Feuille d'exercices 3. Compléments sur les martingales
– Uniforme intégrabilité et applications –

Exercice 1. [Examen 2016]

Soit $\mathcal{X}$ une famille de variables aléatoires. On suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{array}{ll} (1) & \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty \quad \text{et} \\ (2) & \sup\{\mathbb{E}\left(|X|\phi(|X|)\right),\ X \in \mathcal{X}\} = C < +\infty \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable.

Exercice 2. Soit X une v.a. dans L^1 et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. Notons $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[\text{p.s.}]{L_1} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty].$$

Exercice 3. [Loi du 0-1 de Kolmogorov]

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On considère les tribus

$$\forall\, n \geq 1, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad \mathcal{G}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots), \quad \mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n.$$

La tribu $\mathcal{G}_\infty$ s'appelle la *tribu terminale*. Soit $A \in \mathcal{G}_\infty$. Montrer que soit $\mathbb{P}(A) = 0$, soit $\mathbb{P}(A) = 1$, en utilisant la martingale $(M_n)_{n\geq 1}$ définie par, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_n]$.

Exercice 4. [Exemple d'application]

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On considère la marche aléatoire définie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ si $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Alors, p.s.

$$\sup_{n\geq 1} S_n = +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{n\geq 1} S_n = -\infty$$

(ce qui implique que la marche passe une infinité de fois par 0).

Indication : Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(-p \leq \inf_{n\geq 1} S_n \leq \sup_{n\geq 1} S_n \leq p\right) = 0.$$

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes positives de moyenne 1. On pose pour $n \geq 1$: $a_n = \mathbb{E}[\sqrt{X_n}]$,

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k},$$

ainsi que $M_0 = N_0 = 1$.

1. Montrer que $a_n \in (0,1]$ (en particulier les v.a. N_n sont bien définies).
2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ et $(N_n)_{n\geq 1}$ sont des martingales qui convergent p.s. On note M_∞ et N_∞ leurs limites respectives.
3. Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ est un nombre bien défini, à valeurs dans $[0,1]$.
4. Montrer que si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$, alors $M_\infty = 0$ p.s.
5. Montrer que les cinq assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $(M_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans L^1 quand $n \to \infty$
   (c) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$
   (d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$
   (e) $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) < \infty$.

   On pourra avoir besoin de l'inégalité de Doob : si $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une (sous)-martingale positive bornée dans L^p pour un $p > 1$, alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{n\geq 1} Z_n\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[Z_n^p\right].$$

Exercice 6. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt fini p.s.

1. Montrer que si $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable, alors $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.
2. On suppose à présent que $\mathbb{E}[T] < \infty$ et qu'il existe une constante c telle que

$$\text{pour tout } n \leq T, \quad \mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| \mid \mathcal{F}_n] \leq c.$$

   Montrer que $|M_{n\wedge T}| \leq |M_0| + |M_1 - M_0| + \ldots + |M_T - M_{T-1}|$.

   En déduire que $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.
3. Application (*Identité de Wald*). Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. d'espérance finie μ ; soit T un temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de la filtration naturelle du processus $(X_i)_{i\geq 1}$ tel que $\mathbb{E}[T] < \infty$. Posons, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors

$$\mathbb{E}[S_T] = \mu\mathbb{E}[T].$$

Exercice 7. [Théorème de Rademacher]

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(y)\mathrm{d}y, \quad x \in [0,1].$$

Pour cela, considérons X une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et posons, pour tout $n \geq 0$,

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n}, \quad M_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)),$$

et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_n) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction h mesurable continue. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$).
3. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^1. On note M_∞ sa limite. Montrer qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que $M_\infty = g(X)$ p.s.
4. Montrer que p.s.
$$M_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$
5. Conclure.

Exercice 8. [Théorème de Radon-Nikodym]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité tel que il existe une famille dénombrable $(E_n)_{n\geq 1}$ d'événements tels que $\mathcal{F} = \sigma(E_n, n \geq 0)$. Soit $\mathbb{Q}$ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

L'objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) \leqslant \varepsilon$.

(iii) Il existe une v.a. positive $X \in L^1(\mathcal{F})$ telle que $\mathbb{Q} = X\mathbb{P}$.

C'est à dire, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int X \mathbb{I}_A d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X\mathbb{I}_A]$.

1. Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).
2. Montrer que (i)$\Rightarrow$(ii) (on pourra montrer que non-(ii) implique non-(i)).
3. Montrer que (iii)$\Rightarrow$(i).
4. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(E_1, \dots, E_n)$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une filtration et que $\mathrm{card}(\mathcal{F}_n) < +\infty$. En déduire qu'il existe une famille finie $\mathcal{A}_n$ d'éléments disjoints, $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, telle que $\sigma(\mathcal{A}_n) = \mathcal{F}_n$.

5. Soit
$$X_n = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} \frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{I}_A.$$
Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{Q}(B) = \int_B X_n \, d\mathbb{P}$, et que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ (pour la probabilité $\mathbb{P}$).

   Dans les 2 questions suivantes, on suppose (i).

6. Montrer que la martingale $(X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.
7. En déduire que $\mathbb{Q} = X\mathbb{P}$ où $X = \lim_n X_n$. Montrer l'unicité de $X \in L^1(\mathcal{F})$.

   On appelle X *densité*, ou *dérivée de Radon-Nikodym, de* $\mathbb{Q}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$.

8. Réciproquement, montrer que si $\mathbb{Q} = X\mathbb{P}$ avec $X \in L^1(\mathcal{F})$ alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.