Université Paris-Est Créteil, ESIPE
Statistiques descriptives et probabilités
B. de Tilière

Licence première année
Année 2016-2017

TD 5. Conditionnement et indépendance

Exercice 1. On choisit une famille “au hasard" parmi toutes les familles ayant deux enfants.

1. Sachant que la famille choisie a au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
2. Sachant que l'aîné de la famille choisie est un garçon, quelle est la probabilité que le plus jeune soit aussi un garçon ?

Solution de l'exercice 1. On choisit comme univers, $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, où la première coordonnée (resp. la deuxième) donne le sexe de l'aîné (du cadet) des enfants. On munit Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Comme la famille est choisie au “hasard”, on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$, de sorte que pour tout événement A de $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{card}(A)}{4}$.

Soit A l'événement “la famille a au moins un garçon”, B “l'aîné de la famille est un garçon, C “les deux enfants sont des garçons”. Alors, $A \cap C = C$, $B \cap C = C$, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}[\{(G,G),(G,F),(F,G)\}] = \frac{3}{4} > 0,\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}[\{(G,G),(G,F)\}] = \frac{1}{2} > 0,\\
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}[\{(G,G)\}] = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En particulier les probabilités conditionnées par rapport à A ou B sont bien définies. La probabilité recherchée au Point 1. est :

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité recherchée au Point 2. est :

$$\mathbb{P}_B(C) = \frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2. *Un exemple d'urne de Polya.* Une urne contient au départ 5 boules blanches et 7 noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on la réintroduit en rajoutant deux nouvelles boules de la même couleur que celle tirée. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires ? Que la deuxième boule tirée soit noire ?

Remarque : les urnes de Polya peuvent servir pour modéliser la propagation de maladies infectieuses. En effet, chaque réalisation d'un événement augmente la probabilité des réalisations suivantes.

Solution de l'exercice 2. On choisit comme univers $\Omega = \{(B,B),(B,N),(N,B),(N,N)\}$, où la première (resp. deuxième) coordonnée représente l'issue du premier (resp. deuxième) tirage. On munit Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On note $\mathbb{P}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ correspondant à cette expérience. Soit $k \in \{1,2\}$, on note B_k (resp. N_k) l'événement "la boule tirée au k-ième tirage est blanche (resp. noire)". Alors, la donnée de l'exercice nous dit que :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(N_1) = \frac{7}{12}.$$

Comme ces deux probabilités sont strictement positives, on peut conditionner par rapport aux événements B_1 et N_1. D'après l'énoncé, nous savons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{B_1}(B_2) &= \frac{7}{14}, \quad \mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{7}{14}, \\ \mathbb{P}_{N_1}(B_2) &= \frac{5}{14}, \quad \mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

La réponse à la première question est $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$ et à la deuxième, $\mathbb{P}(N_2)$. Calculons ces probabilités. D'après la définition des probabilités conditionnelles, nous savons que :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}(N_1) = \frac{9.7}{14.12} = \frac{3}{8}.$$

De manière analogue, nous pouvons calculer :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}_{B_1}(N_2)\mathbb{P}(B_1) = \frac{7.5}{14.12} = \frac{5}{24}.$$

Comme $\{B_1, N_1\}$ forme une partition de Ω, nous déduisons de la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{9}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}.$$

Exercice 3. On considère trois cartes à jouer de même forme. Les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième en rouge tandis que la troisième porte une face noire et une face rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte est tirée au hasard et placée sur la table. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Solution de l'exercice 3. Chaque carte possède deux faces, que l'on va distinguer. Choisissons l'univers $\Omega = \{R_1, R_2, N_1, N_2, R_3, N_3\}$, où par exemple l'événement élémentaire R_1 est réalisé si c'est la première face de la carte unicolore rouge qui est apparente. On munit Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Étant donné que la carte est tirée "au hasard", on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$, de sorte que pour tout événement A de $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{6}$.

On souhaite calculer la probabilité conditionnelle de l'événement R_3 sachant que l'événement R_1 ou R_2 ou R_3 est réalisé. Soit $A = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, alors $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, et la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(R_3)$ est bien définie. D'après la définition de la probabilité conditionnelle, nous avons :

$$\mathbb{P}_A(R_3) = \frac{\mathbb{P}(A \cap R_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(R_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Sans faire attention, on pourrait penser que cette probabilité est de $1/2$, pensant qu'à partir du moment où le côté rouge apparaît, il reste deux situations équiprobables.

Exercice 4. Le test de dépistage d'un certain virus n'est pas infaillible :

— 1 fois sur 100, il est positif, alors que l'individu n'est pas contaminé,

— 2 fois sur 100, il est négatif alors que l'individu est contaminé.

D'autre part, on sait que sur la population totale, la fraction de porteurs est approximativement de $1/1000$.

1. Étant donné que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu ne soit pas porteur du virus ?
2. Étant donné que son test est négatif, quelle est la probabilité qu'un individu soit porteur du virus ?

Solution de l'exercice 4. On choisit comme espace des états l'ensemble des individus de la population. On appelle V l'événement "l'individu est contaminé", et T l'événement "le test est positif". D'après la donnée de l'exercice nous connaissons les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{1000}, \text{ d'où } \mathbb{P}(V^c) = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

Ces deux probabilités étant strictement positives, on peut conditionner par les événements V et V^c. D'après l'énoncé, nous savons que :

$$\mathbb{P}_{V^c}(T) = \frac{1}{100}, \quad \mathbb{P}_V(T^c) = \frac{2}{100}.$$

On souhaite calculer $\mathbb{P}_T(V^c)$ et $\mathbb{P}_{T^c}(V)$. Comme $0 < \mathbb{P}(V) < 1$, nous pouvons utiliser la formule de Bayes, de sorte que :

$$\mathbb{P}_T(V^c) = \frac{\mathbb{P}_{V^c}(T)\mathbb{P}(V^c)}{\mathbb{P}_{V^c}(T)\mathbb{P}(V^c) + \mathbb{P}_V(T)\mathbb{P}(V)} \sim 0,91.$$

Un calcul similaire montre que :

$$\mathbb{P}_{T^c}(V) = \frac{\mathbb{P}_V(T^c)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}_{V^c}(T^c)\mathbb{P}(V^c) + \mathbb{P}_V(T^c)\mathbb{P}(V)} \sim 0,00002.$$

Exercice 5. Un dé à six faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant.

Score	1	2	3	4	5	6	Total
Fréquence	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	1

On cherche à savoir si, avec ce dé, il est plus probable de faire un score d'au moins 5 lorsque le score est pair ou lorsque le score est impair.

1. Déterminer un choix d'espace probabilisé adapté à cette expérience.

2. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit d'au moins 5 sachant que le score est pair. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit d'au moins 5 sachant que le score est impair. Conclure.
3. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit impair sachant qu'il est d'au moins 5. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit pair sachant qu'il est d'au moins 5. Interpréter.

Solution de l'exercice 5.

1. On choisit comme univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On associe la probabilité $\mathbb{P}$ naturellement définie par le tableau, de sorte que :
$$\mathbb{P}[\{1\}] = 0,1;\ \mathbb{P}[\{2\}] = 0,2;\ \mathbb{P}[\{3\}] = 0,1;\ \mathbb{P}[\{4\}] = 0,4;\ \mathbb{P}[\{5\}] = 0,1; = \mathbb{P}[\{6\}] = 0,1.$$
Soit A l'événement "le score est pair", B l'événement "le score est impair", C "le score est d'au moins 5". Alors,
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\{2,4,6\}] = \mathbb{P}[\{2\}] + \mathbb{P}[\{4\}] + \mathbb{P}[\{6\}] = 0,2 + 0,4 + 0,1 = 0,7\\
&\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A] = 0,3\\
&\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[\{5,6\}] = 0,1 + 0,1 = 0,2.
\end{aligned}$$
Ces trois probabilités étant strictement positives, il est possible de conditionner par les événements A, B ou C.
2. On cherche $\mathbb{P}_A[C]$. D'après la formule des probabilités conditionnelles :
$$\mathbb{P}_A[C] = \frac{\mathbb{P}[A \cap C]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[\{6\}]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}.$$
On cherche ensuite $\mathbb{P}_B[C]$. D'après la formule des probabilités conditionnelles :
$$\mathbb{P}_B[C] = \frac{\mathbb{P}[B \cap C]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[\{5\}]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$
Ainsi il est plus probable de faire un score d'au moins 5 si le score est impair.
3. On cherche $\mathbb{P}_C[A]$. D'après la formule de Bayes, on a :
$$\mathbb{P}_C[A] = \frac{\mathbb{P}_A[C]\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[C]} = \frac{\frac{1}{7}\frac{7}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{1}{2}.$$
On cherche ensuite $\mathbb{P}_C[B] = \mathbb{P}_C[A^c]$. Comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, on a en particulier :
$$\mathbb{P}_C[B] = \mathbb{P}_C[A^c] = 1 - \mathbb{P}_C[A] = \frac{1}{2}.$$
S'il on sait que le score est d'au moins 5, alors il est aussi probable d'obtenir un score pair qu'un score impair.

Exercice 6. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. On considère les événements $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

— Montrer que les événements A, B, C, sont deux-à-deux indépendants,
— Montrer que les événements A, B, C, ne sont pas mutuellement indépendants.

Ainsi l'indépendance deux-à-deux est plus faible que l'indépendance mutuelle.

Solution de l'exercice 6. Comme $(\Omega, \mathcal{A})$ est munit de la probabilité uniforme, on a pour tout événement A de $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

D'autre part, $A \cap B = \{2\}$, $B \cap C = \{3\}$, $A \cap C = \{1\}$, $A \cap B \cap C = \{\emptyset\}$. D'où :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}, \quad \text{et } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

— D'après les calculs ci-dessus, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4},$$

d'où les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants.

— D'après les calculs ci-dessus, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, d'où les événements A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 7. Une urne contient 9 boules indiscernables, numérotée de 1 à 9. On tire une boule "au hasard". Les événements suivants sont-ils indépendants ?

1. A : "la boule tirée porte un numéro pair",
2. B : "le numéro tiré est multiple de 3".

Répondre à la même question lorsque l'urne contient 12 boules.

Solution de l'exercice 7. Soit k le nombre de boules contenues dans l'urne, avec $k = 9$ ou $k = 12$. On choisit comme espace des états $\Omega_k = \{1, 2, \cdots, k\}$, et la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_k)$. Comme la boule est tirée "au hasard", on munit Ω_k de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}_k$, de sorte que pour tout événement A de $\mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}_k(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega_k)} = \frac{\text{card}(A)}{k}.$$

Dans le cas où $k = 9$, les événements $A, B, A \cap B$ s'écrivent :

$$A = \{2, 4, 6, 8\},\ B = \{3, 6, 9\},\ A \cap B = \{6\}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}_9(A) = \frac{4}{9}$, $\mathbb{P}_9(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_9(A \cap B) = \frac{1}{9}$. Comme $\mathbb{P}_9(A \cap B) \neq \mathbb{P}_9(A)\,\mathbb{P}_9(B)$, on en déduit que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Dans le cas où $k = 12$, les événements $A, B, A \cap B$ s'écrivent :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},\ B = \{3, 6, 9, 12\},\ A \cap B = \{6, 12\},$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{12}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{12}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_{12}(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Comme $\mathbb{P}_{12}(A \cap B) = \mathbb{P}_{12}(A)\,\mathbb{P}_{12}(B)$, on en déduit que les événements A et B sont indépendants.

Exercice 8. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. On considère les événements $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

— Montrer que les événements A, B, C, sont deux-à-deux indépendants,
— Montrer que les événements A, B, C, ne sont pas mutuellement indépendants.

Ainsi l'indépendance deux-à-deux est plus faible que l'indépendance mutuelle.

Solution de l'exercice 8. Comme $(\Omega, \mathcal{A})$ est munit de la probabilité uniforme, on a pour tout événement A de $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

D'autre part, $A \cap B = \{2\}$, $B \cap C = \{3\}$, $A \cap C = \{1\}$, $A \cap B \cap C = \{\emptyset\}$. D'où :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}, \quad \text{et } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

— D'après les calculs ci-dessus, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4},$$

d'où les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants.

— D'après les calculs ci-dessus, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, d'où les événements A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.