Université Paris-Est Créteil, ESIPE — Licence première année
Statistiques descriptives et probabilités — Année 2016-2017
B. de Tilière

TD 4. Dénombrement - Espaces probabilisés

Exercice 1. Combien de menus différents peut-on composer si l'on a le choix entre 5 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution de l'exercice 1. On peut composer $5 \times 2 \times 4 = 40$ menus différents.

Exercice 2. Une femme a dans sa garde-robe 6 pantalons, 5 hauts et 3 vestes. Elle choisit au hasard un pantalon, un haut et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution de l'exercice 2. Elle peut s'habiller de $6 \times 5 \times 3 = 90$ façons différentes.

Exercice 3. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 20 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution de l'exercice 3. Il y a 4^{20} façons de répondre à ce questionnaire.

Exercice 4. Un clavier de 9 touches (A, B, C, 1 ,2, 3, 4, 5 et 6) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 4 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 4 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Solution de l'exercice 4.

1. Il y a 3×6^3 codes différents.
2. Il y a 3×5^3 codes différents sans le chiffre 4.
3. Il y a $3 \times 6^3 - 3 \times 5^3$ codes contenant au moins une fois le chiffre 4.
4. Il y a $3 \times 6 \times 5 \times 4$ codes comportant des chiffres distincts.
5. Il y a $3 \times 6^3 - 3 \times 6 \times 5 \times 4$ codes comportant au moins deux chiffres identiques.

Exercice 5. Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1. Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2. Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3. Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Solution de l'exercice 5.

1. Le nombre d'échantillons différents possibles est $\binom{30}{4}$.
2. Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire est $\binom{18}{4}$.
3. Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est $\binom{30}{4} - \binom{18}{4}$.

Exercice 6. Soient A et B deux évènements de probabilités, $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Montrer que

$$\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Solution de l'exercice 6. Montrons l'inégalité de gauche. Comme conséquence de la définition d'une probabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Or $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, ce qui implique $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$. Dans notre cas cela donne

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12},$$

et montre la première inégalité. Pour la deuxième, on utilise que $A \cap B \subset B$, ce qui implique

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 7. Supposons que 23 personnes sont dans une même salle. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient l'anniversaire le même jour ? (On ne considérera pas les années bissextiles.)

Solution de l'exercice 7. L'univers Ω est formé de tous les 23-uplets de jours d'anniversaire. On a donc $\Omega = \{1, \cdots, 365\}^{23}$ et $\mathrm{card}(\Omega) = 365^{23}$. On suppose que les dates d'anniversaire sont distribuées "au hasard" sur l'année, de sorte que l'on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Ainsi, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

On considère l'événement A "les personnes ont toutes leur anniversaire un jour différent". L'événement A est formé de tous les échantillons de taille 23 sans répétition, donc $\mathrm{card}(A) = A_{365}^{23}$, et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}}.$$

La probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est la probabilité de l'événement complémentaire, et est donc égale à $1 - \frac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}} = 0,507...$ Cette probabilité est d'environ 0,97 s'il y a 50 personnes, et d'environ 0,999 s'il y en a 100.

Exercice 8. Dans une course, n chevaux sont au départ. On suppose qu'ils ont tous la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagner le tiercé avec un ticket :

1. dans l'ordre,
2. dans l'ordre ou dans un ordre différent,
3. dans un ordre différent ?

Solution de l'exercice 8. L'univers est l'ensemble des tiercés possibles, soit

$$\Omega = \{(i,j,k) \,:\, i,\, j,\, k \in \{1,\cdots,n\}, i \neq j,\, j \neq k,\, k \neq i\}.$$

Alors, $\mathrm{card}(\Omega) = A_n^3 = n(n-1)(n-2)$. On suppose que tous les tiercés ont la même chance de se réaliser, de sorte que l'on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

1. Soit A l'événement "obtenir le tiercé gagnant dans l'ordre". Comme il existe un unique tiercé gagnant, $\mathrm{card}(A) = 1$, d'où la probabilité cherchée est :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$
2. Soit B l'événement "obtenir le tiercé gagnant dans l'ordre ou dans un ordre différent". Comme il y a 3! manières d'ordonner le tiercé gagnant, $\mathrm{card}(B) = 6$, d'où la probabilité cherchée est :
$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)}.$$
3. Soit C l'événement "obtenir le tiercé gagnant dans un ordre différent". Comme il y a $3! - 1 = 5$ manières d'ordonner le tiercé gagnant dans un ordre différent, $\mathrm{card}(C) = 5$, d'où la probabilité cherchée est :
$$\mathbb{P}(C) = \frac{5}{n(n-1)(n-2)}.$$

Exercice 9. Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :

1. une seule paire (deux cartes de même hauteur) ;
2. deux paires ;
3. un brelan (trois cartes de même hauteur et pas de paire ni de carré) ;
4. un carré (quatre cartes de même hauteur) ;
5. un full (une paire et un brelan) ?

Solution de l'exercice 9. L'univers Ω est l'ensemble des mains de 5 cartes possibles, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons de 5 éléments pris parmi 32, de sorte que, $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{32}{5}$. On suppose que toutes les mains sont équiprobables et on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Ainsi, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

1. Soit A l'événement "le joueur possède une seule paire", calculons $\mathrm{card}(A)$.
- Choix de la hauteur de la paire : $\binom{8}{1}$.
- Choix de la couleur (trèfle, carreau, cœur, pique) de chacune des cartes de la paire : $\binom{4}{2}$.
- Choix des hauteurs des trois autres cartes : $\binom{7}{3}$.
- Choix de la couleur de chacune des trois autres cartes : 4^3.

Ainsi, $\text{card}(A) = \binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3$, et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}4^3}{\binom{32}{5}}.$$

2. Soit B l'événement "le joueur possède deux paires", calculons $\text{card}(B)$.
   - Choix des hauteurs des deux paires : $\binom{8}{2}$.
   - Choix de la couleur de chacune des cartes de chacune des paires : $\binom{4}{2}^2$.
   - Choix de la hauteur de la dernière carte : $\binom{6}{1}$.
   - Choix de la couleur de la dernière carte : 4.

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(B) = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}^2\binom{6}{1}4}{\binom{32}{5}}.$$

3. Soit C l'événement "le joueur possède un brelan".
   - Choix de la hauteur du brelan : $\binom{8}{1}$.
   - Choix de la couleur de chacune des cartes du brelan : $\binom{4}{3}$.
   - Choix de la hauteur des deux cartes restantes : $\binom{7}{2}$.
   - Choix de la couleur de chacune des deux cartes restantes : 4^2.

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(C) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}4^2}{\binom{32}{5}}.$$

4. Soit D l'événement "le joueur possède un carré".
   - Choix de la hauteur du carré : $\binom{8}{1}$.
   - Choix de la couleur de chacune des cartes du carré : $\binom{4}{4} = 1$.
   - Choix de la hauteur de la carte restante : 7.
   - Choix de la couleur de la carte restante : 4.

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(D) = \frac{8.7.4}{\binom{32}{5}}.$$

5. Soit E l'événement "le joueur possède un full".
   - Choix de la hauteur de la paire : 8.
   - Choix de la couleur de la paire : $\binom{4}{2}$.
   - Choix de la hauteur du brelan : 7.
   - Choix de la couleur du brelan : $\binom{4}{3}$.

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(E) = \frac{8.6.7.4}{\binom{32}{5}}.$$

Exercice 10. (D'après C. Bouzitat et G. Pagès, En passant par hasard... Chapitre XI. Ed. Vuibert (1999)). Au loto, le joueur doit cocher 6 numéros dans une grille en comportant 49. Un tirage consiste à extraire, sans remise, 6 boules numérotées d'une urne, dont les numéros sont dits gagnants, et une 7-ième boule fournissant le numéro dit complémentaire. Est gagnant du premier rang, toute grille sur laquelle sont cochés les 6 numéros gagnants. Est gagnante du 2-ième rang, toute grille sur laquelle sont cochés 5 des 6 numéros gagnants et dont le 6-ième numéro est le numéro complémentaire. Est gagnant du 3-ième rang, toute grille sur laquelle sont exactement cochés 5 des 6 numéros gagnants.

Considérons une grille validée et notons

$$p_k = \mathbb{P}(\text{la grille est gagnante au } k\text{-ième rang}).$$

Calculer p_k pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

Solution de l'exercice 10. L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 6 numéros choisis parmi 49, de sorte que, $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{49}{6}$. On suppose que toutes ces combinaisons sont équiprobables et on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Ainsi, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, soit A_k l'événement "la grille du joueur est une grille gagnante du k-ième rang".

1. A_1 est formé des grilles qui correspondent exactement au tirage, donc $\mathrm{card}(A_1) = 1$ et : $p_1 = \frac{1}{\binom{49}{6}} \sim 7,15.10^{-8}$.
2. A_2 est formé des grilles qui contiennent 5 des 6 numéros du tirage et exactement le numéro complémentaire, donc : $p_2 = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} \sim 4,29.10^{-7}$.
3. A_3 est formé des grilles qui contiennent 5 des 6 numéros du tirage et un numéro autre (que les 7 tirés), donc :

$$p_3 = \frac{\binom{6}{5}\binom{49-7}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{6}{5}42}{\binom{49}{6}} \sim 1,8.10^{-5}.$$

Exercice 11. On considère la distribution aléatoire de r boules dans n urnes. Quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne exactement k boules ? ($k \leq r$)

Solution de l'exercice 11. L'espace des états Ω est l'ensemble de toutes les manières de distribuer r boules dans n urnes. Pour la première boule, il y a n choix d'urnes, pour la deuxième également, etc., donc :

$$\mathrm{card}(\Omega) = n^r.$$

Comme la distribution des boules est aléatoire, on munit Ω de la probabilité uniforme, de sorte que si A est un événement de Ω, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Pour tout $k \in \{0, \cdots, r\}$, on introduit A_k l'événement "une urne donnée contient k boules". Alors il y a $\binom{r}{k}$ choix possibles pour ces k boules, et comme aucune autre boule ne peut être dans l'urne donnée, chacune a le choix entre $(n-1)$ urnes. Ainsi,

$$\mathrm{card}(A_k) = \binom{r}{k}(n-1)^{r-k},$$

et

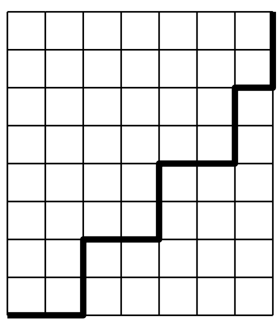
$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{r}{k}\frac{(n-1)^{r-k}}{n^r} = \binom{r}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

On retrouve un exemple de *loi binomiale.*

Exercice 12. Combien l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ a-t-elle de solutions entières et non négatives ?

Solution de l'exercice 12. On cherche l'ensemble des suites de 3 entiers naturels de somme 15. Il y a donc $\binom{17}{2}$ solutions.

Exercice 13. Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à 7 pâtés de maison à l'est et 8 pâtés de maisons au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de 15 pâtés de maison (il ne se dirige ni vers le sud, ni vers l'ouest). On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles de ce schéma rectangulaire. La figure ci-dessous illustre la situation ; un exemple de trajet est représenté en ligne grasse.



1. Proposer un codage permettant de décrire le trajet représenté.
2. Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
3. L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de 8 entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

Solution de l'exercice 13.

1. À tout chemin possible on peut associer la succession de choix que l'on fait à chaque intersection rencontrée. Ces choix peuvent être codés par "E" (est) et "N" (nord), ces deux directions étant les seules répondant aux conditions proposées. Le chemin dessiné devient par exemple,
$$EENNEENNEENNENN.$$
Il est évident que, vice-versa, la donnée de cette suite permet de connaître sans ambiguïté le chemin correspondant puisqu'à chaque intersection, on saura où se diriger.
2. Les chemins ayant le point de départ et d'arrivée donnés ont tous en commun qu'il faut aller 8 fois vers le nord et 7 fois vers l'est. Dans ce codage, on trouvera nécessairement 7 fois le "E" et 8 fois le "N". Donc tout codage est une suite de 15 symboles composée de 7 "E" et 8 "N" et réciproquement. Il apparaît donc une bijection entre l'ensemble des chemins et l'ensemble des suites de 15 caractères décrites ci-dessus. Le nombre de solutions est alors :
$$\binom{15}{7} = \binom{15}{8}.$$

3. À chaque chemin on peut associer la longueur des parcours que l'on fait vers le nord dans chacune des avenues que l'on rencontre. Il y a 8 avenues possibles, ce qui donnera, quel que soit le chemin, une suite de 8 entiers naturels dont la somme est 8. Par exemple, pour le chemin dessiné, on a :
$$0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 2.$$
À partir de ce nouveau codage, on retrouve l'ancien en remplaçant k par :
$$\underbrace{N \cdots N}_{k \text{ fois}} E,$$
Le dernier nombre est uniquement remplacé par la suite de k fois "N". Dans l'exemple ci-dessus, on remplace 0 par "E" et 2 par "NNE" (sauf, pour le dernier 2 qui est remplacé par "NN") et on retrouve le chemin codé en "N" et "E". Nous avons donc explicité une bijection entre l'ensemble des suites de 8 entiers naturels de somme 8 et celui des chemins.

Remarque. Les questions 1 et 3 sont deux interprétations de l'expérience qui consiste à placer 8 boules indistinguables dans 8 urnes. Dans le premier codage les parois des urnes (sauf la première et la dernière) sont remplacées par des "E" et les boules par des "N". Dans le deuxième codage, pour $i \in \{1, \cdots, 8\}$, r_i représente le nombre de boules dans la i-ième urne. La distribution de boules qui correspond à la séquence "$EENNEENNEENNENN$" ou "$0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 2$" est :
$$|||**||**||**|**|$$

Exercice 14. Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants :

1. il est tout en noir ;
2. une seule pièce est noire sur les trois.

Solution de l'exercice 14. Il y a $5 \times 6 \times 8$ façons de s'habiller.

1. Soit A l'événement "il est tout en noir".
$$\mathbb{P}(A) = \frac{2 \times 4 \times 5}{5 \times 6 \times 8}$$
2. Soit B l'événement "une seule pièce est noire sur les trois".
$$\mathbb{P}(B) = \frac{2 \times (6-4) \times (8-5) + (5-2) \times 4 \times (8-5) + (5-2) \times (6-4) \times 5}{5 \times 6 \times 8}$$

Exercice 15. On lance un dé équilibré à six faces. Calculer les probabilités d'obtenir un nombre pair, un multiple de 3, un nombre pair et supérieur à 3.

Solution de l'exercice 15. La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6}$. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est $\frac{2}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair et supérieur à 3 est $\frac{1}{6}$.

Exercice 16. Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Solution de l'exercice 16. La réponse est 1 moins la probabilité de ne gagner aucun lot, soit :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$