

Feuille d'exercices 2. Arrêt optimal

Exercice 1. Soit X une v.a. intégrable et T un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

1. Montrer que \mathcal{F}_T , la tribu du passé jusqu'à l'instant T , est une tribu.
2. Montrer que T est \mathcal{F}_T -mesurable.
3. Soit $k \geq 0$ et supposons que $T \equiv k$. Montrer qu'alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_k$.
4. Montrer que si $T < \infty$ p.s. et si $(X_n)_{n \geq 0}$ est un processus adapté, alors X_T est \mathcal{F}_T -mesurable.
5. Montrer que si S et T sont des temps d'arrêts tels que $S \leq T$ p.s., alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 2.

Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt (de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$).

1. Rappeler l'énoncé du théorème d'arrêt.
2. On se propose de montrer une variante de ce théorème. Supposons que T vérifie

$$(H_1) \quad \mathbb{P}(T < +\infty) = 1, \quad (H_2) \quad \mathbb{E}[|X_T|] < \infty, \quad (H_3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{I}_{\{T > n\}}] = 0.$$

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_T| \mathbb{I}_{\{T > n\}}] = 0$.
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_{n \wedge T} - X_T|] = 0$.
- (c) En déduire que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Exercice 3. [Partiel 2013 – 2014]

Soit T un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(T \leq n + 1 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon \quad \text{p.s.}$$

Montrer que $\mathbb{E}[T] < \infty$; en déduire que T est fini p.s.

Indication : on rappelle que pour une v.a. X à valeurs dans \mathbb{N} , $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Exercice 4. [Partiel 2016 – 2017]

Soient S et T deux temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

Montrer que l'événement $\{S \leq T\}$ est dans la tribu $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Exercice 5. [Problème de Moser]

Chaque minute, une machine tire au hasard un nombre réel positif. On note X_n le réel obtenu à la minute n et on suppose que les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont des v.a. i.i.d. positives d'espérance finie. Vous pouvez observer la machine pendant N minutes. Chaque minute, vous avez le choix entre dire "stop" ou "je continue", mais vous ne pouvez dire "stop" qu'une seule fois. Si vous décidez de vous arrêter à la minute n , on vous remet (en euros) la somme X_n et le processus s'arrête là. Sinon le processus continue jusqu'à ce vous disiez "stop". L'horizon est fini : si vous ne vous êtes pas arrêtés strictement avant la minute N , vous devez dire "stop" à la minute N . L'objectif est de trouver une stratégie optimale maximisant la somme reçue.

1. Rappeler la définition de la fonction valeur $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$, solution de ce problème d'arrêt optimal et montrer que, pour tout $1 \leq n \leq N$, Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$ (utiliser une récurrence rétrograde).
2. Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose $V_n := \mathbb{E}[Z_n]$. Montrer que,

$$\forall 1 \leq n \leq N - 1, V_n = \varphi(V_{n+1}),$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathbb{E}[\max(X_1, x)]$.

3. Montrer que φ est une fonction positive et croissante, telle que $\varphi(x) - x$ est positive, décroissante et $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - x) = 0$. Tracer l'allure de la fonction φ .
4. Montrer qu'un temps d'arrêt optimal est

$$T^* = \begin{cases} \inf\{1 \leq k \leq N - 1 : X_k \geq V_{k+1}\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Supposons que les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont uniformément distribués sur $[0, 1]$ et prenons $N = 6$. Montrer que la stratégie optimale est donnée par la procédure suivante : on s'arrête au temps 1 si $X_1 \geq 0.775$; sinon on regarde X_2 et on s'arrête au temps 2 si $X_2 \geq 0.742$; sinon on regarde X_3 et on s'arrête au temps 3 si $X_3 \geq 0.695$; sinon on regarde X_4 et on s'arrête au temps 4 si $X_4 \geq 0.625$; sinon on regarde X_5 et on s'arrête au temps 5 si $X_5 \geq 1/2$, sinon on s'arrête au temps 6.

Quel est le gain moyen optimal ?

Exercice 6. On cherche à choisir parmi N objets distincts le meilleur avec la plus grande probabilité possible. Le principe est d'inspecter les objets un par un, et à chaque fois de décider si on choisit l'objet inspecté (dans ce cas le processus d'inspection s'arrête et on ne regardera pas les objets suivants) ou si on passe à l'inspection de l'objet suivant. On ne peut pas revenir en arrière. Si les $N - 1$ premiers objets n'ont pas été choisis, on prend alors automatiquement le N -ième objet.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une stratégie d'arrêt nous permettant de maximiser la probabilité de choisir le meilleur objet parmi les N à notre disposition.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{S}_N l'ensemble des permutations de N éléments. Soit $\Sigma : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_N$ une variable aléatoire *uniforme* à valeurs dans \mathcal{S}_N . Pour $1 \leq n \leq N$, la valeur Σ_n

représente le rang absolu du n -ième objet inspecté (on suppose que les objets ont tous une valeur différente). Par exemple si $\Sigma_n(\omega) = 1$, le meilleur objet est dans la position n . On remarque qu'on ne peut pas observer directement $\Sigma(\omega)$ (on ne connaît le classement absolu des N objets qu'une fois qu'on les a tous inspectés).

A chaque étape n , on observe une variable aléatoire X_n qui donne le rang *relatif* du n -ième objet inspecté par rapport aux $n - 1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}, \dots, X_n \in \{1, \dots, n\}$ et $X_N = \Sigma_N$: une fois qu'on a inspecté tous les objets on connaît leur classement absolu. A chaque instant n , on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, la tribu engendrée par les rangs relatifs des n premiers objets. Par exemple : si $N = 4$ et $\Sigma(\omega) = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1, X_4(\omega) = 2$.

Soit $\Xi = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leq x_k \leq k, k = 1, \dots, N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_N)$. Remarquons que X est une fonction mesurable de Σ . Plus précisément, l'application $\Psi : \mathcal{S}_N \rightarrow \Xi$ qui associe à une permutation la suite correspondante des rangs relatifs est bijective, donc $X = \Psi \circ \Sigma$ et $\Sigma = \Psi^{-1} \circ X$: étant donnée la suite de rangs relatifs $X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)$, on peut reconstruire $\Sigma(\omega)$.

Notre objectif est de trouver un temps d'arrêt T (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$) borné par N , qui maximise la quantité

$$\mathbb{P}(\Sigma_T = 1) = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\Sigma_T=1\}}].$$

1. Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_N) \in \Xi, \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N) = \frac{1}{N!}.$$

2. Montrer que les variables $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont indépendantes et que pour tout $1 \leq n \leq N$ et tout $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}.$$

3. On définit le processus adapté $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$, par $Y_n = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\Sigma_n=1\}} | \mathcal{F}_n]$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N ,

$$\mathbb{P}(\Sigma_T = 1) = \mathbb{E}[Y_T].$$

4. Montrer que, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$Y_n = \frac{n}{N} \mathbb{1}_{\{X_n=1\}},$$

(en particulier Y_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$).

5. Montrer que la fonction valeur $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ est bien définie et que, pour tout $1 \leq n \leq N$, Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$. En déduire qu'un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T^* = \begin{cases} \inf \{1 \leq k \leq N - 1 : \mathbb{E}[Z_{k+1}] \leq \frac{k}{N}, X_k = 1\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ décroît quand n croît. En déduire qu'il existe un entier $1 \leq r \leq N - 1$ tel que $T^* = T_r$ où

$$T_r = \begin{cases} \inf \{r \leq k \leq N - 1 : X_k = 1\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Montrer que pour $1 < r \leq N$,

$$\mathbb{E}[Y_{T_r}] = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^N \frac{1}{k-1} := G_N(r).$$

8. Montrer que $G_N([xN]) \rightarrow -x \log x$ quand $N \rightarrow \infty$ et que cette fonction limite admet un maximum en $x = 1/e \sim 0.37$. On en déduit que lorsque le nombre d'objets N tend vers l'infini, la stratégie optimale consiste à laisser défiler une proportion d'environ 37% d'objets sans en sélectionner, puis à choisir le premier objet meilleur que tous ceux qui l'ont précédés.

Exercice 7. [Partiel 2016 –2017]

On dispose d'une collection de N objets distincts et ordonnés que l'on nous présente successivement dans un ordre aléatoire. À chaque étape on doit décider si on choisit l'objet inspecté (dans ce cas le processus d'inspection s'arrête et on ne regardera pas les objets suivants) ou si on passe à l'inspection de l'objet suivant. On ne peut pas revenir en arrière. Si les $N - 1$ premiers objets n'ont pas été choisis, on prend alors automatiquement le N -ième objet.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une stratégie d'arrêt nous permettant de minimiser le rang absolu (i.e. dans la collection complète) de l'objet choisi. On notera donc bien que le critère à optimiser diffère de celui vu dans l'exercice similaire traité en cours. On reprend en revanche les mêmes notations que l'on rappelle dans le paragraphe suivant.

On note \mathcal{S}_N l'ensemble des permutations de N éléments, c'est -à-dire l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, N\}$ dans lui-même. Soit Σ une variable aléatoire **uniforme** à valeurs dans \mathcal{S}_N . La valeur Σ_n représente le rang absolu du n -ième objet inspecté (on suppose que les objets ont tous une valeur différente).

À chaque étape n , on observe une variable aléatoire X_n qui donne le rang *relatif* du n -ième objet inspecté par rapport aux $n - 1$ objets inspectés auparavant. On a donc

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad X_n = \text{card}\{1 \leq i \leq n, \Sigma_i \leq \Sigma_n\}.$$

À chaque instant n , on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, la tribu engendrée par les rangs relatifs des n premiers objets.

Soit $\Xi_N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leq x_k \leq k, k = 1, \dots, N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_N)$. Remarquons que X est une fonction mesurable de Σ . Plus précisément, l'application $\Psi : \mathcal{S}_N \rightarrow \Xi$ qui associe à une permutation la suite correspondante des rangs relatifs est bijective (donc $X = \Psi \circ \Sigma$ et $\Sigma = \Psi^{-1} \circ X$) : étant donnée la suite de rangs relatifs X_1, \dots, X_N , on peut reconstruire Σ .

Notre objectif est donc de trouver un temps d'arrêt T (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$) borné par N qui **minimise** la quantité $\mathbb{E}[\Sigma_T]$.

Les questions signalées par une () sont un peu plus calculatoires. On n'hésitera pas à admettre les résultats pour poursuivre le problème.*

1. Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_N) \in \Xi, \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N) = \frac{1}{N!}.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \in \{1, \dots, N\}$ et tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}.$$

En déduire que les variables $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont indépendantes.

3. On définit le processus adapté $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ par $Y_n = \mathbb{E}[\Sigma_n | \mathcal{F}_n]$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N ,

$$\mathbb{E}[\Sigma_T] = \mathbb{E}[Y_T].$$

4. (*) Montrer que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, $(i_1, \dots, i_{n-1}, i) \in \Xi_n$ et $k \in \{i, \dots, N - (n - i)\}$,

$$P(\Sigma_n = k | X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = P(\Sigma_n = k | X_n = i) = \frac{\binom{k-1}{i-1} \binom{N-k}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

5. (*) Vérifiez que pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$Y_n = \mathbb{E}[\Sigma_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\Sigma_n | X_n] = \frac{N+1}{n+1} X_n.$$

Indication : on pourra utiliser (il y aura quelques points bonus pour la preuve aussi !) que pour $i \leq n$:

$$\sum_{k=i}^{N-(n-i)} \binom{k}{i} \binom{N-k}{n-i} = \binom{N+1}{n+1}.$$

6. Définir le processus valeur $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ adapté au problème et montrer que, pour tout $1 \leq n \leq N$, Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$.
7. Que vaut $E[Z_N]$? Donner la relation de récurrence permettant de passer de $E[Z_{n+1}]$ à $E[Z_n]$ pour $1 \leq n \leq N - 1$.
8. En déduire qu'il existe une suite à valeurs entières $(s_i)_{i=1}^{N-1}$ (que l'on caractérisera par récurrence rétrograde) tel qu'un temps optimal soit donné par :

$$T^* = \begin{cases} \inf \{1 \leq k \leq N - 1 : X_k \leq s_k\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Dans le cas $N = 4$, caractériser T^* en donnant la valeur de (s_1, s_2, s_3) . Puis, calculer le rang moyen sélectionné quand on adopte la stratégie T^* .

Exercice 8. [Problème du parking]

Vous conduisez une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement. Bien sûr, les places ne sont pas toutes libres. Votre objectif est de vous garer le plus proche possible du théâtre, sachant que vous ne pouvez pas revenir en arrière. Vous voyez une place libre à distance d du théâtre. Faut-il s'y garer ?

On va modéliser ce problème à l'aide d'un modèle discret. Partant de l'origine, chaque entier positif sur la droite réelle correspond à une place de stationnement. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ des v.a. de Bernoulli i.i.d. de paramètre $p \in]0, 1[$. La n -ième place est occupée si et seulement si $X_n = 1$.

On note N la position du théâtre. On peut donc s'arrêter à la place n ssi $X_n = 0$ et si on décide de s'y arrêter, on considère qu'on perd la quantité $N - n$. Étant au niveau de la place n , on ne peut pas voir si la place $n + 1$ est libre et si on décide d'avancer, on ne peut plus revenir en arrière. Si on arrive au niveau de la place N et qu'elle n'est pas libre, alors on se garera à la première place libre trouvée en continuant, dans ce cas la perte moyenne attendue est $(1 - p) + 2p(1 - p) + 3p^2(1 - p) + 4p^3(1 - p) + \dots = \frac{1}{1-p}$ (pourquoi?).

1. Formuler précisément le problème d'arrêt optimal : donner la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, les pertes $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ et préciser la définition d'optimalité pour un t.a. T .
2. Utiliser l'hypothèse d'indépendance des $(X_n)_{n \geq 0}$ et la forme spécifique des pertes $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ pour simplifier la forme du processus valeur $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ et la règle d'arrêt optimal associée.
3. Remarquer que si $p \geq \frac{1}{2}$ il existe un entier $0 \leq r \leq N - 1$ tel qu'un temps d'arrêt optimal est donné par $T^* = T_r$

$$T_r = \begin{cases} \inf \{r \leq k \leq N - 1 : X_k = 0\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Montrer que la perte moyenne $C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}]$ est donnée par la formule

$$\mathbb{E}[Y_{T_r}] = C(r) = N - r + 1 + \frac{2p^{N-r+1} - 1}{1 - p}.$$

5. Trouver l'entier r optimal en fonction de p et N lorsque $p = 0.9$.

Exercice 9. [Sum-of-the-odds]

Soient $N \geq 1$ et X_1, \dots, X_N des v.a. indépendantes telles que $X_n \sim \text{Ber}(p_n)$ avec $p_n \in (0, 1)$, $n = 1, \dots, N$. On observe les $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ une par une (en suivant l'ordre de leurs indices) et on peut s'arrêter à tout moment. Si on s'arrête à l'instant j , on gagne si $X_j = 1$ et si $X_k = 0$ pour $j + 1 \leq k \leq N$ (c-à-d si X_j est la dernière v.a. à valoir 1).

Soit

$$L = \sup\{1 \leq k \leq N : X_k = 1\}$$

(avec la convention $\sup \emptyset = \infty$). La probabilité de gagner en s'arrêtant à un temps d'arrêt T (de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$ engendrée par la suite $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$), $T \leq N$, est donc

$$V(T) := \mathbb{P}(T = L) = \mathbb{P}(X_T = 1, X_{T+1} = 0, \dots, X_N = 0).$$

On veut maximiser cette probabilité parmi tous les temps d'arrêt T (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$) bornés par N . On note $V_N = \sup_{T \in \mathcal{T}_N} V(T)$ le gain optimal pour le problème d'arrêt d'horizon N .

1. La v.a. L est-elle un temps d'arrêt ?
2. Considérons le processus adapté $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ défini, pour tout $1 \leq n \leq N$, par $Y_n = \mathbb{P}(L = n | \mathcal{F}_n)$. Montrer que, pour tout $1 \leq n \leq N - 1$,

$$Y_n = \mathbb{I}_{\{X_n=1\}} \prod_{k=n+1}^N (1 - p_k).$$

3. Montrer que $V(T) = \mathbb{E}[Y_T]$ pour tout temps d'arrêt T borné par N .
4. Soit $(Z_n)_{1 \leq n \leq N}$ la fonction valeur du problème d'arrêt optimal associé. Montrer par un calcul explicite que $\mathbb{E}[Z_N | \mathcal{F}_{N-1}]$ est une constante.
5. Montrer par récurrence que, pour tout $1 \leq n \leq N - 1$, $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}]$.
6. Montrer que $(\mathbb{E}[Z_n])_{1 \leq n \leq N}$ est une fonction décroissante de n .
7. Rappeler la définition vue en cours de T^* et démontrer que c'est bien un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$.
8. Quelle est la propriété principale du processus arrêté $(Z_{n \wedge T^*})_{1 \leq n \leq N}$?
9. Montrer que si $p_N \leq \frac{1}{2}$, il existe un entier $1 \leq r \leq N - 1$ tel que $T^* = T_r$ où

$$T_r = \begin{cases} \inf\{r \leq k \leq N - 1 : X_k = 1\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que

$$G(r) = V(T_r) = \left[\prod_{k=r}^N (1 - p_k) \right] \sum_{k=r}^N \frac{p_k}{1 - p_k}.$$

et donc que la règle d'arrêt optimale est T_{r_*} où r_* est la valeur qui maximise $G(r)$.

11. Donner une expression de $\mathbb{E}[Z_1]$.
12. Calculer $G(r) - G(r - 1)$ pour $r = 2, \dots, N$ et donner une condition explicite de r_* en fonction des (p_k) .
13. Calculer r_* et $G(r_*)$ pour $N = 10$ et $p_k = 0.2$ pour $k = 1, \dots, 10$.

Exercice 10. [Partiel 2013 – 2014]

Considérons un lac contenant $N \in \mathbb{N}^*$ poissons. On note T_i le temps nécessaire pour attraper le poisson numéro i et on suppose que $(T_i)_{i=1}^N$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On verra ci-dessous que les temps T_1, \dots, T_N sont presque sûrement tous distincts. Admettons-le pour le moment. On note alors

$$T_{(1)} < T_{(2)} < \dots < T_{(N)}$$

leur réarrangement croissant, puis

$$X_1 = T_{(1)} \quad \text{et} \quad X_i = T_{(i)} - T_{(i-1)}, \quad 2 \leq i \leq N.$$

La variable X_i représente donc le temps qui s'est écoulé entre le $(i - 1)$ -ième et le i -ième temps de pêche. Pour $1 \leq n \leq N$, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, et pour $n = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

On s'intéresse au problème d'arrêt suivant : au bout de combien de poissons pêchés est-il optimal de s'arrêter sachant qu'on gagne 1 à chaque fois qu'on attrape un poisson et qu'on paye $c > 0$ fois le temps total requis ? Le processus de gain $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ correspondant à ce problème est donc donné par

$$Y_n = n - cT_{(n)}$$

(avec la convention $T_{(0)} = 0$).

1. Montrer que $\mathbb{P}(T_i \neq T_j) = 1$ lorsque $1 \leq i \neq j \leq N$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\exists (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i \neq j : T_i = T_j) = 0$$

(le réarrangement strictement croissant de T_1, \dots, T_N a donc bien un sens presque sûrement).

2. (a) Montrer qu'une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N) du N -uplet $(T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(N)})$ est donnée par

$$(t_1, \dots, t_N) \mapsto N! \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < \dots < t_N\}} e^{-\sum_{n=1}^N t_n}.$$

- (b) En déduire que les variables $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont indépendantes et que X_n suit une loi exponentielle de paramètre $N - n + 1$.
- (c) Montrer que le processus $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ et intégrable.
3. On note $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ l'enveloppe de Snell du processus $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$.
- (a) Calculer, pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ en fonction de Y_n, c, N et n .
- (b) En déduire que pour tout n , Z_n peut s'exprimer comme une fonction mesurable (que l'on précisera) de Y_n .
- (c) En déduire un temps d'arrêt optimal.
- (d) Ce problème est-il à structure monotone? Justifier votre réponse.

Exercice 11. [Partiel 2015]

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration et $(Y_n)_{n \geq 0}$ un processus de gain adapté et dans L^1 . On considère $N \in \mathcal{N}$ et \mathcal{T}_N l'ensemble des \mathcal{F} -temps d'arrêt bornés par N . On étudie le problème d'arrêt optimal suivant :

$$\sup\{E(Y_T), T \in \mathcal{T}_N\}.$$

On dit qu'un temps d'arrêt est optimal s'il permet d'atteindre le sup.

- (*Question de cours*) Rappeler la définition de la fonction valeur $(Z_n)_{n \geq 0}$. Prouver qu'il s'agit d'une sur-martingale. Rappeler, sans la redémontrer, la valeur du sup du problème considéré grâce au processus $(Z_n)_{n \geq 0}$.
- Soit $S \in \mathcal{T}_N$ un temps d'arrêt optimal et $0 \leq n \leq N - 1$. Prouver que $E(Z_{(n+1) \wedge S}) = E(Z_{n \wedge S})$.
- En déduire que $(Z_{n \wedge S})_{n \geq 0}$ est une martingale puis que pour tout $0 \leq n \leq N - 1$

$$E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) 1_{\{S \geq n+1\}} = Z_n 1_{\{S \geq n+1\}} \quad p.s.$$

On définit le temps d'arrêt

$$T = \begin{cases} \inf\{k \leq N - 1, Y_k > E(Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)\} & \text{si l'ensemble considéré est non vide} \\ N & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera bien que **l'inégalité dans la définition est stricte**, ce qui définit un temps différent du temps optimal étudié dans le cours.

4. Montrer que $(Z_{n \wedge T})_{n \geq 0}$ est une martingale.

5. Montrer que T est un temps optimal.
6. Montrer que T est **le plus grand temps optimal** c'est-à-dire que pour tout $S \in \mathcal{T}_N$ optimal, $S \leq T$ p.s.

Exercice 12. [Partiel 2015]

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $Ber(1/2)$. On définit le processus de gain Y par

$$Y_n = (2^n - 1) \prod_{i=1}^n X_i \quad \forall n \geq 1.$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. On note \mathcal{T} l'ensemble des \mathcal{F} -temps d'arrêt fini p.s. Pour tout $N \in \mathcal{N}$, on note \mathcal{T}_N l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N . On considère dans les deux premières questions **le problème en horizon fini N** .

1. Le problème est-il monotone ?
2. Donner un temps optimal et la valeur du maximum du problème.

On optimise maintenant sur \mathcal{T} . On s'intéresse donc à un problème dont l'**horizon n'est pas fini**.

3. Montrer qu'il n'existe pas de temps optimal pour ce problème.