

# Segmentation d'Images Vectorielles par Partitions de Voronoï Généralisées

## Vector-Valued Image Segmentation by Generalized Voronoi Tessellations

Pablo Andrés Arbeláez

Laurent D. Cohen

CEREMADE, UMR CNRS 7534 Université Paris Dauphine,  
Place du maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

arbelaez@ceremade.dauphine.fr

cohen@ceremade.dauphine.fr

### Résumé

*Nous étudions la segmentation de bas niveau pour les images vectorielles, en considérant particulièrement le cas des images couleur. L'approche proposée se fonde sur la formulation du problème en termes d'une partition de Voronoï généralisée du domaine de l'image. Dans ce contexte, segmenter une image revient à définir une pseudo-métrique appropriée et à choisir un ensemble de sources. Deux types de pseudo-métriques sont considérés ; le premier est issu de l'étude des chemins d'énergie minimale et le deuxième est associé aux familles de partitions emboîtées du domaine de l'image. Nous discutons des applications spécifiques de l'approche à trois problèmes liés à la segmentation des images couleur : la pré-segmentation, la détection des contours et la segmentation hiérarchique.*

### Mots Clef

Traitement d'images, modélisation des images, segmentation couleur, détection des contours, partition et diagramme de Voronoï, ultramétriques.

### Abstract

*We address the issue of low-level segmentation for vector-valued images, focusing on color images. The proposed approach relies on the formulation of the problem as a generalized Voronoi tessellation of the image domain. In this context, the issue is transferred to the definition of an appropriated pseudo-metric and the selection of a set of sources. Two types of pseudo-metrics are considered ; the first one is based on energy minimizing paths and the second is associated to the families of nested partitions of the image domain. We discuss specific applications of our approach to pre-segmentation, edge detection and hierarchical segmentation on color images.*

### Keywords

Image processing, image modeling, color segmentation, edge detection, Voronoi tessellation and diagram, ultrametrics.

## 1 Introduction

Dirichlet [13] et Voronoï [32] furent parmi les premiers à étudier et décrire précisément les partitions spatiales. Ils formalisèrent l'idée intuitive de diviser l'espace en considérant un ensemble de *sources* et en associant chaque point à la source la plus proche. Depuis son introduction, la *partition de Voronoï* a été appliquée dans un grand nombre de disciplines [2, 28]. Dans cet article, nous considérons une extension de cette notion aux espaces pseudo-métriques et nous étudions son application à la segmentation d'images vectorielles.

La segmentation d'images est un problème fondamental dans le domaine de la vision par ordinateur. Son immense complexité réside dans le fait que structurer l'information visuelle en régions "significatives" nécessite un niveau d'analyse sémantique du contenu de l'image. Néanmoins, une première tâche consiste à extraire l'information fournie par l'interaction des attributs de bas niveau de l'image. Le présent travail traite le problème de la segmentation à ce stade de la perception, souvent appelé *pré-cognitif*, pour les images vectorielles, en mettant l'accent sur les images couleur. Dans ce but, nous proposons une formulation du problème comme une *partition de Voronoï* généralisée du domaine de l'image.

Dans ce contexte, segmenter une image revient à définir une pseudo-métrique appropriée et à choisir un ensemble de points source. Au moyen de l'étude de deux types de pseudo-métriques, nous traitons des niveaux d'analyse différents du problème de la segmentation.

Le premier type de pseudo-métriques considéré est issu de l'étude des chemins d'énergie minimale. Les *partitions* correspondantes sont souvent utiles pour un niveau

local d'analyse de l'image. Nous proposons une pseudo-métrique de cette classe, appelée la *variation de chemin*, qui est une généralisation de la notion de variation totale aux fonctions vectorielles de plusieurs variables. L'application de cette pseudo-métrique fournit une reconstruction naturelle d'une image couleur où un compromis entre simplification et conservation du contenu est atteint.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'étude des ultramétriques. Ce type de pseudo-métriques s'avère utile pour un niveau global d'analyse, car leur définition équivaut à la construction d'une hiérarchie stratifiée de partitions de l'image. A partir de l'image pré-segmentée, nous définissons une ultramétrique qui exprime une notion de contraste global. Cette mesure de contraste est alors employée pour la modélisation des contours dans les images couleur. Notre approche garantit qu'un simple seuil dans l'image de contours obtenue fournit un ensemble de courbes fermées où les caractéristiques sémantiques des bords, telles les jonctions, sont préservées. Enfin, cette mesure de contraste est utilisée comme la base pour définir de nouvelles ultramétriques, plus adaptées à la segmentation hiérarchique car les attributs internes des régions sont aussi pris en compte.

Cet article est organisé comme suit. Dans la Section 2, le cadre mathématique de l'approche est décrit. La Section 3 présente les métriques de chemin. La Section 4 introduit une méthode de pré-segmentation basée sur la variation de chemin. Dans la Section 5, après avoir rappelé les notions de base de la géométrie ultramétrique, nous construisons une mesure de contraste pour les images couleur. La Section 6 présente notre modèle de contours pour les images couleur. La Section 7 s'intéresse à la segmentation hiérarchique. Enfin, la Section 8 contient la conclusion et les perspectives de ce travail.

## 2 Partitions de Voronoï Généralisées

### 2.1 Définitions

Dans ce paragraphe, le cadre mathématique de l'article est établi et les notations sont introduites.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine connexe compact dans le plan. Une **pseudo-métrique** sur  $\Omega$  est une application  $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui satisfait, pour tout  $x, y, z \in \Omega$ , les conditions suivantes :

1. *Réflexivité* :  $\psi(x, x) = 0$ .
2. *Symétrie* :  $\psi(x, y) = \psi(y, x)$ .
3. *Inégalité Triangulaire* :  $\psi(x, y) \leq \psi(x, z) + \psi(z, y)$ .

Une première remarque est que la seule différence entre cette définition et celle d'une métrique est que l'axiome de *Séparation* habituel a été remplacé par la condition 1, qui est plus faible. En conséquence, on considère les classes d'équivalence  $\hat{x}(\psi) = \{y \in \Omega \mid \psi(x, y) = 0\}$  et on travaille directement sur l'espace quotient  $\hat{\Omega}(\psi) = \{\hat{x}(\psi) \mid x \in \Omega\}$ . Ainsi, la projection de  $\psi$  dans  $\hat{\Omega}(\psi)$ , est, par définition, une métrique pour l'espace quotient. Dans

le cas où  $\psi$  est déjà une métrique, alors  $\hat{\Omega}(\psi)$  coïncide avec le domaine. Dans la suite, la valeur de  $\psi(x, y)$  sera simplement appelée la *distance* entre  $x$  et  $y$ . Les pseudo-métriques sont parfois appelées *écarts finis*.

L'*énergie* induite par une pseudo-métrique  $\psi$ , par rapport à un point source  $s \in \Omega$ , est définie comme l'application d'une seule variable  $\psi_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui mesure la distance à  $s$  :

$$\psi_s(x) = \psi(s, x), \forall x \in \Omega.$$

L'*énergie* par rapport à un ensemble de sources  $S = \{s_i\}_{i \in J}$  est donnée par le minimum des *énergies* individuelles :

$$\psi_S(x) = \inf_{s_i \in S} \psi_{s_i}(x), \forall x \in \Omega.$$

En présence de plusieurs sources, une information importante est fournie par la *zone d'influence*, ou brièvement la *zone*, de chaque source  $s_i \in S$ , définie comme l'ensemble des points qui se trouvent plus près de  $s_i$ , au sens de  $\psi$ , que de toute autre source :

$$Z_i = \{x \in \Omega \mid \psi_{s_i}(x) < \psi_{s_j}(x), \forall s_j \in S, j \neq i\}.$$

Dans la suite, on suppose l'existence de géodésiques pour  $\psi$ . Ceci implique que chaque *zone d'influence* est un sous-ensemble connexe du domaine.

L'union des *zones* est notée par :

$$Z(\psi, S) = \bigcup_{i \in J} Z_i.$$

Le complémentaire de  $Z(\psi, S)$  est nommé l'*ensemble médian* et sera noté par  $M(\psi, S)$ .

Ainsi, une pseudo-métrique  $\psi$  et un ensemble de sources  $S$  déterminent une tessellation du domaine  $\Omega$ , qui sera appelée dans la suite une *partition de Voronoï*, ou simplement une *partition*, et sera notée par :

$$\Pi(\psi, S) = \{Z_i\}_{i \in J} \cup \{M(\psi, S)\}.$$

Chaque élément de la *partition de Voronoï* est donc une union d'éléments de l'espace quotient  $\hat{\Omega}(\psi)$ .

La Figure 1 illustre ces définitions avec l'exemple canonique de la distance euclidienne et un ensemble de quatre sources,  $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ . À gauche, on peut observer l'*énergie* euclidienne et, à droite, la *partition* et les sources. Puisque, dans ce cas,  $\psi$  est une métrique, l'espace quotient  $\hat{\Omega}(\psi)$  coïncide avec le domaine. De plus, l'*ensemble médian*  $M(\psi, S)$  (en noir) correspond au diagramme de Voronoï classique. Enfin, les *zones*,  $Z(\psi, S)$ , sont dans ce cas des ensembles convexes.

Deux différences entre notre approche et le cadre standard des *partitions de Voronoï* [2, 28] méritent néanmoins d'être soulignées. D'abord, le fait de considérer des pseudo-métriques permet l'accès à une classe plus large d'applications. Ensuite, puisqu'on est intéressé par l'application de cette notion à l'analyse d'images, les pseudo-métriques qui seront définies dépendront toujours des données de l'image.

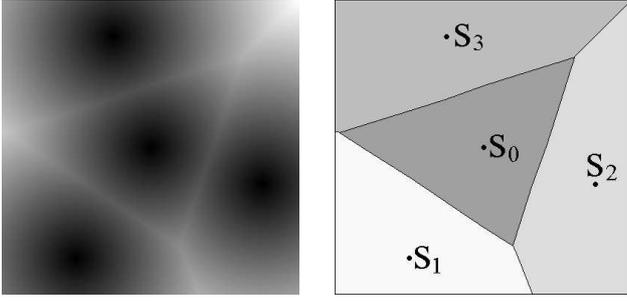


FIG. 1 – Énergie euclidienne et partition de Voronoï.

## 2.2 Segmentation d’Images Numériques

Dans le cadre des *partitions de Voronoï*, le problème de la segmentation peut s’exprimer en termes de la définition d’une pseudo-métrique et de la sélection d’un ensemble de sources. Cependant, en pratique, les images numériques sont sous-échantillonnées dans la grille discrète. En conséquence, des parties importantes de l’*ensemble médian* se trouvent souvent en dehors de la grille. Puisqu’on s’intéresse à la segmentation en régions, une alternative pour contourner ce problème est de considérer une *partition* composée uniquement par des *zones*. Ainsi, les éléments de l’*ensemble médian* qui seraient placés exactement sur la grille sont associés à une de leurs *zones* voisines.

Une fois la *partition de Voronoï* créée, une reconstruction de l’image originale peut être définie en choisissant un modèle pour représenter chaque *zone d’influence*. Le modèle est déterminé par la distribution des valeurs de l’image dans la *zone* et, lorsqu’il est constant, l’évaluation de chaque *zone* produit une reconstruction de l’image constante par morceaux qui sera appelée dans la suite une *image mosaïque*.

Un autre problème pratique qui se pose naturellement pour la segmentation d’images couleur dans ce cadre est la définition d’une distance dans l’espace des couleurs. A cet égard, les standards  $L^*ab$  et  $L^*uv$  de la Commission Internationale de l’Éclairage (CIE) [33] ont été adoptés dans ce travail. Ces représentations de la couleur fournissent des approximations de l’espace des couleurs perceptuellement uniforme. Bien qu’imparfaites, elles possèdent deux avantages principaux par rapport au système usuel RVB : d’abord, une séparation de l’information couleur en un canal de luminosité et deux canaux chromatiques ; ensuite, l’approximation de la métrique Riemannienne de l’espace des couleurs par la distance euclidienne.

## 3 Métriques de Chemin

Une première approche pour la définition d’une pseudo-métrique dans le domaine de l’image est l’étude des chemins entre couples de points.

Un **chemin** entre deux points  $x, y \in \Omega$  est une fonction continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  telle que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ . L’image de  $\gamma$  est donc un arc dans  $\Omega$ . L’ensemble des chemins entre  $x$  et  $y$  est noté par  $\Gamma_{xy}$  et l’ensemble des

chemins du domaine par  $\Gamma_\Omega$ .

Une **structure de longueur** pour  $\Omega$  [17] est une application  $e : \Gamma_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui satisfait les conditions suivantes :

1. Si  $\gamma$  est constant, alors  $e(\gamma) = 0$ .
2. Si  $\gamma$  est la concaténation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , alors  $e(\gamma) = e(\gamma_1) + e(\gamma_2)$ .
3.  $e$  est invariante par changements de paramètre.

Une structure de longueur  $e$  peut être employée pour définir une pseudo-métrique, qui sera appelée la **métrique de chemin** associée à  $e$ , en considérant la valeur minimale de  $e$  sur tous les chemins qui relient deux points du domaine :

$$\psi(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} e(\gamma), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Un type de *métriques de chemin* particulièrement important se présente lorsque  $e$  peut s’exprimer comme l’intégrale d’une **fonction de potentiel**  $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  :

$$e(\gamma) = \int_0^L P(\gamma(l)) dl,$$

où  $l$  désigne l’abscisse curviligne et  $L$  la longueur euclidienne du chemin. Dans ce cas,  $\hat{x}(\psi)$ , la classe d’équivalence d’un point  $x$ , correspond à l’ensemble connexe maximal à potentiel nul qui contient  $x$ . Ainsi, si le potentiel est strictement positif, l’espace quotient  $\hat{\Omega}(\psi)$  coïncide avec le domaine. Ces métriques sont souvent appelées des **distances pondérées**. De plus, la relation entre l’énergie et le potentiel est donnée dans ce cas par l’*Équation Eikonale* [7].

En analyse d’images, l’utilisation des distances pondérées passe par la définition d’un potentiel approprié, à partir des données de l’image, pour traiter un problème particulier. Parmi leurs principales applications se trouvent le *shape from shading* [19], la morphologie mathématique continue [20, 23] et le regroupement perceptuel [9].

Dans les applications des distances pondérées aux problèmes liés à la segmentation, tels l’extraction des formes [22, 10] et les modèles de contours actifs [7], le potentiel est souvent défini en fonction de la norme du gradient de l’image. Cependant, la régularité de l’image n’est pas une condition nécessaire pour le cadre développé dans ce travail. La section suivante présente une *métrique de chemin* naturellement adaptée aux fonctions non différentiables.

## 4 La Variation de Chemin

Dans cette section, on étudie l’application de la *métrique de chemin* obtenue en considérant la variation sur les chemins en tant que structure de longueur.

### 4.1 Définitions

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $(X, d)$  un espace métrique. Considérons une fonction  $f : [a, b] \rightarrow X$ ,  $\sigma = \{t_0, \dots, t_n\}$  une subdivision finie de  $[a, b]$ , telle que  $a = t_0 < t_1 <$

... <  $t_n = b$  et notons par  $\Phi$  l'ensemble de ces subdivisions. La **variation** de  $f$  est donnée par la formule :

$$v(f) = \sup_{\sigma \in \Phi} \sum_{i=1}^n d(f(t_i), f(t_{i-1})).$$

Notons que la variation vérifie les conditions requises pour être une structure de longueur. De plus, si  $X = \mathbb{R}$ , alors  $v(f)$  correspond à la variation totale de  $f$ , la fonctionnelle usuelle introduite par Jordan [18].

Ainsi, dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on peut considérer la *métrique de chemin* associée à la *variation*, c'est à dire, la *variation* minimale de la fonction sur tous les chemins qui relient deux points :

La **variation de chemin** d'une fonction  $u : \Omega \rightarrow X$  est définie par la formule :

$$V^u(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} v(u \circ \gamma), \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (1)$$

Il faut remarquer que, en contraste avec la notion usuelle de variation totale pour les fonctions de plusieurs variables [29], la *variation de chemin* est définie pour chaque point. La **composante** de  $u$  qui contient  $x$  est définie comme le sous ensemble connexe maximal de points  $y \in \Omega$  tels que  $u(y) = u(x)$ . Par définition, la composante qui contient  $x$  coïncide avec la classe d'équivalence  $\hat{x}(V^u)$ . Ainsi, l'espace quotient  $\hat{\Omega}(V^u)$  est l'ensemble des composantes de la fonction. De plus, pour un ensemble de sources  $S$ , chaque élément de la *partition*  $\Pi(V^u, S)$  est une union de composantes de  $u$ . Donc, la partition du domaine en composantes est un raffinement de  $\Pi(V^u, S)$  et l'opérateur qui associe  $\Pi(V^u, S)$  à la fonction  $u$  est connexe [30]. En conséquence, les *partitions de Voronoï* déterminées par la *variation de chemin* simplifient l'image tout en conservant l'information des contours. Ces propriétés font de  $V^u$  une pseudo-métrique particulièrement intéressante pour l'analyse d'images. Pour plus de précisions sur l'application de la *variation de chemin* à la segmentation d'images monochromatiques, voir [1].

## 4.2 Implantation pour les images couleur

Dans le cas des images couleur, on a  $X = \mathbb{R}^3$  et  $d$  correspond à la distance dans l'espace des couleurs.

Dans le domaine discret, le choix d'une connexité (usuellement 4, 6 ou 8 connexité) détermine une notion de composante et de voisinage discrets. Ainsi, la structure des composantes d'une fonction  $u$  peut se représenter par un graphe d'adjacence  $G$  où les noeuds correspondent aux composantes discrètes et les liens relient les composantes voisines. Puisque l'espace quotient  $\hat{\Omega}(V^u)$  est l'espace des composantes de la fonction, nous proposons de construire la *variation de chemin* discrète directement sur  $G$ .

Ainsi, dans le cas des images couleur, l'implantation de la *variation de chemin* se réduit à trouver un chemin de coût minimal sur  $G$ , lorsque les liens du graphe sont pondérés par la distance entre les couleurs des deux composantes. Pour les exemples présentés, la différence couleur

des espaces  $L^*ab$  ou  $L^*uv$  a été utilisée. Le problème peut alors être résolu en employant un simple algorithme de chemins minimaux, comme par exemple celui de Dijkstra [12, 21]. La complexité de cette construction de  $V^u$  est donc  $O(N \log(N))$ , où  $N$  désigne le nombre total de composantes discrètes de l'image.

## 4.3 La Mosaïque des Extrema

La *variation de chemin* est une pseudo-métrique intéressante pour un niveau local d'analyse de l'image. En effet, puisque sa définition (1) se fonde sur une somme le long des chemins, les *partitions de Voronoï*  $\Pi(V^u, S)$  sont sensibles à l'emplacement des sources. En conséquence, si on veut construire de telles *partitions*, l'ensemble des sources doit être choisi avec soin. D'abord, les sources doivent être représentatives du contenu de l'image. Ensuite, chaque structure significative doit en contenir au moins une. Dans le cas des images couleur, les extrema de la luminosité s'avèrent être des candidats naturels.

Ainsi, on définit la **partition des extrema** d'une image couleur  $u$  comme la *partition de Voronoï*  $\Pi(V^u, ext(u))$ , où  $ext(u)$  désigne l'ensemble des composantes extrémales du canal de luminosité  $L^*$  de  $u$ . Une *image mosaïque* associée à la *partition des extrema* sera nommée dans la suite une **mosaïque des extrema** de  $u$ .

Dans la Figure 2, l'approche est appliquée à une image naturelle. L'image originale se trouve à gauche et la *mosaïque des extrema* obtenue en prenant la couleur de la source comme modèle des *zones* est à droite. Cet exemple illustre plusieurs propriétés importantes de la méthode. D'abord, on peut observer dans le fond une réduction du flou. Cet effet est dû au faible nombre de sources dans ces régions et au fait que les composantes appartenant aux contours flous ou aux régions de transition sont rarement extrémales ; en conséquence, elles sont absorbées par les *zones* voisines. De plus, comme le montre la fourrure des loups, l'information de texture est préservée dans l'image simplifiée à cause de la haute densité des extrema dans ces régions. Ensuite, le contraste de l'image est rehaussé. Enfin, l'information des contours est conservée dans l'image simplifiée.

En résumé, le choix de la *variation de chemin* en tant que pseudo-métrique et la distribution spatiale des sources déterminent une *partition de Voronoï* où un compromis entre simplification et conservation de contenu est atteint. La *mosaïque des extrema* est une reconstruction naturelle et sans paramètres de l'image qui peut s'interpréter comme un premier niveau d'abstraction pour l'information de l'image. Son application en tant que méthode de pré-segmentation sera discutée dans les sections suivantes.

## 5 Ultramétriques

Lorsqu'une *partition de Voronoï* composée par un faible nombre de *zones* est requise, la sensibilité de la *variation de chemin* à l'emplacement des sources peut devenir contraignante. Cette constatation motive l'emploi de la *mosaïque des extrema* comme point de départ pour la



FIG. 2 – Image originale et *mosaïque des extrema*. (Note : Voir les images en couleur sur la version électronique)

construction d'un autre type de pseudo-métriques, appelées les ultramétriques. Ces pseudo-métriques sont plus appropriées pour un niveau global d'analyse de l'image, car elles sont étroitement liées aux familles de partitions emboîtées du domaine.

### 5.1 Définitions

Dans ce paragraphe, les notions de base de géométrie ultramétrique sont rappelées.

Une **ultramétrique** est un type spécial de distance pour lequel l'*Inégalité Triangulaire* usuelle est remplacée par la relation :

$$\psi(x, y) \leq \max\{\psi(x, z), \psi(z, y)\}, \quad \forall x, y, z \in \Omega. \quad (2)$$

D'un point de vue géométrique, cette inégalité peut s'interpréter comme suit : tous les triangles dans un espace ultramétrique sont soit isocèles, soit équilatéraux.

De plus, comme conséquence de (2), la structure des boules diffère de façon significative de l'espace euclidien usuel. D'abord, tous les points dans la boule de rayon  $r$  et centrée au point  $x$  peuvent être considérés comme le centre. Ensuite, deux boules ultramétriques non disjointes sont toujours incluses l'une dans l'autre. Donc, l'ensemble de toutes les boules d'un rayon fixe  $r$  détermine une *partition de Voronoï*. Ainsi, les ensembles de boules ultramétriques de rayon  $r$ , lorsque  $r$  croît, produisent une famille de partitions emboîtées du domaine. De plus, les rayons des boules génèrent un **indice de stratification** pour la famille de *partitions*. La structure résultante est souvent nommée une **hiérarchie stratifiée** de *partitions*. Par ailleurs, à chaque hiérarchie stratifiée on peut associer une distance ultramétrique. Pour plus de détails, voir [4].

Dans notre cas, si on considère une *partition de Voronoï* déterminée par une pseudo-ultramétrique, les propriétés précédentes impliquent que le fait de remplacer une source  $s_i \in S$  par un autre point  $s'_i \in Z_i$  n'affecte pas la *partition*. Ainsi, le problème de la sélection des sources dans ce cas peut être vu comme le choix d'un rayon  $r$  dans la pseudo-métrique.

### 5.2 Une Mesure de Contraste pour les Images Couleur

Dans ce paragraphe, on construit une ultramétrique qui exprime une notion de contraste global d'une image couleur. Dans ce but, la bijection entre ce type de pseudo-métriques et les hiérarchies stratifiées est fondamentale, car elle fournit une définition constructive des ultramétriques.

En effet, grâce aux propriétés énoncées dans le paragraphe précédent, la distance entre deux points  $x \in Z_i$  et  $y \in Z_j$  dans une *partition* ultramétrique peut s'exprimer comme une **mesure de dissimilarité** entre les *zones*  $Z_i$  et  $Z_j$ . Dans l'espace discret, cette remarque permet la construction des ultramétriques au moyen d'une stratégie de fusion de régions.

L'idée de fusionner progressivement les régions d'une partition initiale a été utilisée depuis les origines de la vision par ordinateur pour traiter le problème de la segmentation [6]. En général, ce type de méthodes, souvent appelés des approches *de bas en haut*, peuvent être implantées à l'aide d'un graphe d'adjacence de régions (RAG) [15]. Un RAG est un graphe non orienté où les noeuds correspondent à des régions connexes du domaine. Les liens représentent la relation de voisinage et sont pondérés par la dissimilarité.

Donc, dans ce contexte, le choix d'une partition initiale et la définition d'une mesure de dissimilarité déterminent un ordre de fusion. Alors, le fait d'enlever les liens du RAG pour des valeurs croissantes de la dissimilarité et fusionner les régions correspondantes produit une famille de partitions emboîtées.

Typiquement, la dissimilarité découle de la formalisation d'une notion de ressemblance entre les régions. Un exemple classique est la différence de couleur moyenne (ou de niveau de gris moyen) dans les régions [25, 8, 11], notée par  $d^n$ . Cependant, dans la vaste littérature sur le sujet, les auteurs prennent souvent en compte différents facteurs tels la variance et la taille des régions [3, 26], l'orientation et la texture [34].

Néanmoins, il faut remarquer que, pour produire une hiérarchie stratifiée de *partitions*, la dissimilarité doit être

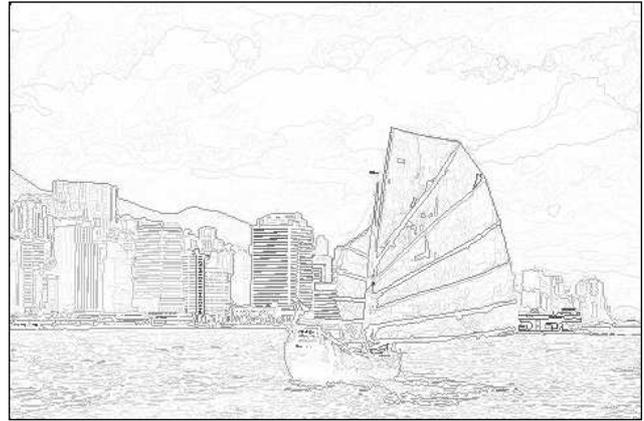


FIG. 3 – Image originale et *contours des extrema*.

croissante avec l'ordre de fusion des régions. Or cette condition est rarement satisfaite par les exemples proposés dans la littérature. Lorsque la dissimilarité n'est pas croissante, un indice de stratification pour la hiérarchie peut encore être défini en considérant une fonction croissante de l'ordre de fusion. Cependant, dans ce cas, l'ultramétrie résultante n'est plus directement liée à la dissimilarité.

L'objectif dans ce paragraphe est de construire une ultramétrie qui mesure le contraste global de l'image originale. Un candidat naturel serait la dissimilarité  $d^a$ , car cette dissimilarité suppose que les objets présents dans la scène ont une couleur homogène. Ce choix présente cependant deux inconvénients : d'abord,  $d^a$  n'est pas croissante et, ensuite, puisque sa définition utilise l'information dans toute la *zone*, sa valeur peut ne pas refléter le contraste réel. En conséquence, un processus de fusion gouverné par cette dissimilarité peut produire des contours artificiels lorsque la couleur à l'intérieur des régions varie graduellement.

Dans notre cas, la dissimilarité a été définie en utilisant uniquement l'information de frontière et elle a été mesurée directement sur la partition initiale. Pour les exemples présentés, la dissimilarité, notée par  $d^c$ , correspond à la distance couleur moyenne sur la frontière commune des *zones*, mesurée dans la *mosaïque des extrema*. Dans les espaces  $L^*ab$  et  $L^*uv$  de la CIE, la distance couleur est approchée par la distance euclidienne. Ainsi,  $d^c$  est croissante et l'ultramétrie associée, notée par  $\psi^c$ , est étroitement liée à l'information de contraste contenue dans l'image originale.

Un exemple classique de hiérarchie stratifiée est issu de la construction de la ligne de partage des eaux (LPE) en morphologie mathématique [5]. L'approche usuelle pour l'application de la LPE à la segmentation se fonde sur la simulation d'un processus d'inondation : l'image, interprétée comme un relief, est inondée à partir de ses minima régionaux. L'eau forme des lacs dans les vallées et, lorsque deux lacs se rencontrent, ils sont fusionnés. Ainsi, des niveaux croissants d'eau produisent des *partitions* de plus en plus grossières. Lorsque l'image est le module du gradient,

la hiérarchie résultante est appelée la *dynamique* [16]. En termes de fusion de régions, la partition initiale est composée par les bassins versants des minima et la dissimilarité est définie comme l'altitude du premier point col entre deux lacs adjacents, c'est à dire, la valeur minimale du gradient sur le bord commun des régions [24]. Donc, la dynamique induit aussi une ultramétrie ; une comparaison entre cette méthode et notre approche sera établie dans la section suivante.

## 6 Les Contours des Extrema

La perception des discontinuités semble jouer un rôle prépondérant pour l'interprétation de l'information visuelle chez l'homme. En conséquence, la détection des contours présente un intérêt particulier pour la vision par ordinateur. Un grand nombre de modèles pour les contours a été proposé dans les dernières décennies. Typiquement, les techniques de détection des contours comptent deux étapes : d'abord, le choix d'un ensemble de points de contours possibles et, ensuite, une estimation de leur importance. Parmi les modèles de contours les plus connus se trouvent les passages par zéro du Laplacien, les maxima dans la direction du gradient et les lignes de crête du gradient. Néanmoins, malgré leur diversité, la stratégie pour la plupart des méthodes de détection de contours consiste à utiliser une des dérivées de l'image et à considérer l'information locale pour mesurer leur importance [14]. Dans cette section, la mesure de contraste  $\psi^c$  est appliquée à la définition d'un nouveau modèle de contours pour les images couleur.

Parmi les propriétés de la *mosaïque des extrema* énoncées dans la Section 3, il faut remarquer la conservation et le rehaussement des contours. En effet, grâce à l'emploi de la *variation de chemin* et au choix des sources, les frontières des *zones* décrivent fidèlement l'information des contours. Ainsi, elles constituent un ensemble de courbes naturel pour chercher les bords dans l'image.

Une fois choisi un ensemble de candidats pour les contours, le problème suivant est de mesurer leur importance. Pour ce point, la notion de saillance présente un intérêt particulier

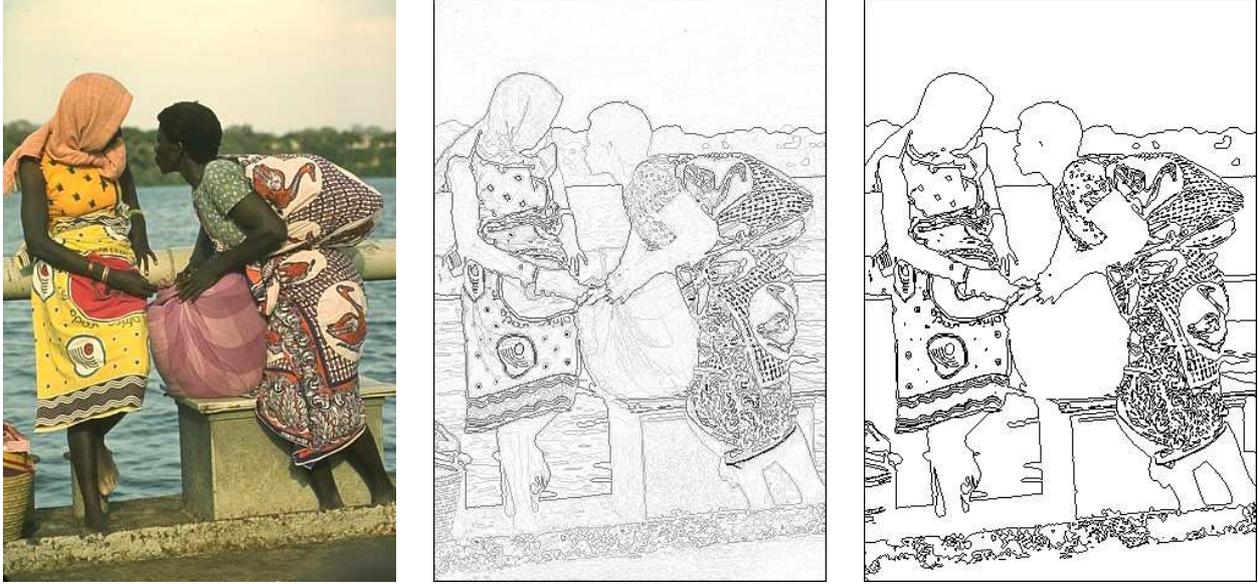


FIG. 4 – Image originale, *contours des extrema* et seuillage.

[27].

Considérons une hiérarchie stratifiée de partitions  $\{\mathcal{P}_\lambda\}_\lambda$ , la **saillance** d'un point  $x$  est donnée par le plus grand indice  $\lambda$  pour lequel  $x$  appartient à une frontière de  $\mathcal{P}_\lambda$ . L'évaluation de chaque point par sa saillance détermine une **image de saillance**. Cette image est une description compacte de la hiérarchie car, par construction, un seuillage au niveau  $\lambda$  fournit l'ensemble de frontières de la partition correspondante  $\mathcal{P}_\lambda$ .

L'utilité de l'image de saillance dépend donc de la hiérarchie qui la détermine. Dans notre cas, nous proposons d'utiliser l'image de saillance fournie par la mesure de contraste  $\psi^c$  pour l'évaluation des contours. Dans la suite, cette image sera appelée **contours des extrema**.

Notre modèle de contours présente les avantages suivants par rapport aux approches différentielles classiques. D'une part, pour bien-poser la dérivation dans l'espace discret, ces méthodes effectuent souvent une étape de lissage linéaire. Cependant, ceci implique une perte de résolution et le déplacement des contours. En revanche, notre approche garantit que les *contours des extrema* sont localisés avec précision et qu'ils préservent les caractéristiques sémantiques importantes des contours, telles les jonctions ou les coins. D'autre part, notre méthode d'évaluation prend en compte l'information de contraste sur toute l'image. Enfin, par construction, un seuillage des *contours des extrema* donne toujours un ensemble de courbes fermées.

Dans [27] l'image de saillance associée à la hiérarchie de la dynamique a été employée pour l'évaluation des arcs de la LPE. Même si ces auteurs traitent uniquement le cas des images monochromatiques, la définition d'un gradient couleur permet d'appliquer directement leur méthode aux images couleur. Cependant, deux différences principales avec notre approche sont à remarquer. D'abord, à

la perte de résolution et au déplacement des contours inhérents aux approches différentielles s'ajoute le problème du choix d'un gradient pour les images couleur. Ensuite, à cause de l'évaluation par la dynamique et étant donné que la LPE n'est pas un opérateur connexe [30], cette méthode peut fragmenter des régions homogènes.

Les Figures 3 et 4 illustrent les propriétés de notre modèle des bords. Pour les *contours des extrema*, une faible intensité représente un fort contraste. On peut observer que les contours obtenus modélisent avec précision les bords des objets et que leur valeur traduit effectivement le contraste perçu. La conservation de résolution peut se voir, par exemple, dans les motifs de la robe de la Fig. 4. Enfin, l'image de droite de la Fig. 4, montre les contours fermés correspondant à un seuil de 29% de la valeur de contraste maximale.

## 7 Segmentation Hiérarchique

La section précédente a montré l'application de l'ultramétrique  $\psi^c$  à l'extraction de l'information de contraste d'une image couleur. Cependant, le contraste n'est qu'un des facteurs pris en compte pour les tâches de vision de haut niveau. Dans cette section,  $\psi^c$  est utilisée comme la base pour la définition de nouvelles ultramétriques. Dans ce but, d'autres caractéristiques perceptuellement importantes des zones, comme leur taille, sont utilisées en complément de l'information de frontière fournie par le contraste.

Plus précisément, un **attribut**, une fonction  $\mathcal{A}$  à valeurs réelles positives, est définie pour chaque zone. De plus, on exige que l'attribut soit croissant par rapport à l'ordre d'inclusion. En général,  $\mathcal{A}$  peut se calculer à partir de l'information interne de la zone ; l'exemple le plus simple d'un attribut croissant est la taille. Ainsi, à partir de  $d^c$ , la dissimilarité associée à  $\psi^c$ , on peut définir une nouvelle dissi-

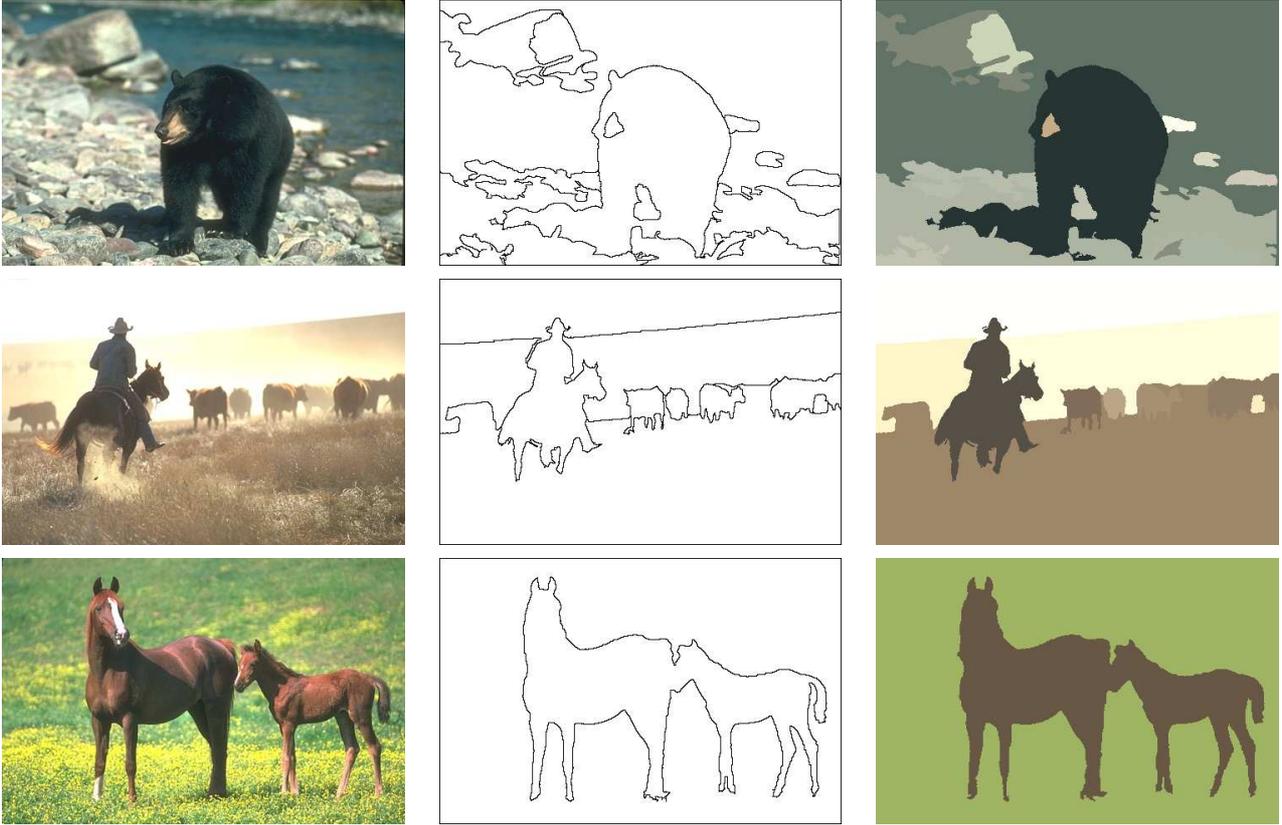


FIG. 5 – De gauche à droite : images originales, *partitions* et images mosaïques avec couleur médiane. Haut : 15 zones et  $\alpha = 0.23$  . Milieu : 10 zones et  $\alpha = 0.3$  . Bas : 2 zones et  $\alpha = 0.2$  .

milarité  $d'$  par la formule :

$$d'(Z_1, Z_2) = d^c(Z_1, Z_2) \cdot \min\{\mathcal{A}(Z_1), \mathcal{A}(Z_2)\}.$$

Puisque  $\mathcal{A}$  et  $d^c$  sont croissants,  $d'$  induit une ultramétrie où l'information interne est aussi prise en compte. Pour les exemples présentés, l'attribut a été défini par :

$$\mathcal{A}(Z) = A(Z)^\alpha,$$

où  $A(Z)$  dénote l'aire de la zone  $Z$  et le paramètre  $\alpha \geq 0$  pondère l'équilibre entre contraste et taille. Ainsi, pour un nombre de zones fixe, le choix de  $\alpha$  peut s'interpréter comme l'introduction d'information de plus haut niveau dans l'ultramétrie, permettant son adaptation au contenu de l'image.

Les Figures 5 et 6 montrent des exemples de segmentations obtenues avec cette méthode. On peut observer que, malgré le faible nombre de régions et la simplicité des attributs utilisés pour la définition de l'ultramétrie, les caractéristiques principales de la scène sont récupérées dans les segmentations.

Cette technique peut être vue comme une extension des *hiérarchies d'inondation* [31, 24] utilisées en segmentation morphologique où, lors de l'inondation LPE, l'aire ou le volume des lacs fournit une hiérarchie des minima du gradient.

## 8 Conclusion et Perspectives

Nous avons formulé le problème de la segmentation d'une image couleur en termes d'une *partition de Voronoï* généralisée de son domaine.

L'approche proposée fournit des résultats prometteurs et permet de décrire correctement la structure géométrique de l'image lorsque la scène représentée est composée par des objets relativement homogènes. Néanmoins, il faut remarquer que les exemples de pseudo-métriques étudiés ne sont pas adaptés aux images fortement texturées ou bruitées. Ainsi, pour ce type d'images, une étape préliminaire de filtrage est à considérer.

Outre l'incorporation de modèles de texture dans la définition des pseudo-métriques, les perspectives à ce travail incluent la prise en compte de la régularité des bords des objets ainsi que l'évaluation de notre approche par rapport aux nombreuses méthodes de segmentation existantes.

## Remerciements

Nous voudrions remercier les créateurs de la "Berkeley Segmentation Dataset" dont les images qui illustrent cet article font partie.

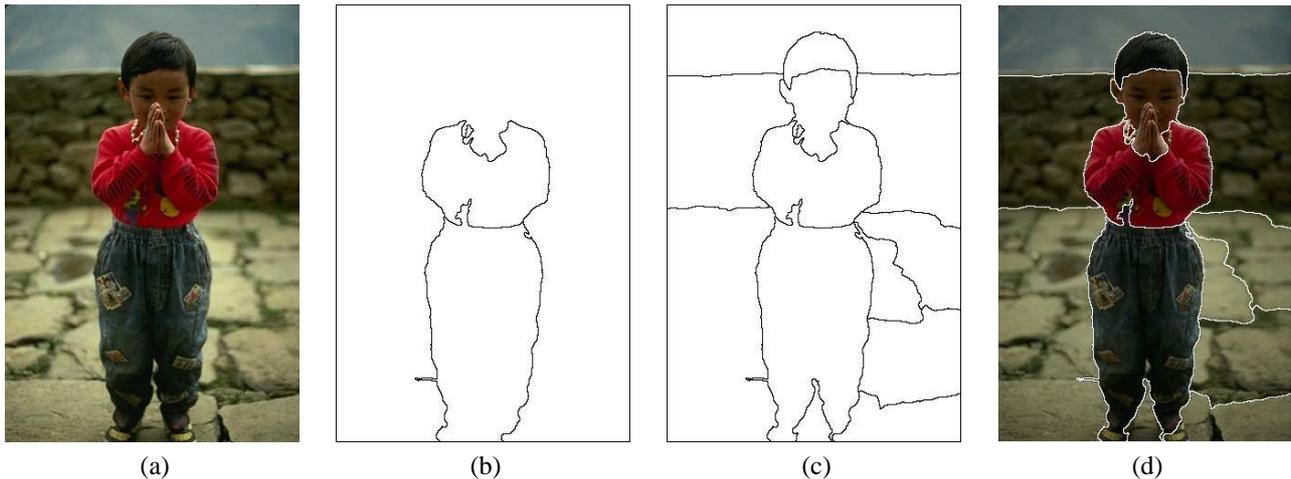


FIG. 6 – (a) : image originale (b) : *partition* avec 3 zones et  $\alpha = 0.6$  (c) : *partition* avec 13 zones et  $\alpha = 0.6$  (d) : contours de (c) sur l’image originale.

## Références

- [1] P. A. Arbeláez and L. D. Cohen. Path variation and image segmentation. In *Proc. EMMCVPR’03*, pages 246–260, Lisbon, Portugal, July 2003.
- [2] F. Aurenhammer and R. Klein. *Handbook of Computational Geometry*, chapter 5 : Voronoi Diagrams, pages 201–290. Elsevier Science Publishing, 2000.
- [3] J.M. Beaulieu and M. Goldberg. Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(2) :150–163, February 1989.
- [4] J. P. Benzécri. *L’Analyse des Données. Tome I : La Taxinomie*. Dunod, Paris, 4 edition, 1984.
- [5] S. Beucher and F. Meyer. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12 : The Morphological Approach to Segmentation : The Watershed Transformation, pages 433–481. Marcel Dekker, 1992.
- [6] C. R. Brice and C. L. Fenema. Scene analysis using regions. *Artificial Intelligence*, 1 :205–226, 1970.
- [7] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models : A minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1) :57–78, August 1997.
- [8] L. D. Cohen, L. Vinet, P. Sander, and A. Galalowicz. Hierarchical region based stereo matching. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1989.
- [9] L. D. Cohen. Multiple contour finding and perceptual grouping using minimal paths. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :225–236, 2001.
- [10] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of minimal paths in 3d images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*, 5(4) :281–299, 2001.
- [11] F. Dibos and G. Koepfler. Segmentation d’images couleur par méthode variationnelle. In *Actes du 16eme Colloque GRETSI*, pages 367–370, 1997.
- [12] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.
- [13] P. G. L. Dirichlet. Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *J. Reine Angew. Mathematik*, 40 :209–227, 1850.
- [14] D. A. Forsyth and J. Ponce. *Computer Vision : A Modern Approach*. Prentice Hall, 2003.
- [15] L. Garrido, P. Salembier, and D. Garcia. Extensive operators in partition lattices for image sequence analysis. *Signal Processing*, 66(2) :157–180, April 1998. Special Issue on Video Sequence Segmentation.
- [16] M. Grimaud. New measure of contrast : Dynamics. In *Image Algebra and Morphological Processing III*, SPIE, San Diego, USA, 1992.
- [17] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhauser, Boston, 1999.
- [18] C. Jordan. Sur la série de fourier. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série Mathématique.*, 92(5) :228–230, 1881.
- [19] R. Kimmel and A. M. Bruckstein. Global shape from shading. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :360–369, 1995.
- [20] R. Kimmel, N. Kiryati, and A. M. Bruckstein. Distance maps and weighted distance transforms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6 :223–233, May 1996. Special Issue on Topology and Geometry in Computer Vision.
- [21] R. Kruse and A. Ryba. *Data structures and program design in C++*. Prentice Hall, New York, 1999.

- [22] R. Malladi and J.A. Sethian. A unified approach to noise removal, image-enhancement, and shape recovery. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(11) :1554–1568, November 1996.
- [23] P. Maragos and M. A. Butt. Curve evolution, differential morphology and distance transforms applied to multiscale and eikonal problems. *Fundamenta Informaticae*, 41 :91–129, 2000.
- [24] F. Meyer. Hierarchies of partitions and morphological segmentation. In Michael Kerckhove, editor, *Scale Space and Morphology in Computer Vision*, pages 161–182, 2001.
- [25] A. Montanvert, P. Meer, and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(4) :307–316, April 1991.
- [26] P.F.M. Nacken. Image segmentation by connectivity preserving relinking in hierarchical graph structures. *PR*, 28(6) :907–920, June 1995.
- [27] L. Najman and M. Schmitt. Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(12) :1163–1173, 1996.
- [28] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu. *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, 2 edition, 2002.
- [29] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.
- [30] J. Serra and P. Salembier. Connected operators and pyramids. In SPIE, editor, *Image Algebra and Mathematical Morphology*, volume 2030, pages 65–76, San Diego CA., July 1993.
- [31] C. Vachier and F. Meyer. Extinction value : a new measurement of persistence. In *IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, volume 1, pages 254–257, June 1995.
- [32] G. M. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. deuxième mémoire : Recherches sur les parallélogrammes primitifs. *J. Reine Angew. Mathematik*, 134 :198–287, 1908.
- [33] G. Wyszecki and W. S. Stiles. *Color Science : Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulas*. J. Wiley and Sons, 1982.
- [34] W. Yu, J. Fritts, and F. Sun. A hierarchical image segmentation algorithm. In *Proc. ICME'02*, pages pp. 221–224, August 2002.