Feuille d'exercices 1. Espérance conditionnelle

Dans toute la feuille $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Exercice 1. [Rappel de probabilités]

Soit X une v.a. positive p.s. Montrer que si $\mathbb{E}[X] = 0$ alors $X = 0$ p.s.

Exercice 2. [Cours]

Dans la suite $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$, les v.a. X, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont dans $L^1(\mathcal{F})$ et les propriétés sont vraies p.s.

1. Démontrer la positivité de l'espérance conditionnelle : si X est une v.a. positive alors $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
2. Démontrer le théorème de convergence monotone conditionnel : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives qui converge vers une v.a. X, alors
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$
3. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
4. Montrer que si $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$ alors
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2].$$
5. Montrer que si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$
6. Supposons $X \in L^2(\mathcal{F})$, et soit $Y \in L^2(\mathcal{G})$ satisfaisant à la condition
$$\forall\, Z \in L^2(\mathcal{G}), \quad \mathbb{E}[(X - Y)Z] = 0.$$
Montrer que pour tout $Z \in L^2(\mathcal{G})$,
$$\mathbb{E}[(X - Z)^2] = \mathbb{E}[(X - Y)^2] + \mathbb{E}[(Y - Z)^2].$$
En déduire que
$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \inf_{Z\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Z)^2].$$

Exercice 3.

1. Soient X, Y des v.a. réelles telles que X, Y et XY sont dans L^1. Démontrer les implications suivantes :
   (a) X, Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
   (b) $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
2. On veut montrer que les implications réciproques sont fausses en général.
   (a) Soit X une v.a. réelle symétrique (X et $-X$ ont même loi), $X \in L^2(\mathcal{F})$, et telle que pour tout $c \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| = c) = 0$. On pose $Y = |X|$.
      i. Montrer que $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.
      ii. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
      iii. Donner un exemple de variable X satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.
   (b) Trouver un couple (X, Y) vérifiant les hypothèses de la question 1. tel que

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \text{ et } \mathbb{E}[X|Y] \neq \mathbb{E}[X].$$

Exercice 4. En considérant par exemple $\Omega = \{a, b, c\}$, montrer que, en général,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1],$$

où $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$.

Exercice 5. [Partiel 2016 – 2017]

Soient X une variable aléatoire positive p.s. et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ sauf sur un ensemble de mesure nulle.
2. Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ est le plus petit ensemble appartenant à $\mathcal{G}$ qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 6. [Partiel 2017]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q dans $]0, 1[$. On définit $Z = \mathbb{I}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
2. Les variables aléatoires $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ sont elles indépendantes ?

Soient U et T deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces mesurables $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ telles que pour toute sous tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et pour toute fonction $(f, g) : E \times F \to \mathbb{R}^2$ mesurable bornée $\mathbb{E}(f(U)|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(g(T)|\mathcal{G})$ sont indépendantes.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que U ou T est constante p.s.

Exercice 7. Soient $X, Y \in L^2$ telles que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$, $\mathbb{E}[Y|X] = X$. Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 8. [Extinction d'un processus de Galton-Watson].

Soit $(X_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ une suite double de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi qu'une v.a. intégrable X, dont l'espérance est notée m. Pour tout $n \geq 0$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. On suppose que $p_0 < 1$.

On pose ensuite $Z_0 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \begin{cases} X_{n,1} + ... + X_{n,Z_{n-1}} & \text{si } Z_{n-1} \geq 1 \\ 0 & \text{si } Z_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ est appelé *processus de Galton-Watson*, il modélise l'évolution de la taille d'une population : Z_n représente le nombre d'individus à la génération n et $X_{n,i}$ le nombre d'enfants du i-ième individu de la génération $n-1$.

1. Pour tout $n \geq 0$, on considère la fonction génératrice des moments

$$f_n(\theta) = \mathbb{E}[\theta^{Z_n}], \quad \theta \in [0,1].$$

Montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence

$$f_0(\theta) = \theta, \quad f_{n+1}(\theta) = f_n(g(\theta)), \quad \forall\, n \geq 0,$$

où $g(\theta) = \mathbb{E}[\theta^X]$ est la fonction génératrice de X. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(\theta) = g \circ \ldots \circ g(\theta) = g^n(\theta), \quad \theta \in [0,1].$$

2. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$. Est-ce un temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle du processus ? Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.
3. Étudier la fonction g. En déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ est la plus petite solution de l'équation $g(\theta) = \theta$ dans $[0,1]$. Vérifier en particulier que cette solution est strictement plus petite que 1 si et seulement si $m > 1$.