## Une Nouvelle Technique de Recalage d'Images avec des Contraintes aux Bords Libres : Application aux Mammographies

# A New Image Registration Technique With Free Boundary Constraints : Application To Mammography

F. Richard 1

L. Cohen<sup>2</sup>

<sup>1</sup> MAP 5, université Paris 5 <sup>2</sup> CEREMADE, université Paris 9

UFR de mathématiques et informatique, 45 rue des Saints Pères, 75270 Paris Cedex 06 frederic.richard@math-info.univ-paris5.fr

### Résumé

Dans des travaux récents, nous avons proposéun modèle de mise en correspondance d'images basé sur les niveaux de gris pour le recalage des mammographies. Contrairement aux modèles habituels, ce dernier permet de ne s'intéresser qu'à une région d'intérêt dans les images et de mettre en jeu des contraintes tirées d'informations sur les contours de ces régions. Celles-ci sont inscrites dans les conditions aux bords du problème de minimisation. Ceci empêche la correction d'éventuelles erreurs de prétraitement et peut parfois perturber le recalage près des contours. Dans cet article, nous présentons un nouveau modèle qui n'a pas ces défauts : le problème est défini avec des conditions aux bords libres et l'énergie à minimiser est complétée par un terme de segmentation qui permet le recalage correct de la région d'intérêt au niveau des contours. Nous construisons également un algorithme de résolution du problème et le mettons en œuvre de manière multigrille avec la méthode des éléments finis. Pour finir, nous appliquons cet algorithme aux mammographies.

### **Mots Clef**

Minimisation d'énergie, méthode variationnelle, EDP, éléments finis, multigrille, mise en correspondance d'images, recalage d'images, modèle déformable, mammographie.

#### **Abstract**

In a recent work, we proposed an image-matching model based on grey-level values for the mammogram registration. Contrary to the usual models, it allows to focus on a region of interest in the images and to bring into play some constraints based on the region contours. These constraints are expressed via the boundary conditions of the minimization problem. This prevents possible corrections of the pre-

processing faults during the matching process and may sometimes disrupts the registration near the contours. In this paper, we present a new image-matching model which does not have these drawbacks: the problem is defined with free boundary conditions and the minimization energy is completed with a segmentation term which allows to register correctly the regions of interest near the contours. We also design a resolution algorithm and give a multigrid implementation. We apply this algorithm to the mammograms.

### **Keywords**

Energy minimization, variational method, PDE, finite elements, multigrid, image matching, image registration, deformable model, mammography

#### 1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons au problème de recalage d'images. Notre objectif est le recalage des paires bilatérales et temporelles de mammographies. Comme nous pouvons le constater en lisant l'étude complète dans [1], de nombreux travaux concernant le problème du recalage d'images ont été effectués depuis le début des années 80. Toutefois, le recalage des mammographiques reste un problème ouvert dont l'enjeu en détection automatique du cancer est majeur [2, 3]. La plupart des techniques de recalage des mammographies ne s'appuient que sur les contours des seins [2, 3, 4, 5, 6] et, même si certaines d'entre elles sont non-rigides, elles ne parviennent pas à recaler de manière satisfaisante l'intérieur des seins. Dans [7, 8, 9, 10], les auteurs ont essayé de recaler de manière précise l'intérieur des seins avec la technique de Bookstein [11] utilisée avec des points d'encrage internes. Cependant, en suivant cette approche, les auteurs se sont heurtés aux difficultés liées à l'extraction des points d'encrage internes dans les mammographies.

Dans des travaux récents [12, 13, 14], F. Richard et C. Graffigne ont proposé un modèle de mise en correspondance d'images pour le recalage des mammographies. Leur approche ne repose pas sur l'utilisation des points d'encrage internes. Elle s'apparente davantage aux approches basées sur les niveaux de gris ([15, 16, 17, 18, 19]) qu'à celles basées sur les points d'encrage du type de celle de Bookstein. Cependant, elle diffère également de ces approches classiques. En effet, l'optique de l'approche n'est pas de mettre en correspondance des images entières mais exclusivement des régions d'intérêt dans les images. Aussi le modèle unifie-t-il dans un même cadre variationnel deux approches : une première fondée sur la segmentation des régions d'intérêt et une autre basée sur les niveaux de gris. Plus précisément, F. Richard et C. Graffigne posent un problème de minimisation d'énergie sur la région du sein et avec des conditions aux bords (de Dirichlet) qui sont dérivées d'une mise en correspondance préliminaire des contours des seins. Dans [12, 14], ils montrent que cette approche spécifique permet d'améliorer les temps de calculs et la précision du recalage. Cependant, les conditions aux bords de Dirichlet exercent des contraintes trop fortes et peuvent parfois empêcher un recalage correct des seins près des contours. De plus, étant données que ces conditions sont fixes, les éventuelles imprécisions des prétraitements (segmentation des mammographies et mise en correspondance des contours des seins) ne peuvent pas être corrigées pendant la mise en correspondance des images. La qualité de la mise en correspondance dépend donc de celle des prétraitements.

Dans cet article, nous introduisons un modèle qui est également destiné à la mise en correspondance de régions d'intérêt dans les images et qui n'a pas les défauts précédemment évoqués. Afin d'assouplir les contraintes aux bords et de pouvoir modifier la localisation et la mise en correspondance des contours pendant le traitement, nous utilisons des conditions aux bords libres. Nous complétons également l'énergie à minimiser par un terme de segmentation qui permet de recaler correctement les seins au niveau des contours.

Dans la partie 2, nous présentons cette nouvelle approche et formulons le problème de minimisation d'énergie. Dans la partie 3, nous dérivons l'énergie et décrivons un algorithme de descente de gradient pour la résolution numérique du problème. Nous proposons ensuite de mettre en œuvre cet algorithme en suivant une approche multigrille reposant sur la méthode des éléments finis. Dans la partie 4, nous commentons l'application de cet algorithme aux couples de mammographies.

### 2 Présentation Du Problème

### 2.1 Le Modèle Classique

Le cadre variationnel classique du problème de la mise en correspondance d'images est le suivant [15, 16, 17, 18, 19] : soient  $\Omega$  un ensemble connexe et ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $I^0$  et  $I^1$  deux images définies par interpolation sur  $\Omega$ .

Soit  $\mathcal{W}_a$  un espace formé d'applications régulières définies de  $\overline{\Omega}$  à valeurs dans lui-même. Notons  $I_\phi^0$  la transformée géométrique de  $I^0$  par l'élément  $\phi$  de  $\mathcal{W}_a$ :

$$\forall x \in \Omega, \ I_{\phi}^{0}(x) = I^{0} \circ \phi(x)$$

Établir une correspondance entre  $I^0$  et  $I^1$  consiste à trouver un élément  $\phi$  qui est aussi régulier que possible et tel que la transformée  $I_{\phi}^0$  est "similaire" à  $I^1$ . Ceci est exprimé sous la forme d'un problème inverse [15, 16, 17, 18, 19]:

**Modèle 1** Minimiser dans  $W_a$  une énergie  $J_a$  ayant la forme suivante :

$$J_a(u) = \frac{1}{2} A_{\Omega}(u, u) + \frac{\gamma_1}{2} |I_{\phi}^0 - I^1|_{\Omega}^2$$

avec certaines conditions aux bords de  $\Omega$ . Dans cette énergie, u est égale à  $\phi$  –  $\mathrm{Id}$  et  $|\cdot|_{\Omega}$  est la norme quadratique usuelle sur  $L^2(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ .

Cette énergie comprend deux termes. Le second terme dépend des images. Il s'agit d'un terme de mise en correspondance qui est d'autant plus faible que les images  $I_\phi^0$  et  $I^1$  sont similaires. Le premier terme régularise le problème et assure que ce dernier a une solution dans un espace d'applications homéomorphes. En général, ce terme est construit à partir d'énergies de déformations de la mécanique des milieux continus. Dans cet article, nous prenons l'énergie de l'élasticité linéarisée [20]. Celle-ci peut se définir à partir de la forme bilinéaire suivante :

$$A_{\Omega}(u,v) = \langle Lu, v \rangle_{\Omega} \tag{1}$$

Nous avons noté  $<\cdot,\cdot>_{\Omega}$  le produit scalaire usuel de  $L^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$  et L l'opérateur suivant : 1

$$Lu = -\operatorname{div}\{\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(u))\operatorname{Id} + 2 \mu \mathbf{e}(u)\}$$
 (2)

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels positifs et  $\mathbf{e}(u)$  est le tenseur des déformations linéarisé :

$$\mathbf{e}(u) = \frac{1}{2} \left( \nabla u^t + \nabla u \right)$$

Sur la figure 1, nous avons un exemple d'application du modèle 1 aux mammographies; cet exemple sera commenté dans la partie 4.

# 2.2 Mise en correspondance de régions avec des conditions aux bords fixes

Contrairement au précédent, le modèle de cette partie s'attache exclusivement à la mise en correspondance de régions d'intérêt dans les images.

Le cadre est le suivant [12, 13, 14] : supposons que les images  $I^0$  et  $I^1$  contiennent toutes les deux une unique

Soit M une matrice  $2\times 2$ ,  $\operatorname{tr}(M)$  égal à  $\sum_{k=1}^2 M_{k,k}$ . Soit m une application régulière définie de  $\Omega$  à valeurs dans un ensemble de matrices  $2\times 2$ , la valeur de  $\operatorname{div}\{m\}$  au point x de  $\Omega$  est un vecteur de taille 2 qui a pour  $i^{eme}$  composante  $\sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} m(x)_{i,j}$ .

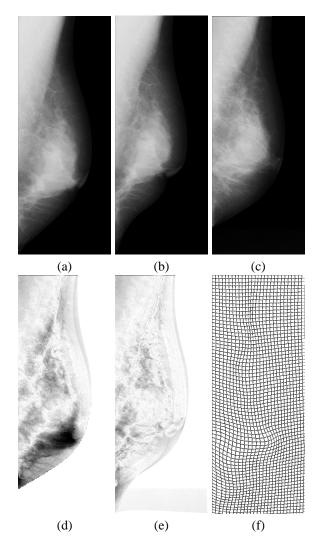


FIG. 1 – (a) L'image  $I^0$ , (b) l'image transformée  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 1, (c) l'image  $I^1$ , (d) la différence en valeur absolue entre les images  $I^0$  et  $I^1$ , (e) la différence en valeur absolue entre les images  $I^0_\phi$  et  $I^1$ , (f) l'image  $\phi(\Omega_1)$  par l'application  $\phi$  du domaine maillé  $\Omega_1$ . [noir=fortes différences, blanc=faibles différences]

région d'intérêt qui est localisée respectivement sur les ensembles ouverts et connexes  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  de  $\Omega$ . Notons  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$  les frontières respectives de  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Supposons que nous connaissons une mise en correspondance des contours  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$ . Notons  $\phi_0$  (ou  $\mathrm{Id}+u_0$ ) la fonction qui associe les coordonnées de  $\partial\Omega_1$  à celles de  $\partial\Omega_0$ . De manière à ne prendre en considération que les régions d'intérêt, nous ne définissons pas le problème de minimisation sur  $\mathcal{W}_a$  (voir partie 2.1) mais sur un espace  $\mathcal{W}_b$  composé d'applications régulières définies de  $\overline{\Omega_1}$  à valeurs dans  $\overline{\Omega_0}$ . Le problème inverse est formulé comme suit [12, 13, 14]:

**Modèle 2** *Minimiser dans*  $W_b$  *une énergie*  $J_b$  *ayant la forme suivante :* 

$$J_b(u) = \frac{1}{2} A_{\Omega_1}(u, u) + \frac{\gamma_1}{2} |I_{\phi}^0 - I^1|_{\Omega_1}^2$$

avec les conditions aux bords de Dirichlet non-homogènes suivantes :

$$\forall x \in \partial \Omega_1, \ u(x) = u_0(x) = \phi_0(x) - x$$

Les termes de l'énergie  $J_b$  ont les mêmes définitions et jouent les mêmes rôles que ceux de l'énergie  $J_a$  du modèle 1. Toutefois, ils ne sont pas définis sur le domaine entier  $\Omega$  mais seulement sur la région d'intérêt  $\Omega_1$ . De plus, les conditions aux bords sont spécifiques aux régions d'intérêt et permettent de prendre en compte des informations provenant de la mise en correspondance de leurs contours. Des algorithmes de résolution numérique de ce problème sont proposés dans [12, 13, 14].

# 2.3 Mise en correspondance de régions avec des conditions aux bords libres

Dans le modèle précédent, d'importantes contraintes relatives à la région d'intérêt des images sont introduites dans le modèle par le biais des conditions aux bords. Ces dernières conditions exercent cependant une contrainte trop forte à proximité des contours. Pour assouplir cette contrainte, nous proposons ici un modèle pour lequel les conditions aux bords sont libres.

Pour avoir des conditions aux bords libres, nous ne définissons pas le problème de minimisation sur  $W_b$  (voir partie 2.2) mais sur un espace W composé d'applications régulières définies de  $\overline{\Omega_1}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit, les applications  $\phi$  restent définies sur la région d'intérêt de  $I^1$  mais peuvent prendre leurs valeurs en dehors de la région d'intérêt de  $I^0$ .

Le problème inverse est le suivant :

Minimiser dans W une énergie  $J_c$  ayant la forme suivante :

$$J_{c}(u) = \frac{1}{2} A_{\Omega_{1}}(u, u) + \gamma_{1} \frac{1}{2} |I_{\phi}^{0} - I^{1}|_{\Omega_{1}}^{2} + \gamma_{2} \int_{\Omega - \phi(\Omega_{1})} S(|I^{0}(x)|^{2}) dx$$

avec des conditions aux bords libres sur la frontière de  $\Omega_1$ .

Comme dans les modèles 1 et 2, l'énergie comporte les termes de mise en correspondance et de régularisation. Elle possède en outre un terme qui est exprimé en fonction des valeurs de niveaux de gris de l'image  $I^0$ . Il s'agit d'un terme de segmentation qui contraint les points de l'ensemble  $\Omega$  qui ne sont pas l'image par  $\phi$  d'un point de l'ensemble  $\Omega_1$  à être des coordonnées du fond de l'image  $I^0$ .

**Remarque 1** La fonction S est régulière. Supposons qu'une segmentation de l'image  $I^0$  puisse être obtenue de manière robuste par seuillage, c'est à dire qu'il existe une valeur  $\eta$  telle que

 $\mid I^0(x)\mid^2 < \eta \text{ \'equivaut \`a }x \text{ est sur le fond de l'image }I^0$  Nous pouvons alors prendre comme fonction S une version lissée de la fonction qui vaut  $0 \text{ sur }] - \infty, \eta[$  et  $1 \text{ sur }[\eta, +\infty[$ . La valeur de S en un point r de  $\mathbb R$  peut s'interpréter comme la probabilité qu'a un site y de ne pas être sur le fond de l'image  $I^0$  lorsque  $\mid I^0(y)\mid^2$  est égal à r. Dans le cas où la segmentation n'est pas sûre, nous pouvons estimer ces probabilités pour construire S. Dans l'application aux mammographies, nous estimons cette probabilité par rapport à la segmentation de  $I^1$ : la valeur de S en r est égale au nombre de pixels x qui sont sur le domaine  $\Omega_1$  et pour lesquels  $\mid I^1(x)\mid^2$  vaut r rapporté au nombre total de pixels pour lesquels  $\mid I^1(x)\mid^2$  vaut r.

Remarque 2 A la différence du modèle 2, nous n'avons pas besoin de segmentation préalable de la région d'intérêt de  $I^0$  pour définir le problème de minimisation précédent. La résolution du problème peut même servir à trouver une bonne segmentation de l'image  $I^0$ : pour obtenir le contour de la région d'intérêt de  $I^0$ , il suffit de prendre l'image  $\phi(\partial\Omega_1)$  de  $\partial\Omega_1$  par l'application  $\phi$  qui réalise un minimum. Dans le problème de minimisation, l'inconnue  $\phi(\partial\Omega_1)$  est analogue à un contour actif [21, 22].

**Remarque 3** Pour que le problème du modèle précédent soit défini, nous supposerons que  $\mathcal{W}$  est un sous-espace de l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(\overline{\Omega_1};\mathbb{R}^2)$ . Nous supposerons également que

$$\mathcal{W} \subset \{\phi : \overline{\Omega_1} \to \mathbb{R}^2, \, \det(\nabla \phi) > 0\}$$

Lorsque ces dernières conditions sont remplies, nous remarquons que

$$\int_{\Omega - \phi(\Omega_1)} S(\mid I^0(x)\mid^2) dx = \int_{\Omega} S(\mid I^0(x)\mid^2) dx - \int_{\Omega_1} S(\mid I^0_{\phi}(x)\mid^2) \det(\nabla \phi) dx$$

De ce fait, le problème de minimisation précédent est équivalent au problème suivant :

**Modèle 3** *Minimiser dans W une energie J ayant la forme suivante :* 

$$J(u) = \frac{1}{2} A_{\Omega_1}(u, u) + \frac{\gamma_1}{2} |I_{\phi}^0 - I^1|_{\Omega_1}^2 - \gamma_2 \int_{\Omega_1} S(|I_{\phi}^0(x)|^2) \det(\nabla \phi) dx \quad (3)$$

avec des conditions aux bords libres sur la frontière de  $\Omega_1$ .

### 3 Résolution du problème

Pour la résolution numérique du problème de minimisation du modèle 3, nous construisons un algorithme de descente de gradient. Dans la partie 3.1, nous dérivons l'énergie et exprimons cet algorithme sous la forme d'une EDO (Equation Différentielle Ordinaire). Dans la partie 3.2, nous proposons de discrétiser spatialement l'EDO en nous appuyant sur la méthode de Galerkin. Dans la partie 3.3, nous décrivons une méthode pour initialiser l'EDO. Dans la partie 3.4, nous présentons une mise en œuvre multigrille de l'EDO.

### 3.1 Algorithme de descente de gradient

La dérivée de l'énergie J (équation 3) au point u de  $\mathcal W$  est la suivante : pour tout v dans  $\mathcal W$ 

$$dJ_{u}(v) = A_{\Omega_{1}}(u, v) + \gamma_{1} < (I_{\phi}^{0} - I^{1}) \nabla I_{\phi}^{0}, v >$$

$$-2 \gamma_{2} \int_{\Omega_{1}} \det(\nabla \phi) S'(|I_{\phi}^{0}|^{2}) \nabla I_{\phi}^{0} \cdot v \ dx$$

$$-\gamma_{2} \int_{\Omega_{1}} S(|I_{\phi}^{0}|^{2}) \operatorname{tr}(\operatorname{cof}(\nabla \phi)^{t} \cdot \nabla v) \ dx$$

Puisque

$$\begin{split} \int_{\Omega_1} & S(\mid I_\phi^0\mid^2) \, \operatorname{tr}(\operatorname{cof}(\nabla \phi)^t \cdot \nabla v) \, \, dx = \\ & - \int_{\Omega_1} \, \operatorname{div}\{S(\mid I_\phi^0\mid^2) \, \operatorname{cof}(\nabla \phi)\} \cdot \nabla v \, \, dx \end{split}$$

le gradient de l'énergie J pour le produit scalaire  $A_{\Omega_1}(\cdot,\cdot)$  est donné par :

$$\nabla J_u = u - L^{-1} F(\phi(t)) \tag{4}$$

où L est l'opérateur défini dans l'équation 2 et F est la fonction suivante :

$$F(\phi) = -\gamma_1 (I_{\phi}^0 - I^1) \nabla I_{\phi}^0 + 2 \gamma_2 \det(\nabla \phi) S'(|I_{\phi}^0|^2) \nabla I_{\phi}^0 - \gamma_2 \det\{S(|I_{\phi}^0|^2) \cot(\nabla \phi)^t\}$$
(5)

De ce qui précède, nous déduisons que la descente de gradient de l'énergie J peut être exprimée sous la forme de l'EDO suivante :

Algorithme 1 (descente de gradient)

$$\forall t > 0, \ \frac{du}{dt}(t) = -u(t) + \delta(t) \quad \text{et} \quad u(0) = M_0 \quad (6)$$

où  $M_0$  sera précisé dans la partie 3.3 et, à chaque temps t,  $\delta(t)$  est la solution de l'équation suivante :

$$L \, \delta = F(\phi(t)) \tag{7}$$

$$avec \ \phi(t) = \mathrm{Id} + u(t).$$

### 3.2 Discrétisation de l'algorithme

Pour la mise en œuvre de l'algorithme 1, nous discrétisons l'équation 7 avec la méthode de Galerkin [23]. Dans un premier temps, nous remarquons que l'équation 7 est formellement équivalente à l'équation variationnelle suivante :

$$\forall v \in \mathcal{W}, \ A_{\Omega_1}(\delta, v) = \langle F(\phi(t)), v \rangle$$
 (8)

où F est défini dans l'équation 5. Nous choisissons un espace  $\mathcal{W}^h$  qui est inclus dans  $\mathcal{W}$  et engendré par une famille finie de fonctions à support compact (notée  $\{\psi_i^h\}_{i\in I_h}$ ). Pour approcher la solution de l'équation 8, nous cherchons une solution de l'équation variationnelle approchée dans l'espace  $\mathcal{W}^h$ , c'est à dire :

$$\forall v \in \mathcal{W}^h, A_{\Omega_1}(\delta, v) = \langle F(\phi(t)), v \rangle$$

La solution de cette équation a la forme suivante :

$$\delta^h = \sum_{i \in I_h} \beta_j^h \, \psi_j^h \tag{9}$$

où les coefficients  $\beta^h_j$  sont solution du système linéaire suivant :

$$\forall i \in I_h, \sum_{j \in I_h} \beta_j A_{\Omega_1}(\psi_j^h, \psi_i^h) = \langle F(\phi(t)), \psi_i^h \rangle$$
 (10)

Pour construire les espaces d'approximation  $\mathcal{W}^h$ , nous faisons la partition du domaine  $\Omega_1$  en h/2 carrés de taille fixe. Nous définissons  $\mathcal{W}^h$  comme étant l'espace des fonctions  $C^1$  sur l'ensemble du domaine et polynômiales sur chacun des carrés de la partition.

**Remarque :** Pour être partitionné, le domaine  $\Omega_1$  peut être légèrement modifié près de ses frontières. Ceci peut produire des erreurs de segmentation. Cependant, ces dernières sont prises en compte dans le modèle 3 par le biais de l'estimation de la fonction S (voir la partie 2.3).

### 3.3 Initialisation de l'algorithme

Contrairement au modèle 2, la mise en correspondance des contours des régions d'intérêt n'est pas utilisée dans la construction du modèle 3. Cependant, il est intéressant de l'exploiter pour obtenir une meilleure initialisation de l'EDO. Aussi définissons-nous les déplacements  $M_0$  de l'équation 6 comme les solutions du problème du modèle 2 quand  $\gamma_1$  est égal à zéro. Comme cela est montré dans [12, 13, 14],

$$M_0 = u_0 + \delta_0$$

où  $u_0$  est défini dans la partie 2.2 et  $\delta_0$  est la solution dans  $\mathcal{W}_0$  du problème variationnel suivant :<sup>2</sup>

$$\forall v \in \mathcal{W}_0, A_{\Omega_1}(\delta, v) = -A_{\Omega_1}(u_0, v)$$

Selon la méthode de Galerkin (cf. partie 3.2),  $\delta_0$  peut être approché par les déplacements  $\delta_0^h$  suivants :

$$\delta_0^h = \sum_{j \in I_h} \beta_{j,0}^h \, \psi_j^h \in \mathcal{W}_0^h \tag{11}$$

où les coefficients  $\beta_{j,0}^h$  sont solution du système linéaire suivant :

$$\forall i \in I_h, \ \sum_{j \in I_h} \beta_{j,0}^h A_{\Omega_1}(\psi_j^h, \psi_i^h) = -A_{\Omega_1}(u_0, \psi_i^h) \ (12)$$

### 3.4 Mise en œuvre multigrille

Pour réduire les temps de calcul et parvenir à une meilleure minimisation de l'énergie, nous proposons de mettre en œuvre l'algorithme de manière multigrille avec une stratégie de type " plus grossier au plus fin ". Nous définissons une suite  $\{\mathcal{W}^{h(k)}\}_k$  de sous-espaces ayant les propriétés décrites dans le partie 3.2 et étant emboîtés :

$$\mathcal{W}^{h(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{W}^{h(K)} \subset \cdots \subset \mathcal{W}$$

Nous discrétisons l'EDO par rapport au paramètre de temps et obtenons le schéma de résolution suivant :

Algorithme 2 (Mise en œuvre multigrille) Comme cela est décrit dans la partie 3.3, nous initialisons l'EDO comme suit:

$$u(0) = u_0 + \delta_0^{h(K)}$$

où  $u_0$  est défini dans le partie 2.2 et  $\delta_0^{h(K)}$  est la solution des équations 11 et 12 dans l'espace  $\mathcal{W}_0^{h(K)}$ .  $\mathbf{k^{ieme}}$  itération (k > 0):

$$u(k+1) = u(k) + \epsilon \delta(k)$$

où  $\epsilon$  est un réel positif petit et  $\delta(k)$  est la solution dans  $W^{h(k)}$  des équations 9 et 10 avec t égal à k.

### 4 Application aux mammographies

La paire de mammographies bilatérales qui est montrée sur les figures 2 (a) et (f) provient de la base de données MIAS [24]. En comparant les deux images et en observant leur différence en valeur absolue (figure 3 (a)), nous remarquons qu'elles ont de nombreuses asymétries importantes (dues notamment à des différences de forme des seins). En regardant ensuite l'image  $I^0$  (figure 2 (a)) et sa transformée géométrique  $I_{\phi}^{0}$  après initialisation (figure 2 (b)), nous nous rendons compte que l'étape d'initialisation modifie la forme du sein et la position du téton dans l'image  $I^{0}$ . Comme nous pouvons le constater sur la figure 3 (b), ces modifications ont pour effet de corriger non seulement les asymétries près des contours mais aussi certaines différences internes. Toutefois, en raison d'un manque de précision résultant du prétraitement (segmentation des mammographies et mise en correspondance des

 $<sup>^2</sup>$ L'espace  $\mathcal{W}_0$  est composé d'applications régulières définies de  $\overline{\Omega_1}$  à valeurs dans  $\overline{\Omega_0}$  qui sont nulles sur  $\partial\Omega_1$ .

 $<sup>^3</sup>$ Dans toutes les expériences que nous présentons, les paramètres des différents modèles  $(\mu,\lambda,\gamma_1$  et  $\gamma_2)$  ont été choisis empiriquement mais ne sont pas changés de l'application d'un modèle à l'autre.

contours des seins) et de la discrétisation de l'algorithme, les asymétries près des contours ne sont pas parfaitement corrigées : dans la figure 2 (b), nous remarquons un petit liseré sombre dans la partie haute des contours. En outre, il reste d'importantes différences internes.

Toutefois, la plupart de ces différences internes sont supprimées après l'application de l'algorithme du modèle 2. En effet, en comparant l'image transformée  $I_\phi^0$  de la figure 2 (c) et l'image  $I^1$  (figure 2 (f)) et en regardant leur différence en valeur absolue (figure 3 (c)), nous constatons que cet algorithme permet de corriger des asymétries importantes résultant de différences dans la forme et la position des régions denses des images (muscle, disque fibro-glandulaire). Remarquons au passage que le modèle 2 donnent de meilleurs résultats que le modèle 1 : en particulier, comme nous pouvons le voir sur les figures 1 (e) et 3 (c), les contours des seins sont mieux recalés.

Cependant, il reste encore plusieurs différences dans la paire d'images corrigées par le modèle 2. Certaines d'entres elles sont dues à des disparités entre les tissus des deux seins et ne peuvent donc pas être supprimées par une transformation géométrique de  $I^0$ ; par exemple, les différences de la partie gauche des images qui résultent de disparités de densité des tissus.

Toutefois, ce recalage peut encore être amélioré. En particulier, dans la paire d'images corrigées (figure 3 (c)), nous observons toujours les différences près des contours. Ces dernières ne peuvent pas être corrigées par l'algorithme du modèle 2 du fait que les conditions aux bords sont fixes. Par ailleurs, une différence importante subsiste à proximité de l'emplacement des tétons. L'algorithme du modèle 2 n'est pas en mesure de corriger cette différence pour la raison suivante : l'emplacement de cette différence est très proche de celui des contours et les contraintes qui poussent au recalage des images sont opposées aux conditions aux bords. Comme nous pouvons le constater sur l'image des déformations (figure 4 (b)), cette opposition de contraintes se traduit par une forte compression au niveau de la différence. Une correction plus avancée de la différence n'est pas possible car elle accentuerait cette compression et augmenterait la valeur du terme de régularisation (équation 1).

Ces résultats sont radicalement différents de ceux de l'application du modèle 3. Nous rappelons que, dans ce modèle, les conditions aux bords sont libres. Par conséquent, les contraintes exercées au niveau des contours sont plus souples que dans le modèle 2. Ce relâchement de la contrainte permet un meilleur recalage des images près des contours. En regardant les figures 2 (d) et (e) et les images des différences sur les figures 3 (d) et (e), nous observons que l'algorithme (appliqué avec différentes valeurs de paramètre  $\gamma_2$ ) réussit à corriger complètement les différences près des tétons. De plus, comme nous pouvons le voir sur les figures 4 (c) et (d), les déformations sont moins compressées et plus régulières que celles obtenues avec le modèle 2. Ces résultats sont confirmés par la com-

| Modèle         | $\gamma_2$ | Recal.        | Régul. |
|----------------|------------|---------------|--------|
| Initialisation | -          | 26.4 %        | 478.5  |
| Modèle 2       | -          | 54.5 %        | 593.2  |
| Modèle 3       | 0          | 54.9 %        | 552.1  |
|                | 500        | 55.0 %        | 566.8  |
|                | 1000       | <b>55.2</b> % | 588.4  |

TAB. 1 – Comparaison de l'application des modèles 2 et 3. La colonne "Recal." donne une quantification de la qualité du recalage des images en pourcentage de la différence quadratique initiale en  $I^0$  et  $I^1$ : ( $\mid I^0-I^1\mid^2-\mid I_\phi^0-I^1\mid^2$ )/ $\mid I^0-I^1\mid^2\cdot 100$ . La colonne "Régul." donne la valeur du terme de régularisation (équation 1).

paraison quantitative du recalage donnée dans le tableau 1. Dans ce tableau, nous comparons également l'application du modèle 3 pour différentes valeurs du poids  $\gamma_2$  (poids du terme de segmentation) : l'algorithme appliqué sans le terme de segmentation ( $\gamma_2=0$ ) a de moins bons résultats que le même algorithme appliqué avec ce terme ( $\gamma_2=1000$ , par exemple). Comme nous pouvons l'observer sur les figures 3 (d) et (e), le premier algorithme met en correspondance une partie du sein dans  $I^1$  avec une partie du fond dans  $I^0$  tandis que le second ne commet pas cette erreur. La contrainte de segmentation est donc indispensable pour éviter que les deux seins soient mal recalés au niveau des contours.

En outre, grâce à la contrainte de segmentation et aux conditions aux bords libres, l'algorithme du modèle 3 peut raffiner la segmentation et la mise en correspondance initiales des contours : en comparant les figures 3 (b) et (e), nous remarquons que l'algorithme corrige légèrement les imprécisions initiales près des contours. Pour souligner cette propriété du modèle, nous avons fait l'expérience suivante : nous avons segmenté l'image  $I^0$ en effectuant un mauvais seuillage. A cause de cette erreur, les paires d'images corrigées après initialisation comportent d'importantes différences (figure 5 (a)). A nouveau, ces différences ne peuvent pas être corrigées par le modèle 2 (figure 5 (b)). Par contre, elles sont légèrement corrigées par l'algorithme du modèle 3 sans terme de segmentation et totalement corrigées par le même algorithme avec terme de segmentation. Ceci montre deux points : d'une part, les conditions aux bords étant libres, des corrections de la segmentation initiale des seins sont possibles. D'autre part, même si certaines corrections sont induites par le terme de recalage, le terme de segmentation est indispensable pour corriger convenablement les erreurs de segmentation des images. En comparant les figures 5 (e) et (f), nous pouvons observer les rectifications de position des contours qui sont apportées par l'algorithme du modèle 3.

### 5 Conclusion

Nous avons présenté un nouveau modèle de recalage d'images basé sur les niveaux gris. Contrairement aux

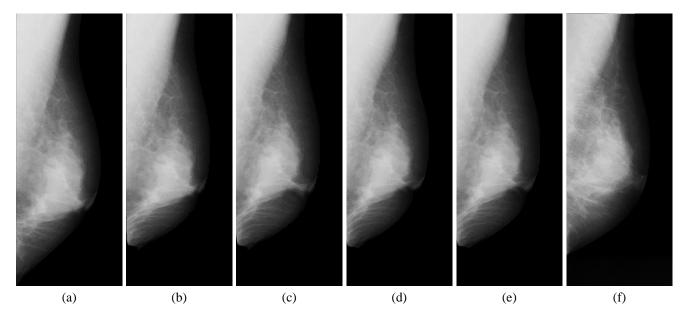


FIG. 2 – (a) L'image  $I^0$ , (b) l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'initialisation de l'algorithme, (c) l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 2, (d) l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 0, (e) l'image transformé  $I^0_\phi$  près l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 1000, (f) l'image  $I^1$ .

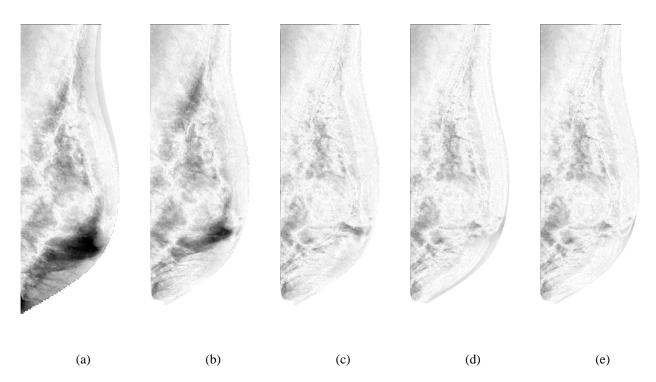


FIG. 3 – La différence en valeur absolue entre  $I^1$  (a) et  $I^0$ , (b) et l'image transformée  $I^0_\phi$  après l'initialisation de l'algorithme, (c) et l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 2, (d) et l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 0, (e) et l'image transformé  $I^0_\phi$  près l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 1000. [noir=fortes différences, blanc=faibles différences]

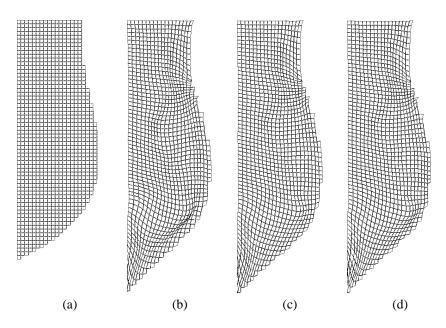


FIG. 4 – (a) Le domaine maillé du sein  $\Omega_1$  dans  $I^1$ , l'image  $\phi(\Omega_1)$  de  $\Omega_1$  par l'application  $\phi$  obtenue par application (b) du modèle 2 ,(c) du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 0 ,(d) du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 1000.

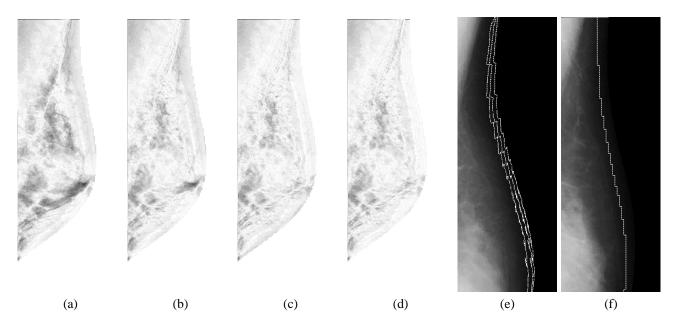


FIG. 5 – La différence en valeur absolue entre  $I^1$  (a) et l'image transformée  $I^0_\phi$  après l'initialisation de l'algorithme, (b) et l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 2, (c) et l'image transformé  $I^0_\phi$  après l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 0, (d) et l'image transformé  $I^0_\phi$  près l'application de l'algorithme du modèle 3 avec  $\gamma_2$  égal à 1000. [noir=fortes différences, blanc=faibles différences] (e) rectifications de la position des contours dans  $I^0$  (zoom) : la ligne blanche de droite est le contour de l'initialisation, celle du milieu est le contour obtenu à partir de l'application modèle 3 avec le terme de segmentation (f) le contour initial du sein dans  $I^1$  (zoom)

modèles classiques, celui-ci s'attache de manière exclusive au recalage d'une région d'intérêt dans les images. L'approche diffère d'une autre approche qui a été proposée antérieurement par F. Richard et C. Graffigne pour le recalage exclusif de régions d'intérêt. En effet, le problème de minimisation, qui est défini sur la région d'intérêt, n'est plus posé avec des conditions aux bords fixes mais libres. De plus, l'énergie à minimiser comportent un nouveau terme qui impose des contraintes de segmentation d'images. Nous avons proposé un algorithme pour résoudre numériquement le problème et l'avons mis en œuvre de manière multigrille en nous appuyant sur la méthode des éléments finis. Nous avons appliqué cet algorithme aux mammographies et comparé les résultats avec ceux des algorithmes des autres modèles. Nous avons fait les observations suivantes : la prise en compte de la région d'intérêt dans le modèle antérieur de F. Richard et C. Graffigne et dans le nouveau modèle permet un recalage des seins (en particulier, près des contours) plus précis qu'avec les modèles usuels. En outre, le nouveau modèle présente plusieurs avantages par rapport au modèle antérieur : d'une part, les contraintes exercées aux bords sont plus souples et permettent un meilleur recalage de l'intérieur des seins près des contours. D'autre part, il est robuste aux éventuelles erreurs de prétraitement (segmentation des mammographies et mise en correspondance des contours des seins).

### Références

- [1] J.B.A. Maintz and M.A. Viergever. A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1):1–36, 1998.
- [2] N. Karssemeijer and G.M. te Brake. Combining single view features and asymmetry for detection of mass lesions. In *Proc. IWDM*, Nijmegen, The Netherlands, June 1998.
- [3] T.K. Lau and W.F. Bischof. Automated detection of breast tumors using the asymmetry approach. *Comput. Biomed. Res.*, 24(3):273–295, 1991.
- [4] J.L. Semmlow, A. Shadagopappan, L.V. Ackerman, et al. A fully automated system for screening Xeromammograms. *Comput. Biomed. Res.*, 13:350–362, 1980.
- [5] A. Stamatakis, A.Y. Cairns, I.W. Ricketts, et al. A novel approach to aligning mammograms. In A.G. Gale et al., editors, *Proc. IWDM*, pages 355–364, York, England, July 1994. Elsevier Science.
- [6] F.-F. Yin, M.L. Giger, K. Doi, et al. Computerized detection of masses in digital mammograms: Automated alignement of breast images and its effect on bilateral-substraction technique. *Med. Phys.*, 21(3):445–452, March 1994.
- [7] M.Y. Sallam and K. Bowyer. Registering time sequences of mammograms using a two-dimensional image unwarping technique. In A.G. Gale et al., edi-

- tors, *Proc. IWDM*, pages 121–130, York, England, July 1994. Elsevier Science.
- [8] M. Sallam and K. Bowyer. Detecting abnormal densities in mammograms by comparison to previous screenings. In K. Doi et al., editors, *Proc. IWDM*, pages 417–420, Chicago, June 1996. Elsevier Science.
- [9] M.Y. Sallam and K. Bowyer. Registration and difference analysis of corresponding mammogram images. *Medical Image Analysis*, 3(2), 1999.
- [10] K. Marias and J.M. Brady. Multi-scale landmark selection for improved registration of temporal mammograms. In *Proc. IWDM*, Toronto, Canada, June 2000.
- [11] F.L. Bookstein. Principal Warps: Thin-Plate Splines and the decomposition of Deformations. *IEEE PAMI*, 11(6):567–585, 1989.
- [12] F. Richard and C. Graffigne. An image-matching model for the registration of temporal or bilateral mammogram pairs. In *Fifth International Workshop On Digital Mammography*, Toronto, Canada, June 2000. à paraître.
- [13] F. Richard and C. Graffigne. Mise en correspondance d'images mammographiques. In 32e Congrès National d'Analyse Numérique, CANUM 2000, Mini-Symposium "Imagerie Médicale", pages B :63–66, Soustons, Landes, France, 5-9 juin 2000. Résumé détaillé de conférence.
- [14] F. Richard. Modèles élastiques d'ajustements d'images et applications aux paires bilatérales et temporelles de mammographies. PhD thesis, Université René Descartes, Paris, France, December 2000.
- [15] Y. Amit. A non-linear variational problem for image matching. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(1), January 1994.
- [16] R. Bajcsy and S. Kovacic. Multiresolution elastic matching. *CVGIP*, 46:1–21, 1989.
- [17] G.E. Christensen, R.D. Rabbitt, and M.I. Miller. Mathematical textbook of deformable neuroanatomies. In *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, volume 90, pages 11944–11948, December 93.
- [18] M. Lefébure and L. Cohen. Image registration, optical flow and local rigidity. *JMIV*, 14(2), mar 2001.
- [19] A. Witkin, T. Terzopoulos, and M. Kass. Signal matching through scale space. *IJCV*, 1(2):133–144, 1987.
- [20] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity, volume 1 : three-dimensional elasticity.* Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [21] L. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for Active Contour models and Balloons for 2-d and 3-d images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1131–1147, 1993.

- [22] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active Contour Models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [23] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [24] J. Suckling, J. Parker, D.R. Dance, et al. The Mammographic Image Analysis Society digital mammogram database. In A.G. Gale et al., editors, *Proc. IWDM*, York, England, July 1994. Elsevier Science.