Segmentation d'Images Couleur par Partitions de Voronoï
Color Image Segmentation by Voronoi Partitions

Pablo Andrés Arbeláez et Laurent D. Cohen

CEREMADE, UMR CNRS 7534 Université Paris Dauphine,

Place du maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

{ arbelaez, cohen }@ceremade.dauphine.fr

Résumé

Nous étudions le problème de la segmentation de bas niveau pour les images couleur. L'approche proposée consiste à modéliser la segmentation d'une image comme une partition de Voronoï généralisée de son domaine. Dans ce contexte, segmenter une image couleur revient à définir une distance appropriée entre points de l'image et à choisir un ensemble de sites. La distance est définie en considérant les attributs de bas niveau de l'image et, en particulier, l'information fournie par la couleur. La démarche adoptée repose sur la division du problème de la segmentation en trois sous-tâches successives, traitées dans le cadre des partitions de Voronoï : la pré-segmentation, la représentation hiérarchique et l'extraction de contours.

Abstract

We address the issue of low-level segmentation of color images. The proposed approach is based on the formulation of the problem as a generalized Voronoi partition of the image domain. In this context, a segmentation is determined by the definition of a distance between points of the image and the selection of a set of sites. The distance is defined by considering the low-level attributes of the image and, particularly, the color information. We divide the segmentation task in three successive sub-tasks, treated in the framework of Voronoi partitions : pre-segmentation, hierarchical representation and contour extraction.

Mots-clés : Traitement d'images, modélisation des images, segmentation couleur, extraction de contours, partition et diagramme de Voronoï, ultramétriques, morphologie mathématique.

Keywords : Image processing, image modelling, color segmentation, contour extraction, Voronoi partition and diagram, ultrametrics, mathematical morphology.

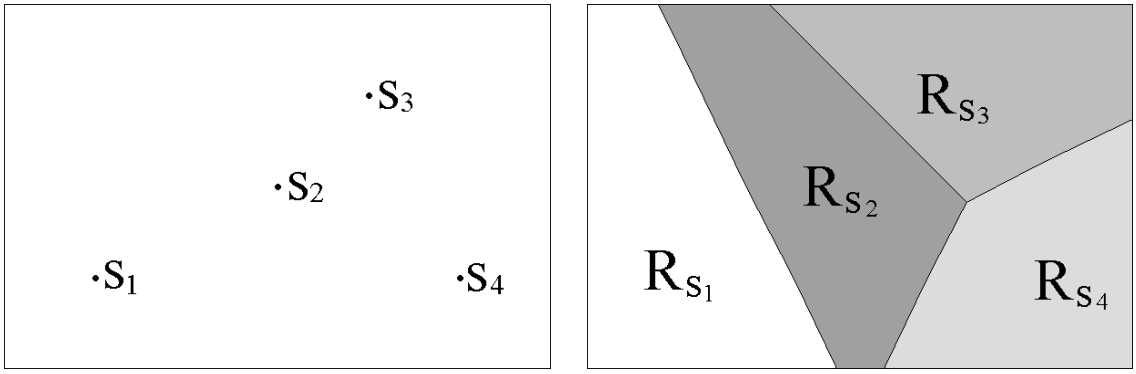


FIG. 1 – Ensemble de sites et partition de Voronoï euclidienne.

1 Introduction

Dirichlet [15] et Voronoï [45] furent parmi les premiers à étudier et à décrire précisément les partitions spatiales. Ils formalisèrent l'idée intuitive de diviser l'espace en considérant un ensemble fini de points fixés, appelés *sites*, et en associant chaque point de l'espace au site le plus proche. Les régions définies par cette construction sont souvent nommées *régions de Voronoï* et la décomposition de l'espace ainsi obtenue est connue sous le nom de *partition de Voronoï* . La Figure 1 présente une partition de Voronoï classique. Dans cet exemple, un rectangle du plan est divisé en mesurant la distance euclidienne entre chaque point et les quatre sites montrés à gauche. Les régions de Voronoï sont dans ce cas des polygones convexes.

Depuis son introduction, la partition de Voronoï a été utilisée dans un large spectre de disciplines et a fait l'objet de nombreuses généralisations [5, 37]. Dans le cadre de l'analyse d'images, on peut citer parmi ses principales applications la compression [1], la représentation des formes [31] et la classification des textures [42].

Le présent travail étudie une extension de cette notion aux espaces pseudo-métriques ainsi que son application à la segmentation d'images couleur. Une segmentation est définie dans ce contexte par les régions de Voronoï d'un ensemble de sites, par rapport à une distance pseudo-métrique. Le problème est donc transféré à la définition d'une pseudo-métrique appropriée et au choix d'un ensemble de sites. Nous employons les attributs de bas niveau de l'image et, en particulier, l'information couleur, pour définir les distances.

La démarche adoptée consiste à diviser la segmentation d'une image couleur en trois sous-tâches successives, traitées dans le cadre des partitions de Voronoï : la pré-segmentation, la représentation hiérarchique et l'extraction de contours.

La première étape est un pré-traitement destiné à simplifier l'image originale tout en préservant son contenu. Dans cette partie, la distance est définie en mesurant la variation minimale de la couleur sur tous les chemins qui relient deux points du domaine entre eux. Les sites utilisés pour déterminer la partition de Voronoï sont les extrema de la composante de luminosité de l'image.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux partitions de Voronoï qui sont invariantes lorsqu'un site est déplacé à l'intérieur de sa région. Cette considération mène à étudier un type de distances particulièrement utile pour créer des représentations hiérarchiques des images. L'information de la couleur est ici employée pour définir une mesure de contraste qui est ensuite combinée aux attributs internes des régions.

Enfin, nous proposons une méthode d'extraction de contours pour les images couleur basée sur les frontières des régions de Voronoï. Notre approche garantit qu'un simple seuillage de cette image de contours, appelée *image des contours ultramétriques*, fournit un ensemble de courbes fermées qui préservent les caractéristiques sémantiques des bords, telles les jonctions. Les contours ultramétriques permettent l'évaluation de nos résultats par rapport aux segmentations humaines de la *Berkeley Segmentation Dataset* [29].

Cet article est organisé comme suit. Le cadre mathématique est présenté dans la Section 2. La Section 3 introduit la méthode de pré-segmentation. La définition de représentations hiérarchiques de l'image est discutée dans la Section 4. La Section 5 est dédiée aux contours ultramétriques et à l'évaluation des résultats. Enfin, la Section 6 contient quelques remarques finales.

2 Partitions et Segmentation

2.1 Espaces pseudo-métriques

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. Une **pseudo-métrique** [21, 25] sur un ensemble Ω est une application $\psi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui satisfait les axiomes suivants :

1. *Réflexivité :* $\psi(x, x) = 0,\ \forall x \in \Omega$.
2. *Inégalité Triangulaire :* $\psi(x, y) \leq \psi(z, x) + \psi(z, y),\ \forall x, y, z \in \Omega$.

Le couple (Ω, ψ) est appelé un **espace pseudo-métrique** et le nombre $\psi(x, y)$ est la **distance** entre les points x et y. Les pseudo-métriques sont aussi appelées parfois des *écarts finis* [25].

Les propriétés suivantes sont conséquence immédiate des Axiomes 1. et 2. :

3. *Positivité :* $\psi(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in \Omega$.
4. *Symétrie :* $\psi(x, y) = \psi(y, x),\ \forall x, y \in \Omega$.

Remarquons que la seule différence entre la Définition 2.1 et celle d'un espace métrique est la *Réflexivité*, qui remplace l'axiome de *Séparation* habituel :

1'. $\psi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Par conséquent, deux points distincts peuvent se trouver à distance nulle dans un espace pseudo-métrique. Cependant, la relation $\sim_\psi$, définie dans $\Omega \times \Omega$ par la formule $x \sim_\psi y \Leftrightarrow \psi(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence. On peut donc considérer la **classe d'équivalence** d'un point x, formée par tous les points qui sont à distance nulle de x :

$$\hat{x}(\psi) = \{\, y \in \Omega \,|\, \psi(x, y) = 0\}.$$

Ainsi, $\hat{x}(\psi)$ est la fermeture de x pour la topologie pseudo-métrique. L'**espace quotient** de Ω sous $\sim_\psi$ est noté par :

$$\widehat{\Omega}(\psi) = \{\hat{x}(\psi) |\ x \in \Omega\}.$$

L'application $\hat{\psi} : \widehat{\Omega}(\psi) \times \widehat{\Omega}(\psi) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y}) = \psi(x, y)$ est donc une métrique pour l'espace quotient. Remarquons que, dans le cas où ψ est déjà une métrique, l'espace quotient $\widehat{\Omega}(\psi)$ est homéomorphe à Ω.

Par ailleurs, une pseudo-métrique peut être traitée comme la fonction d'une seule variable qui mesure la distance à un point fixe :

Définition 2.2. L'**énergie** induite par une pseudo-métrique ψ, par rapport à un point $s \in \Omega$, est l'application $\psi_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par :

$$\psi_s(x) = \psi(x, s), \forall\, x \in \Omega.$$

L'*énergie* par rapport à un ensemble de points $S = \{s_i\}_{i \in J}$ est définie comme le minimum des *énergies* individuelles :

$$\psi_S(x) = \inf_{s_i \in S} \psi_{s_i}(x), \forall\, x \in \Omega.$$

2.1.2 Espaces Convexes

Dans l'espace euclidien, un ensemble Ω est convexe si tout couple de points peut être relié par un segment de droite entièrement contenu dans Ω. La suite de notre exposé requiert une extension de ce concept aux espaces pseudo-métriques.

Un **chemin** γ entre deux points $x,\, y \in \Omega$ est une application continue d'un segment dans l'espace (Ω, ψ) :

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \text{ tel que } \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y.$$

L'image d'un chemin est donc un arc complètement inclus dans Ω.

L'ensemble des chemins entre x et y est noté par Γ_{xy} et l'ensemble des chemins de Ω par Γ_Ω.

Un chemin $\overline{\gamma} \in \Gamma_{xy}$ est $\psi-$**droit** s'il satisfait la condition suivante :

$$\forall\, t \in [a, b],\ \psi(x, y) = \psi(\overline{\gamma}(t), x) + \psi(\overline{\gamma}(t), y)$$

Les chemins $\psi-$droits sont donc l'extension de la notion de segment de droite pour une distance arbitraire. Ce sont les chemins qui réalisent la plus courte distance entre deux points et pour lesquels l'Inégalité Triangulaire devient une égalité. Notons cependant que, à différence de l'espace

euclidien, un chemin $\psi-$droit entre deux points d'un espace pseudo-métrique peut ne pas être unique.

Ainsi, la notion de convexité dans notre cadre est la suivante :

Définition 2.3. Un espace pseudo-métrique (Ω, ψ) est **convexe** si et seulement si tout couple de points peut être relié par un chemin $\psi-$droit.

Notons enfin que tout espace pseudo-métrique convexe est connexe par arcs.

2.2 Partitions de Voronoï

Définition 2.4. Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Une **partition** de Ω est une famille finie de sous ensembles de Ω, $\mathcal{T} = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n\}$, qui satisfait les conditions suivantes :

1. Ω_i est fermé, $\forall i \in \{1, ...n\}$.
2. $[\Omega_i \setminus \partial\Omega_i] \bigcap [\Omega_j \setminus \partial\Omega_j] = \emptyset, \ \forall\, i \neq j$.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega$.
4. Ω_i est connexe par arcs, $\forall i \in \{1, ...n\}$.

Il s'agit donc d'un recouvrement de Ω en régions fermées, connexes et qui se superposent uniquement sur leurs frontières. Nous étudierons une sous classe spécifique des partitions, où les régions Ω_i sont déterminées par une distance.

Définition 2.5. Soit (Ω, ψ) un espace pseudo-métrique convexe fermé et $S = \{s_1, ..., s_n\} \subseteq \Omega$ un ensemble de sites. La **région de Voronoï**, ou **V-région**, d'un site $s_i \in S$ est définie par :

$$R_{s_i} = \{x \in \Omega |\, \psi_{s_i}(x) \leq \psi_{s_j}(x), \forall j \in \{1, ...n\},\ j \neq i\}.$$

La **partition de Voronoï**, ou **V-partition**, de Ω associée à ψ et à S est l'ensemble des régions de Voronoï :

$$\Pi(\psi, S) = \{R_{s_1}, ..., R_{s_n}\}.$$

En morphologie mathématique, les V-régions s'appellent aussi les *zones d'influence* des sites et l'ensemble des frontières, le *squelette par zones d'influence* [26].

Vérifions que la famille finie $\Pi(\psi, S)$ est bien une partition de Ω. Les conditions 1, 2 et 3 de la Définition 2.4 sont trivialement satisfaites. La connexité des V-régions découle pour sa part du résultat suivant :

Proposition 2.6. *Soit $\Pi(\psi, S)$ une partition de Voronoï dans un espace pseudo-métrique convexe et fermé (Ω, ψ). Alors, tout chemin $\psi-$droit entre un site s_i et un point $x \in R_{s_i}$ est complètement inclus dans R_{s_i}.*

Remarquons que, puisque $\hat{\psi}$ est une métrique pour l'espace quotient de Ω sous ψ, chaque élément d'une partition de Voronoï est une union d'éléments de $\widehat{\Omega}(\psi)$. Ainsi, les classes d'équivalence indiquent le niveau de résolution de la pseudo-métrique, en dessous duquel la distance est aveugle. De plus, notons que $\psi_s = \psi_y,\ \forall y \in \hat{s}(\psi)$. Un site s peut donc être remplacé par un autre point y de sa classe d'équivalence sans affecter la V-partition. Par suite, la notion de site désignera indistinctement le point s ou sa classe d'équivalence $\hat{s}(\psi)$.

Deux différences fondamentales entre notre approche et le cadre standard des partitions de Voronoï [5, 37] méritent d'être soulignées. D'une part, le fait de considérer des pseudo-métriques nous permet l'accès à une classe d'espaces plus large que celle des espaces métriques. D'autre part, puisqu'on est intéressé par l'application de cette structure à l'analyse d'images, les pseudo-métriques étudiées dans la suite *dépendent explicitement des données de l'image*.

2.3 Segmentation d'Images Numériques

Les notions introduites dans cette section sont valables pour tout espace pseudo-métrique (Ω, ψ). Cependant, puisque notre but est leur application à la segmentation, l'ensemble Ω désignera dorénavant le domaine de définition d'une image.

Plus précisément, une **image** est une fonction $u : \Omega \to (X, d)$, où le domaine Ω est un rectangle fermé du plan dans le cadre continu et son intersection par une grille régulière dans le cadre discret. Dans le cas des images couleur, l'espace pseudo-métrique d'arrivée est $(X, d) = (\mathbb{R}^3, \delta)$, où δ dénote la distance entre les couleurs.

Un problème qui se pose donc est la définition d'une distance dans l'espace des couleurs. A cet égard, nous avons adopté le standard L^*ab de la Commission Internationale de l'Éclairage [46]. Cette représentation de la couleur est une approximation de l'espace des couleurs perceptuellement uniforme. Bien qu'imparfaite, elle présente deux avantages majeurs par rapport au système usuel Rouge-Vert-Bleu. D'une part, la séparation de l'information couleur en un canal de luminosité L^* et deux canaux chromatiques a et b. D'autre part, la métrique Riemannienne de l'espace des couleurs est approchée dans l'espace L^*ab par la distance euclidienne. Cette distance est notée dans la suite par δ^*.

Il faut enfin souligner que l'objectif de ce travail est la segmentation dite de *bas niveau*, c'est à dire, sans connaissance préalable du contenu de l'image. Notre démarche s'inscrit ainsi dans le contexte de la segmentation morphologique [34, 41], où seuls sont considérés comme contours possibles les discontinuités de l'image originale. Nous étudions donc uniquement des distances dont les V-partitions ne fragmentent pas les zones à couleur constante. Cette propriété est satisfaite lorsque la classe d'équivalence d'un point $x \in \Omega$ coïncide avec la **composante connexe** de u qui contient x, le sous-ensemble connexe maximal des points du domaine qui ont la même couleur que $u(x)$. L'espace quotient $\widehat{\Omega}(\psi)$ est donc homéomorphe à l'espace des composantes de l'image. De plus, pour un ensemble de sites S, chaque élément de la V-partition $\Pi(\psi, S)$ est une union de composantes connexes de u. Par suite, l'opérateur qui associe $\Pi(\psi, S)$ à l'image u est *connexe* [40, 41] et son application simplifie l'image tout en préservant l'information des contours. En conséquence, notre méthode conduit à des contours parfois moins réguliers que ceux des approches différentielles. En revanche, elle n'oblige pas à interpréter l'image comme une fonction doublement différentiable.

3 La Variation de Chemin

3.1 Métriques de Chemin

Une première approche pour définir une pseudo-métrique dans le domaine d'une image est d'étudier les chemins entre couples de points. Dans ce but, nous considérons une notion généra-

lisée de longueur.

Une **structure de longueur** pour Ω [19] est une application $e : \Gamma_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. Si γ est constant, alors $e(\gamma) = 0$.
2. Si γ est la concaténation de γ_1 et γ_2, alors $e(\gamma) = e(\gamma_1) + e(\gamma_2)$.
3. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin et $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est un homéomorphisme, alors $\gamma \circ f$ est un chemin et $e(\gamma \circ f) = e(\gamma)$.

La condition 3 indique que e est invariante par changements de paramètre et donc que la longueur est une notion qui agit directement sur l'arc image du chemin.

A partir d'une structure de longueur e, on peut définir une pseudo-métrique, appelée la **métrique de chemin** associée à e, en considérant la valeur minimale de e sur tous les chemins qui relient deux points du domaine entre eux :

$$\psi(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} e(\gamma), \ \forall\, x, y \in \Omega.$$

Un type de métriques de chemin particulièrement important se présente lorsque e peut s'exprimer comme l'intégrale d'une **fonction de potentiel** $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$e(\gamma) = \int_0^L P(\gamma(l))\, dl,$$

où l désigne l'abscisse curviligne et L la longueur euclidienne du chemin. Dans ce cas, $\hat{x}(\psi)$, la classe d'équivalence d'un point x, correspond à l'ensemble connexe maximal à potentiel nul qui contient x. Ainsi, si le potentiel est strictement positif, l'espace quotient $\hat{\Omega}(\psi)$ coïncide avec le domaine. Ces métriques sont souvent appelées des **distances pondérées**. De plus, la relation entre l'*énergie* et le potentiel est donnée dans ce cas par l'*Équation Eikonale* [9].

L'utilisation des distances pondérées en analyse d'images repose sur la définition d'un potentiel approprié, à partir des données de l'image, pour traiter un problème particulier. Parmi les principaux problèmes abordés au moyen de cet outil se trouvent le *shape from shading* [22], la morphologie mathématique continue [23, 28], les contours actifs [9] et le regroupement perceptuel [10].

3.2 Définition de la Variation de Chemin

Dans les applications des distances pondérées aux problèmes liés à la segmentation, tels l'extraction des formes [27, 12] et les modèles de contours actifs [9], le potentiel est souvent défini en fonction du module du gradient de l'image. La régularité de l'image n'est cependant pas une condition nécessaire pour le cadre développé dans ce travail. Dans ce paragraphe, nous étudions la métrique de chemin obtenue en mesurant la variation minimale de la couleur sur les chemins. Les V-partitions correspondantes sont donc naturellement adaptées aux images non différentiables.

Définissons d'abord la notion de variation des fonctions d'une variable lorsque l'espace d'arrivée est un espace pseudo-métrique :

Soit (X, δ) un espace pseudo-métrique. Considérons une subdivision finie d'un intervalle $[a, b]$, $\sigma = \{t_0, ..., t_n\}$ telle que $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ et notons par Φ l'ensemble de ces subdivisions.

La **variation** d'une fonction $f : [a, b] \to (X, \delta)$ est définie par la formule :

$$v(f) = \sup_{\sigma \in \Phi} \sum_{i=1}^{n} \delta(f(t_i), f(t_{i-1})).$$

Notons que la variation vérifie les conditions requises pour être une structure de longueur. De plus, si (X, δ) est l'ensemble des nombres réels muni de la métrique usuelle, alors $v(f)$ correspond à la variation totale de f, à savoir, la fonctionnelle introduite par Jordan [20]. Dans notre cas, (X, δ) est l'espace des couleurs L^*ab muni de la distance δ^*.

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, nous considérons la métrique de chemin associée à la variation, c'est à dire, la variation minimale de la fonction sur tous les chemins qui relient deux points :

Définition 3.1. La **variation de chemin** d'une fonction $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to (X, \delta)$ est définie par la formule :

$$V^u(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} v(u \circ \gamma), \ \forall\, x, y \in \Omega.$$

On peut remarquer que, en contraste avec la notion usuelle de variation totale pour les fonctions de plusieurs variables [39], la variation de chemin est définie pour chaque point. En outre, notons que la classe d'équivalence d'un point $x \in \Omega$ coïncide avec la composante connexe de u qui contient x. Pour plus de précisions sur l'application de la variation de chemin à la segmentation d'images monochromatiques, voir [4].

Dans le domaine discret, le choix d'une connexité (usuellement 4, 6 ou 8 connexité) détermine une notion de composante connexe et de voisinage discrets. L'espace des composantes d'une fonction u peut donc se représenter par un graphe d'adjacence G où les noeuds correspondent aux composantes connexes discrètes et où les arrêtes relient les composantes connexes voisines. Puisque l'espace quotient $\hat{\Omega}(V^u)$ est l'espace des composantes connexes de la fonction, nous proposons de construire la variation de chemin discrète directement sur G.

Ainsi, dans le cas des images couleur, l'implantation de la variation de chemin se réduit à trouver un chemin de coût minimal sur G, lorsque les arrêtes du graphe sont pondérées par la distance δ^* entre les couleurs des deux composantes connexes. Le problème peut alors être résolu en employant un algorithme de chemins minimaux, comme par exemple celui de Dijkstra [14, 24]. La complexité algorithmique de cette construction de la variation de chemin est donc $O(Nlog(N))$, où N désigne le nombre total de composantes discrètes de l'image.

3.3 Application à la pré-segmentation d'images couleur

Les algorithmes de segmentation sont généralement plus robustes lorsqu'ils sont appliqués, non pas à l'image originale, mais à une version simplifiée de celle-ci. Ce pré-traitement, souvent appelé *pré-segmentation*, est motivé par le fait que les pixels ne sont pas des entités naturelles de l'image, mais une conséquence de la discrétisation. Ainsi, la pré-segmentation cherche à décomposer l'image en entités qui soient locales, plus cohérentes et moins nombreuses que les pixels et, surtout, qui préservent sa structure géométrique. Parmi les méthodes utilisées à cet effet, on peut citer les *normalized cuts* [38] ou, en morphologie mathématique, les opérateurs connexes [41] et la la ligne de partage des eaux (LPE) sans contraintes [32].

Nous proposons de traiter cette première étape du processus de segmentation au moyen d'une

FIG. 2 – Ligne 1 : Images originales. Ligne 2 : Sites. Ligne 3 : Énergies. Ligne 4 : RE

V-partition induite par la variation de chemin. Cette distance est intéressante pour analyser localement une image car elle mesure la variation minimale de la couleur entre les points. Une fois la distance définie, le problème suivant qui se pose est la sélection d'un ensemble de sites adéquats pour cette tâche. D'une part, les sites doivent être représentatifs du contenu de l'image. D'autre part, chaque structure significative doit en contenir au moins un. Dans le cas des images couleur, les extrema de la luminosité s'avèrent être des candidats naturels pour les sites.

Ainsi, on considère la partition de Voronoï $\Pi(V^u, ext(u))$, où $ext(u)$ désigne l'ensemble des composantes extrémales du canal de luminosité L^* de l'image couleur u. Une ***reconstruction des extrema (RE)*** de u est une reconstruction constante par morceaux de l'image, obtenue par

l'assignation d'une couleur à chaque V-région de $\Pi(V^u, ext(u))$.

La Figure 2 montre l'application de la méthode aux images montrées en haut. La seconde ligne illustre la pertinence du choix des sites. On peut observer que la distribution spatiale des extrema de la luminosité (en noir) représente la structure de l'image : la densité des sites est plus grande dans les régions nettes ou texturées et faible dans les zones floues ou homogènes. La troisième ligne présente l'énergie induite par la variation de chemin par rapport à l'ensemble de ces sites. Les intensités faibles indiquent des valeurs élevées de l'énergie. Puisque les contours flous et les zones de transition ne sont généralement pas extrémaux, les plus grandes énergies sont localisées sur les bords des régions floues. Enfin, les reconstructions des extrema sont montrées en bas, avec la couleur médiane comme modèle pour représenter chaque V-région. Par suite aux remarques précédentes, le flou est réduit dans les reconstructions des extrema, tandis que la texture et, plus important, l'information des contours sont préservées. Accessoirement, le contraste des images est rehaussé.

En résumé, le choix de la variation de chemin en tant que pseudo-métrique et la distribution spatiale des sites déterminent une partition de Voronoï où un compromis entre simplification et conservation de contenu est atteint. La reconstruction des extrema peut s'interpréter comme un premier niveau d'abstraction pour l'information d'une image couleur. Dans la suite, elle est systématiquement utilisée comme méthode de pré-segmentation sans paramètres. Cette approche peut aussi être combinée avec un filtrage par diffusion non-linéaire dans le but de réduire le nombre d'extrema et de régulariser les V-partitions [3].

4 Ultramétriques

Aborder le problème de la segmentation au moyen des partitions de Voronoï revient à modéliser les structures géométriques de l'image par des V-régions. Dans un tel cadre, il est souhaitable que lorsqu'un site est déplacé à l'intérieur de sa V-région la frontière ne soit pas modifiée. Il faut cependant remarquer que cette propriété n'est satisfaite ni par la variation de chemin ni par les distances pondérées, car ces pseudo-métriques sont définies par des sommes le long des chemins. Le reste de cet article est dédié à l'étude d'un type de distances, appelées les ultramétriques, qui

jouissent de cette invariance.

4.1 Ultramétriques et Hiérarchies Stratifiées

Ce paragraphe rappelle quelques éléments de géométrie ultramétrique.

Les ultramétriques sont un outil de base en analyse des données [7]. Elle sont souvent employées pour le regroupement puisqu'elles déterminent un type particulier de hiérarchies fortes. Ces distances sont donc intéressantes pour créer des représentations multi-échelle des images couleur.

Définition 4.1. Une **hiérarchie stratifiée** est une famille $\mathcal{H}$ de partitions emboîtées d'un ensemble Ω, munie d'une fonction $st : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée indice de stratification, telle que :

$$\forall a, b \in \mathcal{H} \ : \ a \subset b \Rightarrow st(a) < st(b).$$

Un **espace ultramétrique** (Ω, ψ) est un espace pseudo-métrique où l'Inégalité Triangulaire (voir Définition 2.1) est remplacée par la plus forte **Inégalité Ultramétrique** :

2'. $\psi(x, y) \leq max\{\psi(z, x), \psi(z, y))\}, \ \forall x, y, z \in \Omega.$

Du point de vue géométrique, la relation précédente indique que tous les triangles dans un espace ultramétrique sont soit isocèles, soit équilatéraux. Dans le premier cas, la base est le plus petit des côtés.

La topologie induite par une ultramétrique diffère significativement du cas euclidien usuel. Considérons un espace ultramétrique (Ω, ψ) et une boule fermée de centre $x \in \Omega$ et de rayon r :

$$B_x(r) = \{y \in \Omega | \ \psi_x(y) \leq r\}.$$

Alors, une conséquence de l'Inégalité Ultramétrique est la propriété suivante :

$$B_y(r) = B_x(r), \ \forall y \in B_x(r). \tag{1}$$

Tout point de la boule peut donc être considéré comme son centre.

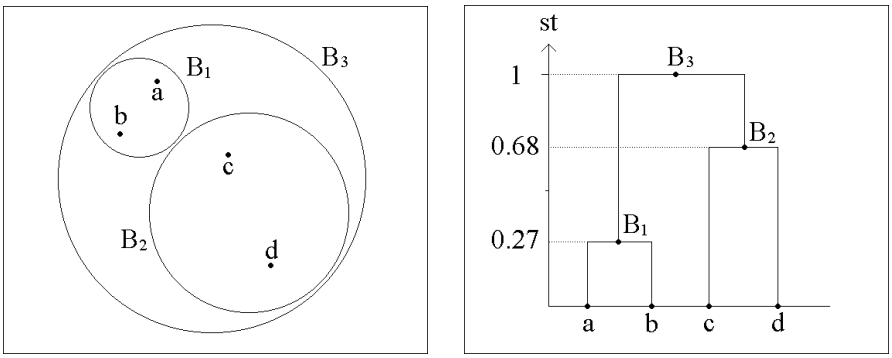


FIG. 3 – Exemple simple d'ultramétrique et de hiérarchie stratifiée.

De plus, si on considère deux boules ultramétriques $B_x(r)$ et $B_{x'}(r')$ telles que $r' \leq r$ et un point $y \in B_x(r) \cap B_{x'}(r')$, alors y est simultanément le centre des deux boules et on a

$$B_{x'}(r') = B_y(r') \subseteq B_y(r) = B_x(r). \tag{2}$$

Deux boules ultramétriques ne peuvent donc être que disjointes ou concentriques.

L'Équation (2) implique que l'ensemble des boules fermées de rayon fixé r détermine une partition de Voronoï de Ω. Par ailleurs, puisque d'après l'Équation (1) ce type de V-partitions ne dépend plus explicitement d'un ensemble de sites mais du rayon r, on les note par $\Pi(\psi, r)$.

La famille $\mathcal{H} = \{\Pi(\psi, r)\}_{r \geq 0}$ est donc une famille de partitions emboîtées de Ω. Un indice de stratification pour $\mathcal{H}$ peut alors être défini en considérant la fonction qui assigne à chaque boule ultramétrique son rayon. En outre, chaque hiérarchie stratifiée de partitions détermine une ultramétrique sur le domaine. Il est donc équivalent de se donner une ultramétrique ou une hiérarchie stratifiée.

La Figure 3 illustre ces notions sur un exemple simple. L'ultramétrique ψ est définie sur un ensemble fini $\{a, b, c, d\}$. L'image de gauche montre une représentation schématique des boules ultramétriques. L'image de droite montre le dendrogramme de la hiérarchie stratifiée correspondante. En pratique, une ultramétrique peut toujours être normalisée de façon à assigner la valeur de 1 au rayon de la plus petite boule qui contient tout l'ensemble (dans ce cas, B_3). L'Inégalité Ultramétrique peut être vérifiée, par exemple, avec les points a, b, et c : $1 = \psi(a, c) \leq max\{\psi(b, a), \psi(b, c)\} = max\{0.27, 1\} = 1$. La définition de cette ultramétrique particulière est donnée dans le paragraphe suivant.

4.2 Une Ultramétrique pour la Segmentation

Ce paragraphe propose la définition d'une ultramétrique appropriée pour la segmentation des images couleur. Dans ce but, on emploie la caractérisation de ce type de pseudo-métriques en tant que hiérarchies stratifiées.

Une famille de partitions emboîtées du domaine d'une image peut être construite au moyen d'une stratégie de fusion de régions [17, 11]. Une telle approche de regroupement consiste à fusionner progressivement les régions d'une partition initiale dans l'ordre déterminé par une mesure de dissimilarité entre les régions. La **dissimilarité** est une fonction d à valeurs réelles, définie pour tout couple de sous ensembles adjacents du domaine.

Typiquement, la dissimilarité formalise une notion de ressemblance entre les régions. Un exemple classique est la différence de couleur moyenne des régions [13]. Cependant, des facteurs tels la variance et la taille des régions [6, 35], l'orientation et la texture [47] sont souvent pris en compte.

Il faut néanmoins remarquer que, pour définir une hiérarchie stratifiée $\mathcal{H}$, la dissimilarité d doit être compatible avec l'ordre hiérarchique :

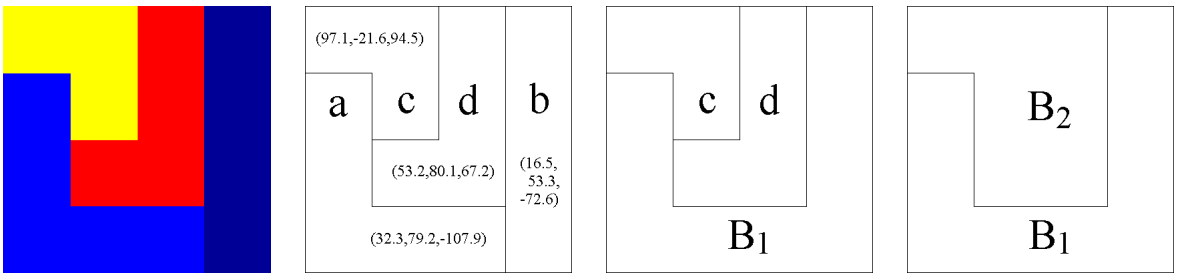
$$a \subset a' \wedge \ b \subset b' \Rightarrow d(a,b) < d(a',b'), \ \forall \ a, a', b, b' \in \mathcal{H}. \tag{3}$$

Or les exemples proposés dans la littérature ne satisfont que rarement l'Équation (3). Lorsque la dissimilarité et l'ordre hiérarchique sont incompatibles, un indice de stratification pour la famille de partitions peut encore être défini en considérant une fonction croissante de l'ordre de fusion. Cependant, dans ce cas, l'ultramétrique résultante n'est plus directement liée à la dissimilarité.

4.2.1 Une Mesure de Contraste basée sur la Couleur

Dans notre cas, l'ultramétrique a été définie en deux étapes. La première consiste à utiliser l'information couleur pour mesurer le contraste entre les régions. Dans ce but, une **dissimilarité de contraste**, notée par d^c, est définie par la formule :

$$d^c(R_1, R_2) = \frac{\sum \delta^*(p_1, p_2)}{longueur(\partial R_1 \cap \partial R_2)},$$



(i) (ii) (iii) (iv)

FIG. 4 – Application de l'ultramétrique de contraste sur une image synthétique (voir texte).

où δ^* est la distance dans l'espace des couleurs L^*ab et la somme est calculée sur tous les pixels adjacents de la partition initiale tels que $p_1 \in R_1$ et $p_2 \in R_2$. Cette dissimilarité correspond donc à la distance couleur moyenne sur la frontière commune des V-régions, mesurée dans la reconstruction des extrema. Notons que d^c est compatible avec l'ordre hiérarchique dans le sens de l'Équation (3). L'ultramétrique associée est notée par ψ^c.

La Figure 4 présente la hiérarchie stratifiée correspondant à l'exemple de la Figure 3. La distance employée est l'ultramétrique de contraste ψ^c, lorsque la partition initiale est l'image synthétique (i). L'image (ii) montre les classes d'équivalence, notées par $\{a, b, c, d\}$, correspondant aux quatre composantes connexes de l'image, ainsi que les coordonnées de leurs couleurs dans l'espace L^*ab. Les images (iii) et (iv) présentent les partitions de Voronoï $\Pi(\psi^c, 0.27)$ et $\Pi(\psi^c, 0.68)$ respectivement.

Il faut remarquer que notre démarche est proche de la méthode de segmentation morphologique appelée la *dynamique* [18]. Celle-ci est issue de la construction de la LPE au moyen de la simulation d'un processus d'inondation [8]. Le module du gradient d'une image, interprété comme une surface topographique, est inondé à partir de ses minima régionaux. L'eau forme des lacs dans les vallées et, lorsque deux lacs se rencontrent, ils sont fusionnés. Ainsi, des niveaux croissants d'eau produisent des partitions de plus en plus grossières. En termes de fusion de régions, la partition initiale est composée par les bassins versants des minima et la dissimilarité est définie comme l'altitude du premier point col entre deux lacs adjacents, c'est à dire, la valeur minimale du gradient sur le bord commun des régions [33]. La dynamique induit donc une ultramétrique qui mesure aussi le contraste. Cependant, la LPE est une transformation définie pour les

images monochromatiques. L'application de la dynamique aux images couleur passe donc par la définition d'un gradient couleur [44]. Le traitement de l'information couleur se fait donc en amont et est indépendant de la méthode. En outre, le résultat dépend du choix de l'approximation discrète du gradient. Signalons enfin que notre approche, comme la LPE, substitue une variable scalaire (la distance) au vecteur couleur. À l'inverse, on peut aussi segmenter séparément les différents canaux de couleur et synthétiser l'information plus en aval, comme dans [2].

4.2.2 Prise en compte de l'information interne des régions

L'ultramétrique ψ^c du paragraphe précédent mesure le contraste d'une image couleur. Celui-ci n'est cependant qu'un parmi les nombreux éléments pris en compte dans les tâches de vision de haut niveau. La seconde étape de notre approche pour définir une ultramétrique adaptée à la segmentation des images couleur consiste à utiliser les caractéristiques internes des V-régions en complément à l'information de frontière de ψ^c.

Plus précisément, un **attribut**, une fonction $\mathcal{A}$ à valeurs réelles positives, est définie pour chaque région de Voronoï. L'attribut est calculé en employant l'information interne de la V-région et doit être croissant par rapport à l'ordre de l'inclusion.

Ainsi, à partir de d^c, une nouvelle dissimilarité d^α est définie par la formule :

$$d^\alpha(R_1, R_2) = d^c(R_1, R_2) \cdot min\{\mathcal{A}(R_1), \mathcal{A}(R_2)\}^\alpha.$$

Étant donnée que $\mathcal{A}$ est croissant et que d^c est compatible avec l'ordre hiérarchique, d^α l'est aussi. L'ultramétrique associée, notée par Υ^α, prend en considération aussi bien l'information interne des régions que celle de frontière. Pour les exemples présentés dans cet article, l'attribut choisi est l'aire de la V-région. Le paramètre $\alpha \geq 0$ pondère donc l'équilibre entre contraste et taille dans Υ^α. Le choix de α peut être vu comme l'introduction d'information de plus haut niveau dans l'ultramétrique, permettant son adaptation au contenu de l'image.

Notons que, comme pour la variation de chemin, la classe d'équivalence d'un point x déterminée par l'ultramétrique Υ^α coïncide avec la composante connexe de l'image qui contient x. Ainsi, l'espace quotient $\widehat{\Omega}(\Upsilon^\alpha)$ est aussi homéomorphe à l'espace des composantes connexes de l'image.

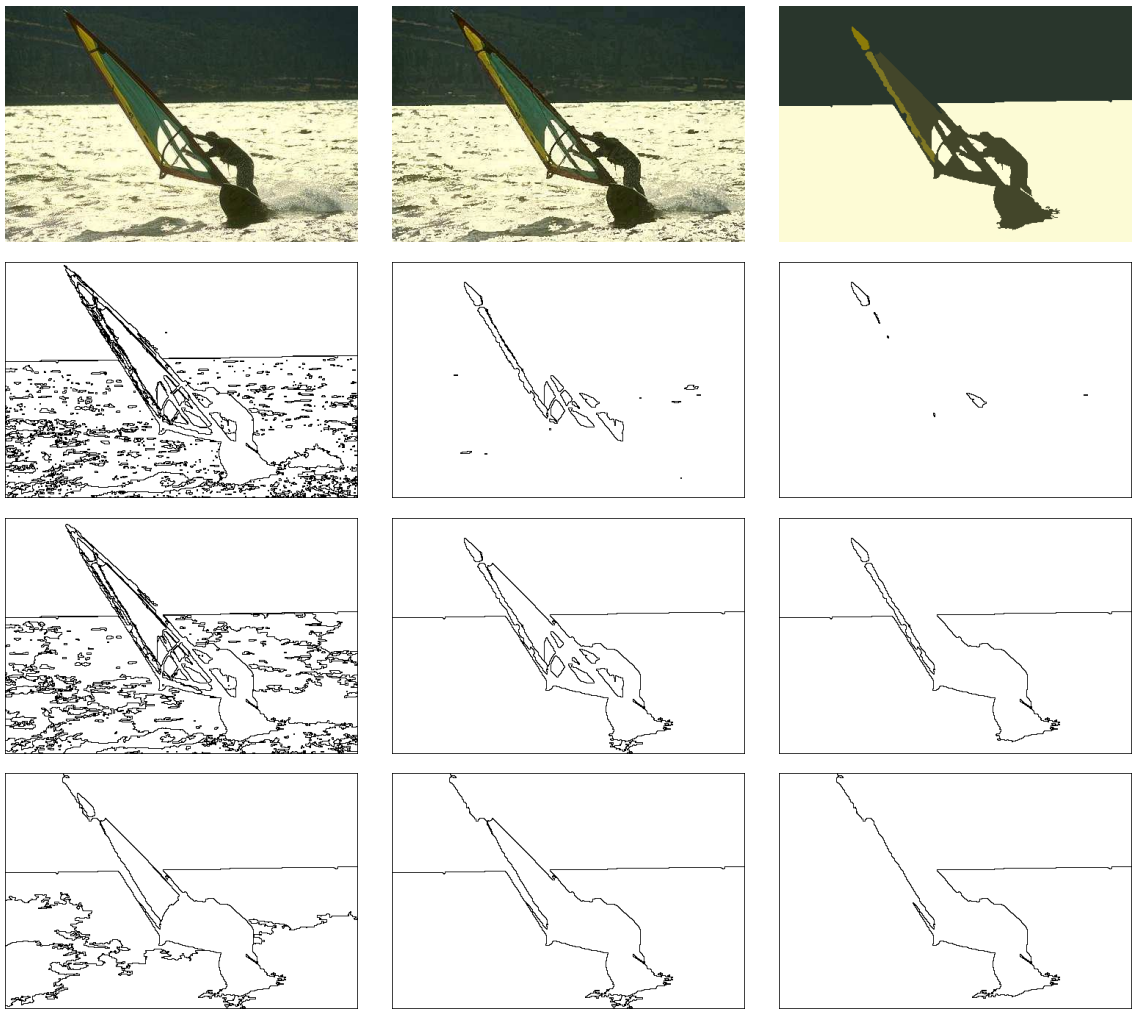


FIG. 5 – Influence du paramètre α dans les V-partitions (voir texte).

L'ultramétrique Υ^α détermine donc une représentation hiérarchique de l'image. Une telle représentation est utile pour des applications telles l'indexation d'images par le contenu, le codage et aussi la segmentation interactive, où un opérateur humain détermine le niveau optimal dans la hiérarchie pour une tâche ou un type d'images particuliers. Dans ces applications, la pertinence de la représentation est déterminée par sa capacité à fournir des partitions significatives pour les niveaux élevés de la hiérarchie, lorsque peu de régions restent.

La première ligne de la Figure 5 montre, de gauche à droite, l'image originale, la reconstruction des extrema et la segmentation associée à la V-partition $\Pi(\Upsilon^{0.1}, 0.45)$. Les trois autres

lignes illustrent l'influence du choix de α dans les partitions de Voronoï $\Pi(\Upsilon^\alpha, r)$. Le rayon r augmente de gauche à droite et α augmente de haut en bas. La deuxième ligne correspond à $\alpha = 0$. On est donc dans le cas de l'ultramétrique ψ^c qui prend uniquement en compte l'information de contraste. On peut observer que, lorsque le rayon croît, les régions les plus contrastées sont celles qui persistent dans la V-partition, indépendamment de leur taille ou de leur homogénéité. La troisième ligne montre les V-partitions pour $\alpha = 0.10$. Cette valeur du paramètre fournit un meilleur équilibre entre taille et contraste, permettant aux V-régions d'extraire plus précisément le contenu de l'image. Enfin, la valeur de α dans la quatrième ligne est de 0.4. Dans ce cas, la taille des V-régions est prépondérante dans les V-partitions.

Notons enfin que notre approche peut être vue comme une extension des *hiérarchies d'inondation* employées fréquemment en segmentation morphologique où, lors de la construction de la LPE par inondation, l'aire, la profondeur ou le volume des lacs sont mesurés pour construire une hiérarchie des minima du gradient [32, 33].

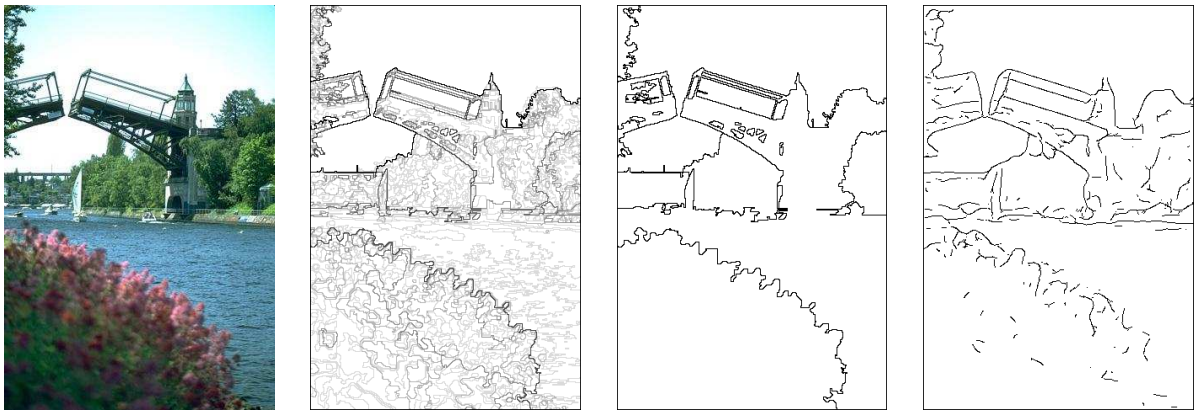
5 Contours Ultramétriques

5.1 Définition

On peut diviser les approches pour l'extraction des caractéristiques des images en deux grandes catégories : la segmentation et la détection des bords. La première regroupe des méthodes qui cherchent à décomposer le domaine de l'image en régions. Les techniques de la seconde catégorie reposent pour leur part sur l'utilisation de mesures locales pour quantifier les discontinuités de l'image. Par suite, les algorithmes de segmentation en régions fournissent généralement des images de contours binaires. En revanche, les images de bords pondérés générées par les détecteurs locaux nécessitent souvent une étape postérieure de complétion pour obtenir des courbes fermées.

Dans notre cas, l'emploi des ultramétriques permet de pondérer les frontières des partitions de Voronoï de façon naturelle.

La *saillance* d'un point dans un espace ultramétrique (Ω, ψ) est définie comme le plus grand



(a) (b) (c) (d)

FIG. 6 – (a) Image originale. (b) Contours ultramétriques. (c) Seuillage de 0.47 des contours ultramétriques. (d) Seuillage de 0.13 d'un détecteur de bords récent [30].

rayon r tel que le point appartient à une frontière de la partition de Voronoï $\Pi(\psi, r)$. L'évaluation de chaque point de Ω par sa saillance détermine une image de frontières pondérées, appelée dans la suite les **contours ultramétriques**. Cette image est une description compacte de la hiérarchie stratifiée correspondante : un seuillage de λ dans les contours ultramétriques fournit l'ensemble des frontières de la V-partition $\Pi(\psi, \lambda)$. Cette idée fut employée pour la première fois dans [36] pour pondérer la LPE du gradient d'une image monochromatique.

La partie (b) de la Figure 6 présente un exemple de contours ultramétriques sur l'image de la partie (a). Les fortes valeurs de saillance sont représentées par des faibles intensités. L'image (c) montre un seuillage de 0.47 dans les contours ultramétriques, correspondant aux frontières de la V-partition $\Pi(\Upsilon^{\alpha}, 0.47)$. Pour comparaison, l'image (d) correspond au seuillage optimal d'un détecteur de bords local récent (voir la sous-section suivante).

Les contours ultramétriques sont donc une méthode d'extraction des contours qui bénéficie aussi bien des avantages des méthodes de segmentation en régions que de ceux des détecteurs locaux. Cette représentation intermédiaire est une image de bords pondérés, mais dont un simple seuillage fournit un ensemble de courbes fermées. Ces courbes sont déterminées par l'information globale de l'image et préservent les caractéristiques sémantiques importantes des frontières des objets tels les coins et les jonctions.

5.2 Évaluation des Résultats

Dans le but d'évaluer quantitativement les résultats de notre méthode de segmentation, la *Berkeley Segmentation Dataset and Benchmark* (BSDB) a été utilisée comme vérité terrain [29]. Cette base de données est constituée d'images représentant des scènes naturelles, segmentées manuellement par des humains.

Une méthodologie pour mesurer la performance des détecteurs de bords au moyen de cette base de données a été développée dans [30]. Elle repose sur la comparaison des bords détectés par la machine par rapport aux bords réels marqués par les humains en employant des courbes de *précision-rappel*, une technique standard en indexation de données. Plus précisément, deux mesures de qualité sont considérées, la *précision* (P), définie comme le quotient entre les bords réels détectés et le total des bords détectés et le *rappel* (R), donnée par le quotient entre les bords réels détectés et le total des bords réels. La mesure de ces quantités pour plusieurs seuils du détecteur définit une courbe paramétrique appelée *courbe de précision-rappel*. Enfin, les deux descripteurs sont combinés en une mesure de qualité unique, la *F-mesure*, donnée par la moyenne harmonique de la précision et le rappel : $F = 2PR/(P + R)$. La F-mesure maximale fournit donc un résumé statistique de la qualité du détecteur pour une image donnée.

Pour mesurer la performance globale d'un algorithme sur un ensemble d'images, nous avons calculé la précision et le rappel optimaux pour chaque image et nous avons ensuite utilisé la F-mesure de leurs moyennes sur toutes les images. Appliquée aux segmentations humaines lorsqu'elles sont comparées entre elles, la valeur de cette F-mesure globale est de 0.79 en $(P, R) = (0.90, 0.70)$. Ce résultat indique que le problème de la segmentation humaine pour des images naturelles est bien posé.

Les contours ultramétriques nous ont permis d'optimiser le paramètre de pondération des ultramétriques Υ^α au sein de ce cadre. La valeur optimale de α est 0.15 sur l'ensemble de 200 images d'entraînement de la BSDB. Cette méthodologie nous a aussi permis de mesurer l'influence des différents éléments de la méthode sur le résultat final. En particulier, la F-mesure globale de l'ultramétrique Υ^α est supérieure de 4.5% à celle obtenue avec l'ultramétrique de contraste ψ^c. Ce gain est dû à l'utilisation des attributs internes des V-régions (dans ce cas, la

taille) en complément de l'information de frontière. En outre, lorsque l'ultramétrique Υ^{α} est construite sur l'image originale au lieu de la reconstruction des extrema, on constate une diminution de 5.1% de la F-mesure globale. Ce résultat justifie le pré-traitement décrit dans la Section 3.3.

La même méthodologie nous a permis de comparer notre approche avec le détecteur de bords de [30], qui mesure localement la luminosité, la couleur et la texture pour déterminer la probabilité qu'un pixel donné appartienne à un bord. Au moyen du cadre de précision-rappel, ces auteurs montrent que leur détecteur, appelé dans la suite MFM, surclasse toutes les techniques classiques de détection des bords. Il faut signaler que, même si certaines approches de segmentation en régions ont été développées en utilisant la BSDB [38, 16, 43], les seuls résultats benchmarqués à ce jour sont ceux du MFM.

Les contours ultramétriques et le détecteur MFM ont alors été comparés par rapport aux segmentations humaines sur l'ensemble des 100 images de test de la BSDB. La valeur de la F-mesure globale est $F = 0.67$ en $(P, R) = (0.64, 0.71)$ pour les contours ultramétriques et $F = 0.68$ en $(P, R) = (0.65, 0.72)$ pour le MFM. Les algorithmes présentent donc une performance presque identique et, malgré la différence des deux approches, même les valeurs de *précision* et de *rappel* sont proches. Les méthodes sont cependant encore loin du niveau de la performance humaine pour cette tâche.

Les Figures 7 et 8 présentent quelques résultats. La colonne (a) montre les images originales et la colonne (b) les segmentations humaines, où les intensités faibles correspondent aux pixels marqués par plusieurs sujets. Les colonnes (c) et (d) présentent respectivement le MFM et les contours ultramétriques. Le Tableau 1 présente la F-mesure maximale pour chaque image. La convention pour désigner les images est Figure-Ligne. Par exemple, 7-3 fait référence à l'image de la Ligne 3 dans la Figure 7.

Bien que la F-mesure globale soit presque la même pour les deux méthodes, la qualité du résultat diffère d'une image à l'autre. Ainsi, les contours des images contrastées et composées d'objets relativement homogènes sont mieux extraits avec les contours ultramétriques. En revanche, grâce à un traitement explicite de l'information de texture, la performance du MFM est souvent supérieure sur les régions texturées. Enfin, les deux méthodes ont des performances mé-

Image	Humains	C. U.			MFM		
	F	**F**	R	P	**F**	R	P
7-1	**0.96**	**0.92**	0.86	1.00	**0.86**	0.87	0.85
7-2	**0.86**	**0.87**	0.84	0.91	**0.81**	0.75	0.89
7-3	**0.87**	**0.79**	0.81	0.78	**0.76**	0.76	0.75
7-4	**0.88**	**0.83**	0.79	0.89	**0.84**	0.94	0.78
7-5	**0.89**	**0.81**	0.79	0.83	**0.80**	0.82	0.78
7-6	**0.94**	**0.76**	0.87	0.68	**0.78**	0.80	0.77
7-7	**0.81**	**0.47**	0.62	0.37	**0.56**	0.70	0.47
8-1	**0.86**	**0.76**	0.70	0.83	**0.78**	0.72	0.86
8-2	**0.93**	**0.82**	0.79	0.86	**0.79**	0.78	0.80
8-3	**0.81**	**0.76**	0.71	0.82	**0.78**	0.83	0.73

TAB. 1 – Comparaison entre les segmentations humaines, les contours ultramétriques et MFM.

diocres quand la cohérence entre les segmentations humaines est faible et lorsque l'information de haut niveau est déterminante, comme dans l'image 7-7.

6 Conclusion

Nous avons formulé la segmentation d'images couleur à partir de partitions de Voronoï généralisées de leurs domaines de définition. Ce cadre a été appliqué à la pré-segmentation et à la segmentation hiérarchique, pour aboutir à une méthode d'extraction des contours des images couleur.

La validation des résultats par rapport à une base de données de segmentations humaines a mis en évidence que les pseudo-métriques présentées dans cet article sont susceptibles d'extraire la structure géométrique des images couleur de scènes naturelles.

Les perspectives de ce travail incluent la définition de distances qui prennent en compte l'information de texture et la régularité des contours.

Références

[1] N. Ahuja, B. An, and B. Schachter. Image representation using Voronoi tessellation. *CVGIP*, 29(3) :286–295, March 1985.

[2] J. Angulo and J. Serra. Color segmentation by ordered mergings. In *Proc. of IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'03)*, pages 125–128, Barcelona, Spain, Sept. 2003.

[3] P. A. Arbeláez and L. D. Cohen. Path variation and image segmentation. In *Proc. EMMCVPR'03*, pages 246–260, Lisbon, Portugal, July 2003.

[4] P. A. Arbeláez and L. D. Cohen. Energy partitions and image segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2) :43–57, 2004.

[5] F. Aurenhammer and R. Klein. *Handbook of Computational Geometry*, chapter 5 : Voronoi Diagrams, pages 201–290. Elsevier Science Publishing, 2000.

[6] J.M. Beaulieu and M. Goldberg. Hierarchy in picture segmentation : a stepwise optimization approach. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(2) :150–163, February 1989.

[7] J. P. Benzécri. *L'Analyse des Données. Tome I : La Taxinomie*. Dunod, Paris, 4ème edition, 1984.

[8] S. Beucher and F. Meyer. *Mathematical Morphology in Image Processing*, chapter 12 : The Morphological Approach to Segmentation : The Watershed Transformation, pages 433–481. Marcel Dekker, 1992.

[9] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models : A minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1) :57–78, August 1997.

[10] L. D. Cohen. Multiple contour finding and perceptual grouping using minimal paths. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :225–236, 2001.

[11] A. Colantoni and P. Tremeau. Regions adjacency graph applied to color image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(4) :735–744, 2000.

[12] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of minimal paths in 3D images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*, 5(4) :281–299, 2001.

[13] F. Dibos and G. Koepfler. Segmentation d'images couleur par méthode variationnelle. In *Actes du 16eme Colloque GRETSI*, pages 367–370, 1997.

[14] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathemetic*, 1 :269–271, 1959.

[15] P. G. L. Dirichlet. Uber die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zalhen. *J. Reine Angew. Mathematik*, 40 :209–227, 1850.

[16] C. Fowlkes, D. Martin, and J. Malik. Learning affinity functions for image segmentation : Combining patch-based and gradient-based approaches. In *Proc. CVPR*, pages 54–61, Madison, WI, USA, 2003.

[17] L. Garrido, P. Salembier, and D. Garcia. Extensive operators in partition lattices for image sequence analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 66(2) :157–180, April 1998. Special Issue on Video Sequence Segmentation.

[18] M. Grimaud. New measure of contrast : Dynamics. In *Image Algebra and Morphological Processing III*, SPIE, San Diego, USA, 1992.

[19] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhauser, Boston, 1999.

[20] C. Jordan. Sur la série de fourier. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série Mathématique.*, 92(5) :228–230, 1881.

[21] J. L. Kelley. *General Topology*. Springer, 1975.

[22] R. Kimmel and A. M. Bruckstein. Global shape from shading. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :360–369, 1995.

[23] R. Kimmel, N. Kiryati, and A. M. Bruckstein. Distance maps and weighted distance transforms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6 :223–233, May 1996. Special Issue on Topology and Geometry in Computer Vision.

[24] R. Kruse and A. Ryba. *Data structures and program design in C++*. Prentice Hall, New York, 1999.

[25] K. Kuratowski. *Topology*, volume I. Academic Press, 1966.

[26] Ch. Lantuejoul. *La Squelettisation et son Application aux Mesures Topologiques des Mosaïques Polycristallines*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1978.

[27] R. Malladi and J.A. Sethian. A unified approach to noise removal, image-enhancement, and shape recovery. *IEEE Trans. on Image Processing*, 5(11) :1554–1568, November 1996.

[28] P. Maragos and M. A. Butt. Curve evolution, differential morphology and distance transforms applied to multiscale and eikonal problems. *Fundamenta Informaticae*, 41 :91–129, 2000.

[29] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proc. ICCV'01*, volume II, pages 416–423, Vancouver, Canada, 2001.

[30] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color and texture cues. *IEEE Trans. on PAMI*, 26(5) :530–549, 2004.

[31] N. Mayya and V.T. Rajan. Voronoi diagrams of polygons : A framework for shape representation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6(4) :355–378, December 1996.

[32] F. Meyer, A. Oliveras, P. Salembier, and C. Vachier. Morphological tools for segmentation : Connected filters and watersheds. *Annals of Telecommunications*, 52(7-8) :367–379, 1997.

[33] F. Meyer. Hierarchies of partitions and morphological segmentation. In Michael Kerckhove, editor, *Scale Space and Morphology in Computer Vision*, pages 161–182, 2001.

[34] F. Meyer. An overview of morphological segmentation. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 15(7) :1089–1118, 2001.

[35] P.F.M. Nacken. Image segmentation by connectivity preserving relinking in hierarchical graph structures. *PR*, 28(6) :907–920, June 1995.

[36] L. Najman and M. Schmitt. Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Trans. on PAMI*, 18(12) :1163–1173, 1996.

[37] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu. *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, 2 edition, 2002.

[38] X. Ren and J. Malik. Learning a classification model for segmentation. In *Proc. ICCV'03*, pages 10–17, 2003.

[39] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.

[40] J. Serra and P. Salembier. Connected operators and pyramids. In SPIE, editor, *Image Algebra and Mathematical Morphology*, volume 2030, pages 65–76, San Diego, CA, July 1993.

[41] J. Serra. A lattice approach to segmentation. *Rapport Technique CMM - Ecole des Mines de Paris, N-02/04/MM*, 2004.

[42] M. Tuceryan and A.K. Jain. Texture segmentation using Voronoi polygons. *IEEE Trans. on PAMI*, 12(2) :211–216, February 1990.

[43] Z. Tu and S.C. Zhu. Image segmentation by data driven markov chain monte carlo. *IEEE Trans. on PAMI*, 24(5) :657–673, 2002.

[44] I. Vanhamel, I. Pratikakis, and H. Sahli. Multiscale gradient watersheds of color images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 12(6), 2003.

[45] G. M. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. premier mémoire : Sur quelques proprietés des formes quadratiques positives parfaites. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 133 :97–178, 1907.

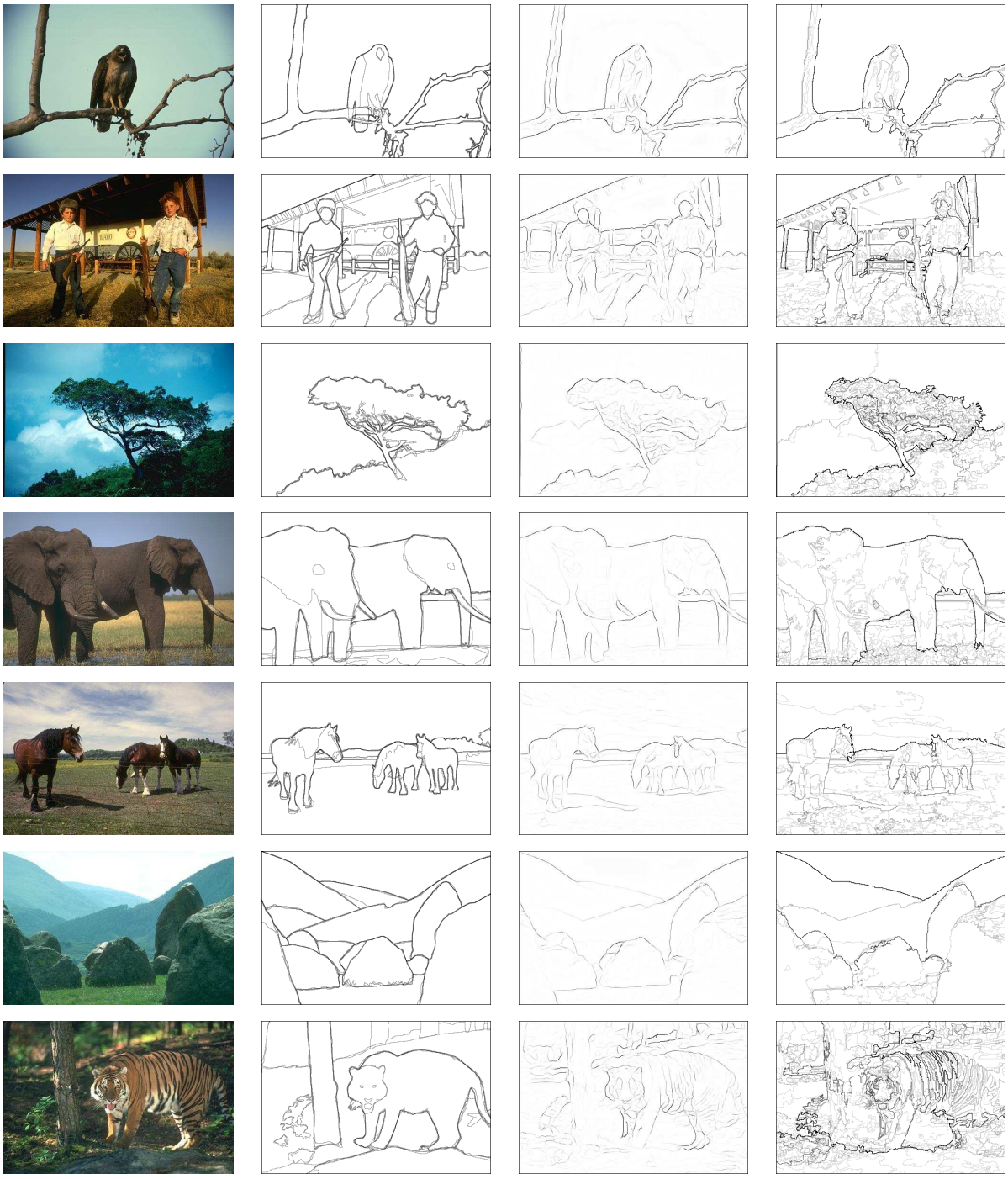
[46] G. Wyszecki and W. S. Stiles. *Color Science : Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulas*. J. Wiley and Sons, 1982.

[47] W. Yu, J. Fritts, and F. Sun. A hierarchical image segmentation algorithm. In *Proc. ICME'02*, pages 221–224, August 2002.

Pablo Andrés Arbeláez a reçu le B.Sc. en Mathématiques de l'Universidad de los Andes à Bogotá, Colombie en 1997. En 2000, il a obtenu le DEA en Mathématiques Appliquées à l'Ingénierie de l'Université Paris Dauphine. Depuis, il prépare sa thèse doctorale au sein du groupe de Mathématiques Appliquées et Traitement d'Images au CEREMADE à l'Université Paris Dauphine. Sa recherche porte sur la Segmentation d'Images et la Vision par Ordinateur.

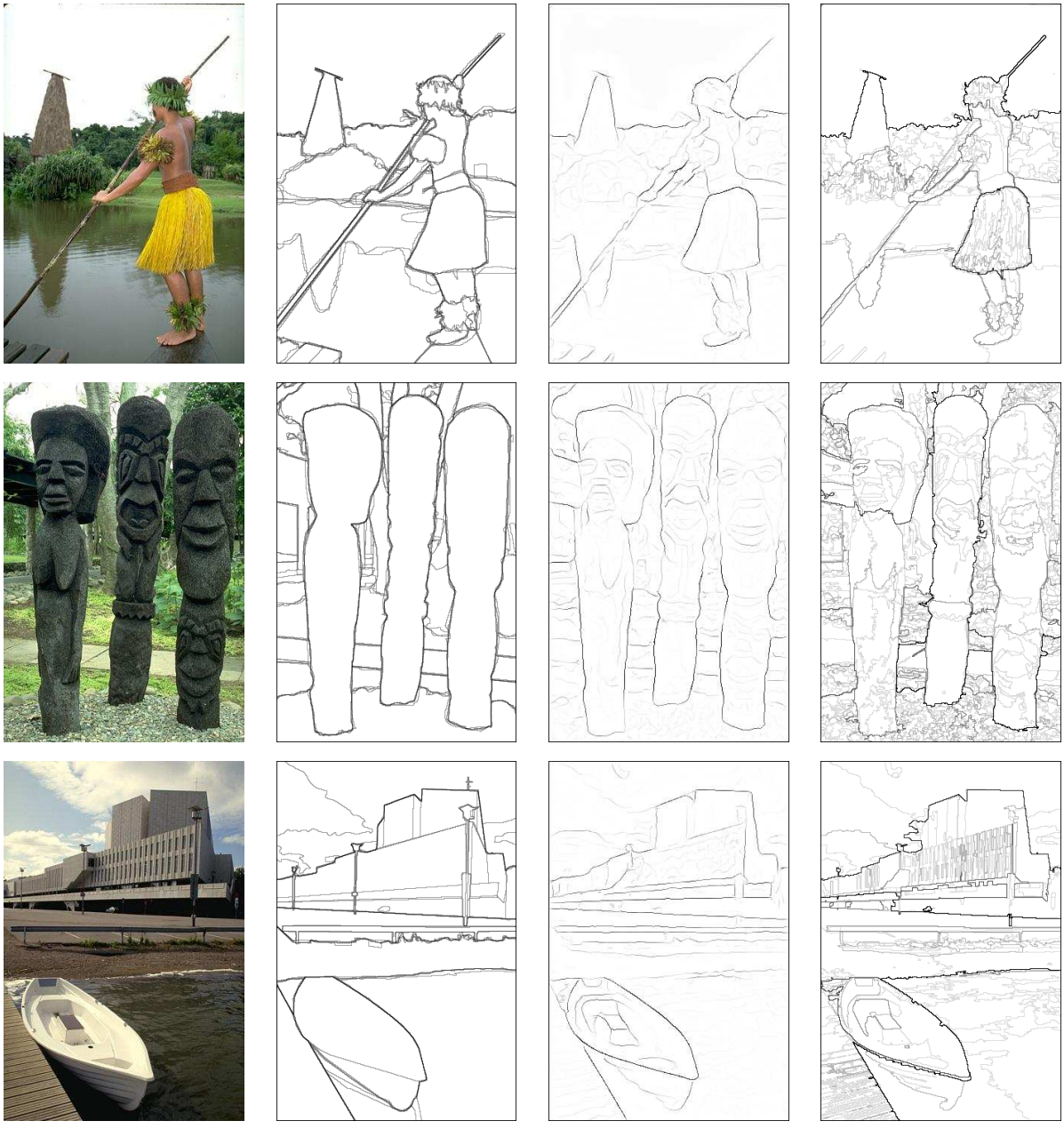
Laurent D. Cohen est né en 1962. Il a été élève à l'**Ecole Normale Supérieure**, rue d'Ulm à Paris de 1981 à 1985. Il a obtenu DEA et doctorat en Analyse Numérique à l'université Paris 6 en 1983 et 1986 respectivement. De 1985 à 1987, il a été membre du groupe 'Computer Graphics and Image Processing' à Schlumberger Palo Alto Research, Palo Alto, Californie puis à Schlumberger Montrouge Recherche, Montrouge, France. Il est resté consultant en Traitement d'Images pour Schlumberger quelques années par la suite, puis pour d'autres entreprises. Il a été chercheur puis collaborateur extérieur à l'INRIA de 1988 à 1996, surtout avec le groupe

d'analyse d'images médicales Epidaure. Depuis 1990, il est Chercheur au CNRS (Chargé puis Directeur de Recherche) dans le groupe de Mathématiques Appliquées et Traitement d'images du CEREMADE à l'Université Paris-Dauphine. Sa recherche et son enseignement à l'université portent sur les applications des méthodes variationnelles et Équations aux Dérivées Partielles en Traitement d'images et Vision par Ordinateur, en particulier modèles déformables, chemins minimaux, reconstruction de surface, recalage, segmentation et restauration d'images. Il a reçu le prix CS 2002, Traitement du Signal et des Images, décerné par la société Communications et Systèmes, la SMAI et l'ASTI. Il a été dans les comités de programme ou d'organisation d'une vingtaine de congrès internationaux.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 7 – (a) Images originales (b) Segmentations humaines (c) Détecteur MFM (d) Contours Ultramétriques.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 8 – (a) Images originales (b) Segmentations humaines (c) Détecteur MFM (d) Contours Ultramétriques.