^{\text{outer}}$  le long des chemins minimaux. Pour résoudre l'équation (11) nous proposons un algorithme qui propage deux fronts portant des signes différents, à partir des deux parois jusqu'à ce que ces deux dernière "s'effondrent" sur la surface (ou le contour) d'intérêt (voir figure 8). En effet, le transport de l'information suit la direction sur laquelle l'information se propage, c'est-à-dire  $-\nabla\mathcal{U}$ . Or, pour un point donné  $p$ ,  $-\nabla\mathcal{U}(p)$  est dirigé vers la source la plus proche  $p$  dans le sens de la distance pondérée. De plus, la carte d'action minimale vérifie l'équation Eikonale  $\|\nabla\mathcal{U}\| = \tilde{P}$  et le potentiel  $\tilde{P}$  prend de faibles valeurs le long de la variété d'intérêt. On peut en conclure qu'un "choc" des signes de la fonction  $\Psi$  se produit sur l'objet.

Pour résoudre numériquement l'équation de transport, nous avons choisi un schéma décentré amont pour l'approximation du gradient  $\nabla\Psi$  qui suit la direction où l'information se propage, i.e  $-\nabla\mathcal{U}$ . Notre algorithme est basé sur le même principe du Fast Marching, donnant une approximation de la solution au premier ordre. Il parcourt le domaine  $\Omega_F$  en une seule passe et sa complexité est en

$N \log(N)$  (voir [2] pour plus de détail).

Sur la figure Fig.8 on peut voir une illustration sur une image 2D. Sur la gauche la carte d'action minimale et quelques chemins minimaux sur lesquels l'information est transportée ; au milieu, on peut voir la solution  $\Psi$  de l'équation (11) et sa ligne de niveau zéro ; à droite, l'image originale et la segmentation obtenue en moins d'une seconde à partir d'un seul point source (avec deux paramètres :  $\lambda$  et  $\alpha$ ). Il est intéressant de comparer les résultats de la méthode implicite (voir Fig.8) et de la méthode explicite (voir Fig.4) en notant que le raccourci observé près du point source (en rouge) n'apparaît pas avec la méthode implicite. Sur la figure Fig.9, on peut voir les fonctions transportées  $\Psi$  et leurs surfaces de niveau zéro. Pour les exemples synthétiques, nous avons superposé le maillage géodésique et  $\Psi^{-1}(\{0\})$ . Comme nous l'avons prédit, on voit que la segmentation finale est une très bonne complétion du maillage géodésique. Nous avons aussi testé notre algorithme sur une image volumétrique réelle d'une cellule, très bruitée, obtenue par microscopie électronique. Malgré la mauvaise qualité de l'image et les quelques trous qui apparaissent sur le potentiel décrivant la cellule, le résultat est satisfaisant. D'autant que celui-ci est obtenu par un simple clique en moins de 10 secondes.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle approche pour la segmentation d'un contour ou d'une surface fermée. Notre approche est basée sur l'algorithme du Fast Marching et sur une méthode implicite qui résout une équation de transport. Elle est quasi automatique. En effet, un seul point source et le paramètre de longueur euclidienne  $\lambda$  doivent être donné par l'utilisateur. L'algorithme FMMWKD est construit de telle façon que  $\lambda$  est une borne supérieure de  $\mathcal{L}$ . Dans un certain sens, le FMMWKD limite la propagation à un voisinage de l'objet, ce qui réduit significativement les temps de calcul ; la résolution de l'équation de transport n'étant effectuée que dans la bande limitée. Par conséquent, notre approche, rapide et interactive, ne souffre pas des problèmes de minima locaux comme la majorité des approches classiques basées sur la minimisation d'énergie.

## Références

- [1] R. Ardon and L. D. Cohen. Fast constrained surface extraction by minimal paths. *International Journal of Computer Vision*, **69** :127–136, 2006.
- [2] R. Ardon, L. D. Cohen, and A. Yezzi. Fast surface segmentation guided by user input implicit extension of minimal paths. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **25** :289–305, 2006.
- [3] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, **22** :61–79, 1997.

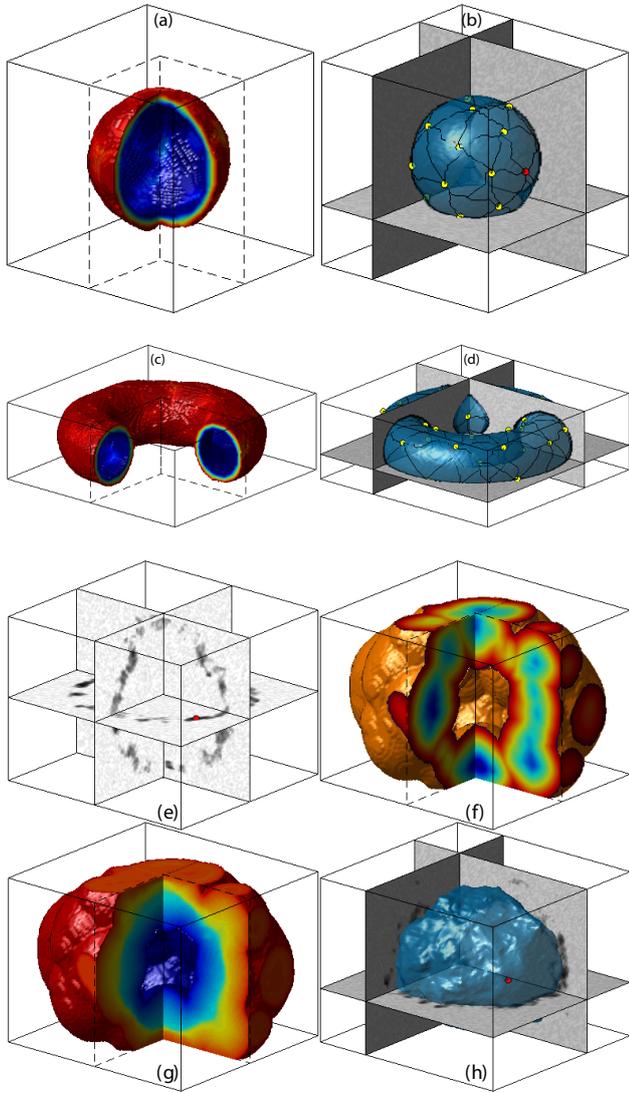


FIG. 9 – Résultats de la méthode implicite sur des image 3D. (a), (c) et (g) Vues en coupe, montrant les valeurs de la fonction  $\Psi$  sur  $\Omega_F$ . (b) et (d)  $\Psi^{-1}(\{0\})$ , l'ensemble des points clés  $S \cup S^*$  et le maillage géodésique. (e) Image originale de la cellule. (f) La carte d'action minimale  $\mathcal{U}$  sur  $\Omega_F$ . (h)  $\Psi^{-1}(\{0\})$  et le point source  $p_1$ .

- [4] L. D. Cohen. Multiple contour finding and perceptual grouping using minimal paths. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **14** :225–236, 2001.
- [5] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models : a minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, **24** :57–78, 1997.
- [6] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of minimal paths in 3D images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*, **5** :281–299, 2001.
- [7] T. Deschamps and L.D. Cohen. Fast extraction of tubular and tree 3d surfaces with front propagation methods. In *16th International Conference on Pattern Recognition, ICPR'02*, Quebec, Canada, August 2002.
- [8] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematic*, **1** :269–271, 1959.
- [9] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : active contour models. *International Journal of Computer Vision*, **1** :321–331, 1988.
- [10] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solution approach to shape from shading. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29** :867–884, 1992.
- [11] J. A. Sethian. A fast marching level set for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **93** :1591–1595, 1996.
- [12] J. A. Sethian. Fast marching methods. *SIAM Review*, **41** :199–235, 1999.
- [13] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [14] J. N. Tsitsiklis. Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40** :1528–1538, 1995.
- [15] A. Yezzi, S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, and A. Tannenbaum. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **16** :199–209, 1997.