Université Paris-Dauphine

Contrôle des chaînes de Markov

Master 1, Mathématiques approfondies

Béatrice de Tilière
Basé sur les notes de
M. Gubinelli, B. Haas, F. Siemenhaus

et certaines parties inspirées du polycopié
Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires de J.-F. Le Gall

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Le but de ce chapitre est de construire l'espérance conditionnelle et d'en donner les propriétés principales.

Notations

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
- $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire réelle.
- Soit $p \geq 1$,

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ est une v.a., } \mathbb{E}[|X|^p] < \infty\}.$$

Soit la relation d'équivalence $X \sim Y$, ssi $X = Y$ p.s ; alors

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) / \sim$$

On note $L^p(\mathcal{F}) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On considère une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, il faut penser à $\mathcal{G}$ comme représentant une certaine quantité d'information. La question que l'on aborde dans ce chapitre est la suivante : étant donné la sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, on cherche à estimer la variable aléatoire X sachant l'information (partielle) contenue dans $\mathcal{G}$. Pour cela on va considérer l'*espérance conditionnelle de X sachant* $\mathcal{G}$ qui, intuitivement, est la variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable la plus proche de X.

1.1 Définition

Définition 1.1 (Théorème)**.** Soit $X \in L^1(\mathcal{F})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors, il existe une unique variable aléatoire $Y \in L^1(\mathcal{G})$, telle que :

$$\forall\, B \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{E}[X\mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[Y\mathbb{I}_B]. \tag{1.1}$$

On la note $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et on l'appelle l'*espérance conditionnelle de X sachant* $\mathcal{G}$. La condition (1.1) est équivalente à la condition

$$\forall\, Z \text{ v.a. } \mathcal{G}\text{-mesurable bornée, } \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ]. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. La condition (1.2) implique (1.1) en prenant $Z = \mathbb{I}_B$. Pour la réciproque, on utilise l'approximation usuelle des fonctions $\mathcal{G}$-mesurables par des fonctions étagées $\mathcal{G}$-mesurables.

Preuve de l'unicité. Soient Y, Y' deux v.a. dans $L^1(\mathcal{G})$ telles que

$$\forall\, B \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{E}[X\mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[Y\mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[Y'\mathbb{I}_B].$$

Posons $B = \{Y' > Y\}$, alors $B \in \mathcal{G}$ car les v.a. Y, Y' sont $\mathcal{G}$-mesurables. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(Y' - Y)\mathbb{I}_{\{Y'-Y>0\}}] = 0.$$

La v.a. $(Y' - Y)\mathbb{I}_{\{Y'-Y>0\}}$ étant positive p.s., on déduit que $(Y' - Y)\mathbb{I}_{\{Y'-Y>0\}} = 0$ p.s., d'où $Y' \leq Y$ p.s. De manière analogue $Y' \geq Y$ p.s. et par suite $Y' = Y$ p.s. $\square$

La preuve de l'existence est plus complexe. Il existe deux approches :
- Utiliser le théorème de Radon-Nikodym que l'on verra en exercice.
- Passer par les variables aléatoires dans L^2 et utiliser les projections orthogonales. On utilise cette approche car elle est plus intuitive.

1.2 Construction de l'espérance conditionnelle dans le cas L^2

Le but de cette section est de montrer que dans le cas où la variable aléatoire X est dans $L^2(\mathcal{F})$, l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ est la projection orthogonale de X sur le sous-espace $L^2(\mathcal{G})$. Cette construction servira aussi pour montrer l'existence de l'espérance conditionnelle dans le cas L^1.

1.2.1 Projection orthogonale dans L^2

L'espace $L^2(\mathcal{F})$ est un espace vectoriel. On introduit

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot > : L^2(\mathcal{F}) \times L^2(\mathcal{F}) &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \mathbb{E}(XY). \end{aligned}$$

Remarquons que cette application est bien définie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.1. *L'application $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $L^2(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Forme bilinéaire symétrique : clair. Définie positive : soit $X \in L^2(\mathcal{F})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] = 0$, alors $X = 0$ p.s. $\square$

Le théorème suivant est un cas particulier ($p = 2$) du théorème de Riesz-Fisher qui dit que, pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $L^p(\mathcal{F})$ est un *espace de Banach*, *i.e.* un espace vectoriel normé complet.

Théorème 1.1. *L'espace $(L^2(\mathcal{F}), < \cdot, \cdot >)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Dans toute la démonstration, nous omettons d'écrire $\mathcal{F}$ dans $L^2(\mathcal{F})$. Par définition il faut montrer que L^2 est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$ découlant du produite scalaire, *i.e.* il faut montrer que toute suite de Cauchy dans L^2 converge dans L^2.

• $(X_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans L^2 : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$, tel que $\forall\, n, m \geq N$,

$$\|X_n - X_m\|_2 \leq \varepsilon.$$

• On veut montrer qu'il existe une v.a. X dans L^2, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|X_n - X\|_2 \leq \varepsilon$.

• Étape 1 : il existe une sous-suite $(\hat{X}_m)_{m\geq 1}$ qui converge vers une v.a. X p.s.

D'après la propriété d'être de Cauchy, il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall\, k \geq 1,\ \forall\ n, m \geq n_k, \quad \|X_n - X_m\|_2 \leq \frac{1}{2^k},$$

alors, $\forall\, k \geq 1$, $\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\|_2 \leq \frac{1}{2^k}$. Posons $\hat{X}_k = X_{n_k}$, ainsi $\forall\, k \geq 1$, $\|\hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k\|_2 \leq \frac{1}{2^k}$.

Posons $Y_m = \sum_{k=1}^m |\hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k|$. Alors, $(Y_m)_{m\geq 1}$ est une suite croissante de v.a. positives, donc elle est simplement convergente vers une limite $Y \geq 0$ p.s. Montrons que $Y < \infty$ p.s.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^2] &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[Y_m^2], \text{ d'après le théorème de convergence monotone} \\
&= \lim_{m\to\infty} \|Y_m\|_2^2 = \lim_{m\to\infty} \Big(\Big\| \sum_{k=1}^m |\hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k| \Big\|_2 \Big)^2 \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^m \|\hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k\|_2 \Big)^2, \text{ d'après l'inégalité de Minkowski } (\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p) \\
&\leq \Big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \Big)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

On a donc bien $Y = \sum_{k=1}^\infty |\hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k| < \infty$ p.s. Ainsi, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum_{k=1}^{m-1} (\hat{X}_{k+1}(\omega) - \hat{X}_k(\omega))$ est absolument convergente, donc convergente. En conséquence, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la série

$$\hat{X}_1(\omega) + \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{X}_{k+1}(\omega) - \hat{X}_k(\omega)) = \hat{X}_m(\omega)$$

est convergente. Notons $X(\omega)$ la limite et posons $X(\omega) = 0$ là où la convergence n'a pas lieu. Ainsi, on a montré l'étape 1 : la sous-suite $(\hat{X}_m)_{m\geq 1}$ converge vers X p.s.

• Étape 2 : la sous-suite $(\hat{X}_m)_{n\geq 1}$ converge vers X dans L^2. Rappelons qu'en général la convergence p.s. n'implique pas la convergence dans L^2. Cependant, d'après le théorème de convergence dominée, s'il existe $Z \in L^2$ tel que, pour tout $m \geq 1$, $|\hat{X}_m| \leq Z$, alors c'est vrai. On a, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|\hat{X}_m(\omega)| &= |\hat{X}_1(\omega) + \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{X}_{k+1}(\omega) - \hat{X}_k(\omega))| \\
&\leq |\hat{X}_1(\omega)| + \sum_{k=1}^{m-1} |\hat{X}_{k+1}(\omega) - \hat{X}_k(\omega)| \\
&\leq |\hat{X}_1(\omega)| + Y_{m-1}(\omega) \leq |\hat{X}_1(\omega)| + Y(\omega),
\end{aligned}$$

où $\hat{X}_1 \in L^2$ par hypothèse et $Y \in L^2$ a été démontré ci-dessus, ce qui conclut cette étape.

• Étape 3 : conclusion (une suite de Cauchy avec une sous-suite convergente est convergente). Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, comme $(\hat{X}_m)_{m\geq 1}$ converge vers X dans L^2,

$$\exists\ M_0 \text{ tel que } \forall\, m \geq M_0, \quad \|X_{n_m} - X\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $(X_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy,

$$\exists\ N_0 \text{ tel que } \forall\, n, m \geq N_0, \quad \|X_n - X_m\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $m_0 = \max\{M_0, N_0\}$. Alors, $n_{m_0} \geq m_0$ (car $(n_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante), d'où pour tout $n \geq m_0$,

$$\|X_n - X\|_2 \leq \|X_n - X_{n_{m_0}}\|_2 + \|X_{n_{m_0}} - X\|_2 \leq \varepsilon.$$

D'après l'étape précédente nous savons que $X \in L^2$, ainsi nous avons bien démontré que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans L^2. □

Théorème 1.2 (Projection orthogonale dans L^2)**.** *Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu et $L^2(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{F})$. Pour tout $X \in L^2(\mathcal{F})$, il existe une unique (p.s.) v.a. $Y \in L^2(\mathcal{G})$ qui satisfait une des propriétés équivalentes suivantes.*

1. $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \inf_{Z \in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Z)^2]$.
2. $X - Y \perp L^2(\mathcal{G})$, *c'est-à-dire que pour tout* $Z \in L^2(\mathcal{G})$, $\mathbb{E}[(X - Y)Z] = 0$.

On appelle Y la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathcal{G})$.

Démonstration.

• Étape 1 : montrons l'existence d'une v.a. $Y \in L^2(\mathcal{G})$ satisfaisant la propriété 1. Notons que l'infimum, $\inf_{Z\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Z)^2]$ existe car l'ensemble en question est non-vide et minoré par 0. Soit donc $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite minimisante dans $L^2(\mathcal{G})$, *i.e.*,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X - Y_n)^2] = \inf_{Z\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Z)^2] := \Delta.$$

Montrons que cette suite est de Cauchy dans $L^2(\mathcal{G})$. Pour cela utilisons l'identité $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a - b)^2$ avec $a = Y_n - X, b = X - Y_m$. On obtient, pour tout $n, m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y_n - Y_m)^2] &= 2\Big(\mathbb{E}[(Y_n - X)^2] + \mathbb{E}[(X - Y_m)^2]\Big) - 4\mathbb{E}\Big[\Big(X - \frac{Y_n + Y_m}{2}\Big)^2\Big] \\
&\leq 2\Big(\mathbb{E}[(Y_n - X)^2] + \mathbb{E}[(X - Y_m)^2]\Big) - 4\Delta,
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\big[\big(X - \frac{Y_n+Y_m}{2}\big)^2\big] \geq \Delta$ étant donné que la fonction $\frac{Y_n+Y_m}{2} \in L^2(\mathcal{G})$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\mathbb{E}[(Y_n - X)^2] - \Delta| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire on déduit que, pour tout $n, m \geq N$,

$$\mathbb{E}[(Y_n - Y_m)^2] \leq 2\Big(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2\Delta\Big) - 4\Delta = \varepsilon,$$

d'où la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathcal{G})$. D'après le Théorème 1.1, elle converge dans $L^2(\mathcal{G})$ vers une v.a. que l'on note Y (on rappelle qu'en particulier $Y \in L^2(\mathcal{G})$).

Il nous reste à montrer que $\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \Delta$, autrement dit que $\|X-Y\|_2 = \sqrt{\Delta}$. Utilisant le fait que $Y \in L^2(\mathcal{G})$ à gauche et l'inégalité de Minkowski à droite, on obtient

$$\sqrt{\Delta} \leq \|X-Y\|_2 \leq \|X-Y_n\|_2 + \|Y_n - Y\|_2.$$

Le premier terme de droite tend vers $\sqrt{\Delta}$ par définition de $(Y_n)_{n\geq 1}$ et le deuxième tend vers 0 car nous avons montré que $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$. On conclut la preuve par encadrement en prenant la limite.

• Étape 2 : montrons l'équivalence entre les propriétés 1. et 2. Soit $Y \in L^2(\mathcal{G})$ satisfaisant la propriété 1. et $Z \in L^2(\mathcal{G})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y + tZ \in L^2(\mathcal{G})$, d'où en utilisant le point 1. dans la première inégalité, on a :

$$0 \leq \mathbb{E}[(X-Y-tZ)^2] - \mathbb{E}[(X-Y)^2] = -2t\mathbb{E}[(X-Y)Z] + t^2\mathbb{E}[Z^2].$$

d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2t\mathbb{E}[(X-Y)Z] \leq t^2\mathbb{E}[Z^2]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\forall\, t > 0, \quad \mathbb{E}[(X-Y)Z] \leq \frac{t}{2}\mathbb{E}[Z^2] \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{2}\mathbb{E}[Z^2] = 0,\\
&\forall\, t < 0, \quad \mathbb{E}[(X-Y)Z] \geq \frac{t}{2}\mathbb{E}[Z^2] \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{2}\mathbb{E}[Z^2] = 0,
\end{aligned}$$

et par suite $\mathbb{E}[(X-Y)Z] = 0$.

Réciproquement, soit $Y \in L^2(\mathcal{G})$ satisfaisant à la propriété 2. et $Z \in L^2(\mathcal{G})$; alors $Z - Y \in L^2(\mathcal{G})$ et,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Z)^2] &= \mathbb{E}[(X-Y)^2] - 2\mathbb{E}[(X-Y)(Z-Y)] + \mathbb{E}[(Z-Y)^2]\\
&= \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Z-Y)^2], \text{ d'après la propriété 2.}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $Z \in L^2(\mathcal{G})$, $\mathbb{E}[(X-Y)^2] \leq \mathbb{E}[(X-Z)^2]$, et par suite,

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] \leq \inf_{Z\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X-Z)^2].$$

Comme $Y \in L^2(\mathcal{G})$, $\mathbb{E}[(X-Y)^2] \geq \inf_{Z\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X-Z)^2]$, d'où Y satisfait à la propriété 1.

• Étape 3 : unicité. Supposons qu'il existe $Y, Y' \in L^2(\mathcal{G})$ satisfaisant la propriété 2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y-Y')^2] &= \mathbb{E}[(Y-X+X-Y')(Y-Y')]\\
&= \mathbb{E}[(Y-X)(Y-Y')] - \mathbb{E}[(Y'-X)(Y-Y')] = 0, \text{ car } Y - Y' \in L^2(\mathcal{G}),
\end{aligned}$$

d'où $Y - Y' = 0$ p.s. □

1.2.2 Construction de l'espérance conditionnelle dans le cas L^2

Soit $X \in L^2(\mathcal{F})$ et $Y \in L^2(\mathcal{G})$ la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathcal{G})$. Pour tout $B \in \mathcal{G}$, $\mathbb{I}_B \in L^2(\mathcal{G})$, d'où d'après la propriété 2. du Théorème 1.2,

$$\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{I}_B] = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{E}[X\mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[Y\mathbb{I}_B].$$

Ainsi dans ce cas, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathcal{G})$.

1.3 Construction de l'espérance conditionnelle dans le cas L^1

Construisons l'espérance conditionnelle dans le cas L^1 en utilisant l'existence établie dans le cas L^2.

Preuve. Existence de l'espérance conditionnelle, cas L^1. Soit $X \in L^1(\mathcal{F})$ et supposons $X \geq 0$ p.s. On procède par approximation.

Pour tout $n \geq 1$, on définit $X_n = X \wedge n$, alors $X_n \in L^2(\mathcal{F})$ et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est croissante. On note Y_n la projection orthogonale de X_n sur $L^2(\mathcal{G})$. En utilisant la propriété de positivité de l'espérance conditionnelle - voir proposition 1.1 - on déduit que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est positive et croissante p.s., elle est donc convergente p.s. ; notons Y sa limite $\in [0, \infty]$ (et on pose $Y(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ où la limite n'est pas définie), qui est $\mathcal{G}$-mesurable. D'après le théorème de convergence monotone (appliqué deux fois) on a, pour tout $B \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_B Y] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B Y_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_B X].$$

En prenant $B = \Omega$ dans l'identité ci-dessus, on obtient que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$, d'où $Y \in L^1(\mathcal{G})$ ($X \geq 0$, $X \in L^1(\mathcal{F})$). On conclut que $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Si on n'a pas $X \geq 0$, on écrit $X = X^+ - X^-$, alors $Y^+ = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]$, $Y^- = \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$ existent et $Y = Y^+ - Y^-$ vérifie la définition de l'espérance conditionnelle (utilise la linéarité de l'espérance conditionnelle - voir après). $\square$

1.4 Quelques cas particuliers

Dans cette section nous explicitons quelques cas particuliers utiles d'espérance conditionnelle.

1.4.1 Espérance conditionnelle discrète

Si $(A_i)_{i\geq 1}$ forme une partition de Ω, si $\mathcal{G} = \sigma((A_i)_{i\geq 1})$ et si, pour tout $i \geq 1$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$, alors

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i\geq 1} \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{I}_{A_i} = \sum_{i\geq 1} \frac{\int_\Omega X(\omega)\mathbb{I}_{A_i}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{I}_{A_i}.$$

En particulier, si on considère la tribu triviale $\sigma(\emptyset, \Omega)$,

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\emptyset, \Omega)] = \mathbb{E}[X].$$

1.4.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Soit X et Y deux v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$. On note :

$$\mathbb{E}[X|Y] := \mathbb{E}[X|\sigma(Y)].$$

Rappels.

— Un événement $A \in \sigma(Y)$ ssi il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = \{Y \in B\}$.

— Une fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\sigma(Y)$-mesurable ssi il existe une fonction borélienne f telle que $g = f(Y)$.

• **Cas des variables aléatoires discrètes**. Supposons que Y est à valeurs dans un espace dénombrable E. Alors,

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{y \in E} \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y=y)} \mathbb{I}_{\{Y=y\}}.$$

• **Cas des variables aléatoires à densité**. Supposons que le couple (X, Y) a pour densité $p(x, y)$, *i.e.*, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)p(x,y)dxdy.$$

Notons q la densité de Y :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad q(y) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dx.$$

Alors pour toute fonction borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(X) \in L^1(\mathcal{F})$, on a

$$\mathbb{E}[h(X)|Y] = \int h(x)\nu(Y, dx),$$

où

$$\nu(y, dx) = \begin{cases} \frac{1}{q(y)} p(x,y)dx \text{ si } q(y) > 0 \\ \delta_0(dx) \text{ si } q(y) = 0. \end{cases}$$

1.5 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Dans cette section, nous énumérons les propriétés de l'espérance conditionnelle. Nous les partageons en deux groupes : celles similaires aux propriétés de l'espérance et celles qui lui sont spécifiques. Certaines seront démontrées en exercices.

Proposition 1.1. *Dans la suite $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, les v.a. X, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont dans $L^1(\mathcal{F})$ et les propriétés sont vraies p.s.*

1. Linéarité. *L'application $X \in L^1(\mathcal{F}) \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est linéaire.*
2. Positivité. *Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.*
3. Inégalité de Cauchy-Schwartz conditionnelle. *Supposons $X, Y, XY \in L^2(\mathcal{F})$, alors :*

$$|\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]^{\frac{1}{2}}\, \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]^{\frac{1}{2}}.$$

4. Convergence monotone conditionnelle. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives qui converge vers une v.a. X p.s., alors*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$$

5. Lemme de Fatou conditionnel. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives, alors*

$$\mathbb{E}[\liminf X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$

6. Convergence dominée conditionnelle. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. qui converge vers une v.a.* X *p.s. Supposons qu'il existe une v.a. positive* Z *telle que, pour tout* $n \geq 1$, $|X_n| \leq Z$ *et que* $\mathbb{E}[Z] < \infty$. *Alors,*
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$

7. Inégalité de Jensen conditionnelle. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe telle que* $f(X) \in L^1(\mathcal{F})$, *alors*
$$f(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}].$$
En particulier, $|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{G}]$.

Proposition 1.2. *Dans toute la suite* $X \in L^1(\mathcal{F})$, $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ *sont des sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *et les propriétés sont vraies p.s.*

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
2. *Si* $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$,
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2].$$
3. *Si* Y *est* $\mathcal{G}$*-mesurable et* $XY \in L^1(\mathcal{F})$, *alors*
$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$
4. *Si* X *est indépendante de* $\mathcal{G}$, *alors*
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$
5. *Supposons que* X *est indépendante de* $\mathcal{G}$, *que* Y *est* $\mathcal{G}$*-mesurable et que* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction borélienne telle que* $f(X,Y) \in L^1(\mathcal{F})$, *alors*
$$\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{G}] = g(Y),$$
où $g(y) = \mathbb{E}[f(X,y)]$.

Chapitre 2

Arrêt optimal en horizon fini

2.1 Temps d'arrêt et martingales

2.1.1 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un *processus aléatoire discret réel* est une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dans la suite nous ne considérons que des processus de ce type.

Définition 2.1. Une *filtration* de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ est un *espace de probabilité filtré.*

Interprétation : le paramètre n représente le temps et $\mathcal{F}_n$ est l'information connue au temps n.

Exemple 2.1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus et, pour tout $n \geq 0$, soit

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n),$$

alors $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la *filtration naturelle* ou *canonique* de $(X_n)_{n\geq 0}$.

Définition 2.2. Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est dit *adapté* à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si, pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Remarque 2.1. Par définition, la filtration canonique est la plus petite filtration qui rende le processus adapté.

Dans la suite, nous fixons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ et toutes les notions sont relatives à cet espace.

Définition 2.3. Une v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est appelée un *temps d'arrêt* (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$) si, pour tout $n \geq 0$,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

ou de manière équivalente si pour tout $n \geq 0$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 2.2. Si T est un temps d'arrêt alors, pour tout $n \geq 1$, $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Interprétation : les temps d'arrêt sont des instants aléatoires où la décision de “s'arrêter” est prise en fonction de ce qui s'est passé dans le passé et au présent.

Exemple 2.2.

1. Soit $k \geq 0$, alors la variable aléatoire $T \equiv k$ est un temps d'arrêt.
2. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté et A un borélien de $\mathbb{R}$, alors

$$T_A = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n \in A\} & \text{s'il existe } n \geq 0 \text{ t.q. } X_n \in A \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   est un temps d'arrêt. En effet, pour tout $n \geq 0$,

$$\{T_A = n\} = \{X_0 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A,\ X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus discret où X_n représente le prix d'une action au temps n. Posons $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0} = (\sigma(X_0, \ldots, X_n))_{n\geq 0}$ et supposons que cette action a une durée de vie N. Soit T l'instant où le prix de l'action est maximal, alors T n'est pas un temps d'arrêt. En effet pour tout $n \geq 0$,

$$\{T = n\} = \bigcap_{0\leq k\leq N} \{X_k \leq X_n\} \notin \mathcal{F}_n.$$

   Ceci s'interprète par le fait qu'on ne peut pas décider de vendre une action au moment où elle est à son maximum en ne connaissant que l'information du passé et du présent.

Proposition 2.1.

1. *Soient S et T deux temps d'arrêt, alors $S \wedge T$, $S \vee T$ sont des temps d'arrêt.*
2. *Si $(T_k)_{k\geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\inf_k(T_k), \sup_k(T_k), \liminf_k(T_k), \limsup_k(T_k)$ sont des temps d'arrêt.*

En particulier, pour tout $n \geq 0$, si T est un temps d'arrêt, alors $n \wedge T$ et $n \vee T$ en sont aussi.

Définition 2.4. Soit T un temps d'arrêt. La *tribu du passé jusqu'à l'instant T* est

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \ : \ \forall n \geq 0,\ A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Cette tribu représente l'information connue jusqu'au temps (aléatoire) T. Dans la définition, on peut remplacer $\{T = n\}$ par $\{T \leq n\}$; on a alors l'interprétation suivante, A est observable à l'instant n si T a eu lieu avant n.

Propriété 2.1. *Soit T un temps d'arrêt.*

1. *$\mathcal{F}_T$ est une tribu.*
2. *Soit $k \geq 0$ et supposons que $T \equiv k$, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_k$.*
3. *T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
4. *Supposons que $T < \infty$ p.s. et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté, alors X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
5. *Soient S, T des temps d'arrêt tels que $S \leq T$ p.s., alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Démonstration. Voir feuille exercice 2. □

Remarque 2.3. Pour tout $n \geq 0$, $n \wedge T$ est un temps d'arrêt borné p.s. donc fini p.s. Ainsi, d'après les propriétés 4. et 5. si $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus adapté, alors pour tout $n \geq 0$, $X_{n\wedge T}$ est $\mathcal{F}_{n\wedge T}$-mesurable et donc $\mathcal{F}_n$-mesurable. Par conséquent, si le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté, le processus $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est aussi adapté.

2.1.2 Martingales et théorème d'arrêt

Définition 2.5. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté tel que, pour tout $n \geq 0$, X_n est intégrable. On dit que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une *martingale*, resp. *sur-martingale*, *sous-martingale*, si

$$\forall\, n \geq 0, \quad \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, \quad \text{resp. } \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n, \quad \text{resp. } \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n.$$

Interprétation : une martingale représente un jeu équitable. Imaginons que X_n représente l'avoir du joueur au temps n, alors le gain moyen qu'il peut espérer au temps $n+1$ connaissant toute l'information jusqu'au temps n est son gain à l'instant n ; en résumé le joueur ne gagne ni ne perd.

Propriété 2.2. *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, resp. sur-martingale, alors*

1. *Pour tout $0 \leq n \leq m$, $\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n] = X_n$, resp. $\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n] \leq X_n$.*
2. *Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$, resp. $\mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X_0]$.*

Démonstration. Nous ne démontrons que le cas martingale, le cas sur-martingale étant analogue. La propriété 1. se montre par récurrence. Si $m = n$, c'est une propriété de l'espérance conditionnelle. L'étape d'induction utilise le fait suivant : soit $m \geq n+1$, alors $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{m-1}$ et d'après une propriété de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_{m-1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{m-1}|\mathcal{F}_n].$$

Pour montrer la propriété 2. on prend l'espérance dans l'égalité du point 1. □

Exemple 2.3.

1. Soit X une v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$; posons

$$\forall\, n \geq 0, \quad X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n],$$

   alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. En effet, pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, dans L^1 et

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = X_n,$$

   en utilisant une propriété de l'espérance conditionnelle.

2. Marche aléatoire. Soit $(Y_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes, intégrables, telles que, pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{E}[Y_k] = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k.$$

   Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n))_{n\geq 0}$. En effet, pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, dans L^1 et

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n+1} Y_k|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}[Y_{n+1} + X_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}] + X_n = X_n,$$

   d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, et en utilisant que les v.a. $(Y_k)_{k\geq 0}$ sont indépendantes et centrées.

Théorème 2.1 (Théorème d'arrêt)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale, resp. sur-martingale, et soit T un temps d'arrêt ; alors $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est aussi une martingale, resp. sur-martingale. De plus, si le temps d'arrêt T est borné p.s., on a $X_T \in L^1(\mathcal{F}_T)$ et*

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0], \;\; \textit{resp. } \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[X_0].$$

Démonstration. Montrons d'abord que $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale. D'après la remarque 2.3, ce processus est adapté. Une preuve alternative s'obtient en écrivant, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n\wedge T} = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \mathbb{I}_{\{T=i\}} + X_n \mathbb{I}_{\{T\geq n\}}. \tag{2.1}$$

De cette expression on déduit que, pour tout $n \geq 0$, la v.a. $X_{n\wedge T}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et aussi qu'elle est intégrable. En effet,

$$|X_{n\wedge T}| \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i|,$$

qui est intégrable comme somme finie de v.a. intégrables. Pour la dernière propriété d'une martingale, calculons

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\wedge T} - X_{n\wedge T} &\overset{(2.1)}{=} X_{n+1}\mathbb{I}_{\{T\geq n+1\}} - X_n \mathbb{I}_{\{T\geq n\}} + X_n \mathbb{I}_{\{T=n\}} \\ &= (X_{n+1} - X_n)\mathbb{I}_{\{T\geq n+1\}}. \end{aligned}$$

La v.a. $\mathbb{I}_{\{T\geq n+1\}}$ étant $\mathcal{F}_n$-mesurable, et $(X_n)_{n\geq 0}$ étant une martingale, on déduit immédiatement que

$$\mathbb{E}[X_{(n+1)\wedge T} - X_{n\wedge T}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{I}_{\{T\geq n+1\}}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0.$$

Supposons maintenant que T est borné p.s., c'est-à-dire qu'il existe $N > 0$ tel que $T \leq N$ p.s. Le fait que X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable est montré dans la propriété 2.1. Montrons que $X_T \in L^1$. On a

$$\mathbb{E}[|X_T|] = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_{\{T=n\}}] \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[|X_n|],$$

qui est dans L^1 comme somme finie de v.a. dans L^1.

Utilisant de plus que $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale, on déduit que

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_{N\wedge T}] = \mathbb{E}[X_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0],$$

ce qui finit de démontrer la deuxième partie du théorème. □

Théorème 2.2. *Soient S, T deux temps d'arrêt bornés p.s. tels que $S \leq T$ p.s., et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale, alors*

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $N > 0$ tel que $S \leq T \leq N$ p.s. Montrons d'abord que

$$\mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_T] = X_T.$$

On a $X_N \in L^1(\mathcal{F})$ et d'après le théorème 2.1, $X_T \in L^1(\mathcal{F}_T)$. Ainsi, d'après la définition de l'espérance conditionnelle, il suffit de montrer que pour tout $B \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[X_T \mathbb{I}_B]$. Rappelons que $B \in \mathcal{F}_T$ ssi pour tout $n \geq 0$, $B \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Calculons,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_B] &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}}] \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}} | \mathcal{F}_n]], \text{ (propriété de l'espérance conditionnelle)} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}} \mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_n]], \text{ car } B \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}} X_n], \text{ car } (X_n)_{n\geq 0} \text{ est une martingale} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}} X_T] = \mathbb{E}[X_T \mathbb{I}_B].
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$. On a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_T] | \mathcal{F}_S], \text{ car } \mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_T] = X_T \\
&= \mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_S], \text{ car } \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T \text{ d'après la propriété 2.1} \\
&= X_S.
\end{aligned}$$

□

2.2 Arrêt optimal en horizon fini : résultats généraux

Dans cette section on se donne

$$(\mathrm{H}_1) \begin{cases} \circ \ \text{Un espace probabilisé filtré } (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}) \text{ où, pour tout } n \geq 0, \mathcal{F}_n \text{ représente} \\ \quad \text{l'information connue au temps } n. \\ \circ \ \text{Un processus } (Y_n)_{n\geq 0} \text{ adapté à la filtration } (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}. \text{ Typiquement, pour tout } n \geq 0, \\ \quad Y_n \text{ représente le gain à l'instant } n, \text{ on suppose que } Y_n \text{ est intégrable.} \\ \circ \ \text{Un entier } N \text{ déterministe qui représente l'horizon de temps.} \end{cases}$$

À chaque instant précédant N on peut décider de continuer ou de s'arrêter et on cherche à optimiser le gain moyen. Autrement dit, le but est de trouver le moment optimal pour s'arrêter, d'où le terme d'*arrêt optimal*. Cet instant ne doit dépendre que de l'information passée ou présente, c'est pourquoi apparaissent naturellement les temps d'arrêt.

Avant de formaliser la question, voici quelques exemples d'applications.

- Un joueur doit décider quand quitter un jeu.
- Un particulier vend sa maison ; des acheteurs successifs proposent un prix. A chaque fois le vendeur peut accepter de vendre à ce prix, mais un prix refusé ne se représente pas.
- Vous vous dirigez en voiture vers un but en cherchant à vous garer le plus près possible. Vous ne pouvez pas faire demi-tour, si vous ne profitez pas d'une place libre lorsque vous la voyez, vous ne la retrouverez pas.

- Vous souhaitez déterminer le bon moment pour vendre ou acheter une action.

Formalisons maintenant la question. Notons $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N.

Définition 2.6.

- Le *gain moyen optimal*, noté J_N, est

$$J_N = \sup_{T \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}[Y_T].$$

- Un *temps d'arrêt optimal*, noté $T^\star$, est un temps d'arrêt dans $\mathcal{T}_N$ tel que

$$\mathbb{E}[Y_{T^\star}] = J_N.$$

  Remarquons, qu'a priori, on ne sait pas si un tel temps d'arrêt existe, ou même s'il est unique.

La solution du problème d'arrêt optimal (comme la plupart des problèmes d'optimisation) passe par la détermination d'une *fonction valeur* $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ associée aux différents choix possibles au temps n. La fonction valeur représente le gain que je peux espérer au temps n en fonction de l'information accumulée jusqu'au temps n.

A chaque étape j'ai deux choix : m'arrêter ou continuer sauf au temps final N où je suis obligé de m'arrêter. Au temps final, je gagne Y_N. Au temps $n < N$, si je m'arrête je gagne Y_n ; si je continue, connaissant l'information jusqu'au temps n, je peux espérer gagner $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. On souhaite choisir la meilleure des deux solutions. La fonction valeur $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ est donc définie par récurrence descendante de la manière suivante :

- $Z_N = Y_N$,
- $\forall\, 0 \leq n \leq N-1,\ Z_n = \max(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n])$.

Montrons une propriété importante de (Z_n).

Proposition 2.2. *La fonction valeur $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ est une sur-martingale, et c'est la plus petite sur-martingale supérieure ou égale à $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$.*

Définition 2.7. On dit que (Z_n) est l'*enveloppe de Snell* du processus adapté (Y_n).

Démonstration.

- Le processus $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ est une sur-martingale.
  - (Z_n) est adapté : clair.
  - $\forall\, n \geq 0,\ Z_n \in L^1$. Par récurrence descendante. C'est vrai pour $Z_N = Y_N$. Puis,

$$|Z_n| \leq |Y_n| + |\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]|,$$

    et les deux termes du membre de droite sont dans L^1.
  - $Z_n \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$: clair.
- (Z_n) est supérieure ou égale à (Y_n) : clair.
- (Z_n) est la plus petite ... Soit (V_n) une sur-martingale supérieure ou égale à (Y_n). Montrons par récurrence descendante que (V_n) est supérieure ou égale à (Z_n). On a $V_N \geq Y_N = Z_N$. Supposons vrai pour $n+1$; alors,

$$V_n \geq Y_n \quad \text{et} \quad V_n \overset{\text{sur-mart.}}{\geq} \mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{\text{hyp.}}{\geq} \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

donc $V_n \geq \max(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = Z_n$. □

Comme mentionné plus haut, pour tout $0 \leq n \leq N$, Z_n représente le gain que l'on peut espérer au temps n connaissant l'information accumulée jusqu'au temps n. Ainsi il semble qu'un moment opportun pour s'arrêter est lorsque $Y_n = Z_n$. Ceci motive la définition suivante :

$$T^\star = \min\{0 \leq k \leq N \,:\, Y_k = Z_k\} = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 \,:\, Y_k \geq \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant démontre les propriétés fondamentales de $T^\star$ et résoud de manière théorique le problème d'optimisation que nous nous sommes posé.

Théorème 2.3.

1. *$T^\star \in \mathcal{T}_N$, autrement dit $T^\star$ est un temps d'arrêt borné par N.*
2. *$(Z_{n\wedge T^\star})_{0\leq n\leq N}$ est une martingale.*
3. *$T^\star$ est un temps d'arrêt optimal et*

$$\sup_{T\in\mathcal{T}_N} \mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}] = \mathbb{E}[Z_{T^\star}] = \mathbb{E}[Z_0].$$

4. *$T^\star$ est le* plus petit *temps d'arrêt optimal.*

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que pour calculer le gain optimal il suffit de calculer $\mathbb{E}[Z_0]$.

Démonstration.

1. Le processus $(Z_n - Y_n)_{0\leq n\leq N}$ est adapté, et $\{0\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après l'exemple 2.2, $T^\star = \min\{0 \leq k \leq N \,:\, Z_k - Y_k = 0\}$ est un temps d'arrêt.
2. D'après le théorème d'arrêt, nous savons que $(Z_{n\wedge T^\star})_{0\leq n\leq N}$ est une sur-martingale. Il nous reste donc à considérer $\mathbb{E}[Z_{(n+1)\wedge T^\star}|\mathcal{F}_n]$. Procédons comme dans la preuve du théorème d'arrêt ; écrivons

$$Z_{(n+1)\wedge T^\star} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \mathbb{I}_{\{T^\star=i\}} + Z_{n+1}\mathbb{I}_{\{T^\star\geq n+1\}} = Z_{T^\star}\mathbb{I}_{\{T^\star\leq n\}} + Z_{n+1}\mathbb{I}_{\{T^\star\geq n+1\}}.$$

Comme le premier terme du membre de droite est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $\mathbb{I}_{\{T^\star\geq n+1\}}$ l'est également, on déduit que

$$\mathbb{E}[Z_{(n+1)\wedge T^\star}|\mathcal{F}_n] = Z_{T^\star}\mathbb{I}_{\{T^\star\leq n\}} + \mathbb{I}_{\{T^\star\geq n+1\}}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Mais si $T^\star \geq n+1$, on a $Y_n \neq Z_n$ ce qui, par définition de Z_n implique que, $Z_n = \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Donc finalement,

$$\mathbb{E}[Z_{(n+1)\wedge T^\star}|\mathcal{F}_n] = Z_{T^\star}\mathbb{I}_{\{T^\star\leq n\}} + Z_n\mathbb{I}_{\{T^\star\geq n+1\}} = Z_{n\wedge T^\star}.$$

3. Comme le temps d'arrêt $T^\star$ est borné, d'après le point 2., on a

$$\mathbb{E}[Z_{T^\star}] = \mathbb{E}[Z_{N\wedge T^\star}] = \mathbb{E}[Z_{0\wedge T^\star}] = \mathbb{E}[Z_0].$$

De plus $\mathbb{E}[Z_{T^\star}] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$ par définition de $T^\star$. Il nous reste à montrer l'optimalité, c'est-à-dire, que pour tout temps d'arrêt $S \in \mathcal{T}_N$, $\mathbb{E}[Y_S] \leq \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$. Par définition de (Z_n), on a

$Z_S \geq Y_S$ p.s. De plus, vu que (Z_n) est une sur-martingale et que le temps d'arrêt S est borné, on a par le théorème d'arrêt

$$\mathbb{E}[Z_S] \leq \mathbb{E}[Z_0].$$

En se souvenant que $\mathbb{E}[Z_0] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$, on conclut

$$\mathbb{E}[Y_S] \leq \mathbb{E}[Z_S] \leq \mathbb{E}[Y_{T^\star}].$$

4. Soit $S \in \mathcal{T}_N$ un temps d'arrêt optimal. Nous devons montrer que $S \geq T^\star$. En utilisant l'optimalité et le théorème d'arrêt comme au point précédent, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[Y_S] \overset{\text{opt.}}{=} \mathbb{E}[Y_{T^\star}] = \mathbb{E}[Z_0] \overset{\text{th. ar.}}{\geq} \mathbb{E}[Z_S] \quad \Rightarrow \mathbb{E}[Y_S - Z_S] \geq 0.$$

De plus, par définition de (Z_n), on a $Z_S \geq Y_S$ p.s. ainsi $\mathbb{E}[Z_S - Y_S] \geq 0$ et par suite $\mathbb{E}[Z_S - Y_S] = 0$. Utilisant à nouveau que $Z_S - Y_S \geq 0$ p.s. on conclut que $Z_S = Y_S$ p.s. En revenant à la définition de $T^\star$, ceci implique que $S \geq T^\star$ p.s.

□

2.3 Arrêt optimal : problèmes avec structure markovienne

On se place dans le même cadre que celui de la section précédente, mais on suppose de plus que le processus $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ peut se construire à l'aide d'une *chaîne de Markov*.

2.3.1 Rappels sur les chaînes de Markov

Soit E un espace dénombrable muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.8. Une *matrice stochastique* est une famille $(Q(x,y))_{x,y\in E}$ de nombres dans $[0,1]$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{y\in E} Q(x,y) = 1.$$

Définition 2.9.

- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus à valeurs dans E et soit, pour tout $n \geq 0$, une matrice stochastique Q_n. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une *chaîne de Markov* si, pour tout $n \geq 0$, pour tout $(x_0,\ldots,x_{n-1},x,y) \in E^{n+2}$ tel que $\mathbb{P}(X_0 = x_0,\ldots,X_n = x) > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = Q_n(x,y).$$

  Autrement dit, la loi du futur connaissant le passé et le présent ne dépend que du présent.
- Les matrices $(Q_n)_{n\geq 0}$ sont appelées les *matrices de transition* de la chaîne.
- Si pour tout $n \geq 0$, $Q_n \equiv Q$, la chaîne de Markov est dite *homogène* ; c'est-à-dire que le mécanisme de transition entre l'instant n et l'instant $n+1$ ne dépend pas de n. Sinon elle est dite *inhomogène*.

Notation. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(X_{n+1})$ est dans L^1. On note

$$Q_n f(x) := \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n = x] = \sum_{y\in E} Q_n(x,y) f(y).$$

EXEMPLE 2.4. Dans les exemples suivants, on considère $(x_0, \dots, x_{n-1}, x, y) \in E^{n+2}$ et on suppose que les événements par rapport auxquels on conditionne ont probabilité strictement positive.

1. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans E, alors c'est une chaîne de Markov. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x, X_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x)} \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x).\end{aligned}$$

   Le noyau de transition est $Q_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y)$. Si les v.a. sont identiquement distribuées alors la chaîne de Markov est homogène.

2. Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $E = \mathbb{Z}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Alors $(S_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la *marche aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{Z}$; c'est une chaîne de Markov homogène. En effet, on a que X_{n+1} est indépendante de $(S_k)_{0\leq k\leq n}$, puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_0 = x_0, \dots, S_n = x) &= \frac{\mathbb{P}(S_0 = x_0, \dots, S_n = x, S_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(S_0 = x_0, \dots, S_n = x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = y - x, S_0 = x_0, \dots, S_n = x)}{\mathbb{P}(S_0 = x_0, \dots, S_n = x)} \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x) = \mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x).\end{aligned}$$

   Le noyau de transition est $Q(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x) = \mathbb{P}(X_0 = y - x)$.

3. On reprend le processus de Galton-Watson introduit dans la feuille d'exercice 1. On a $(X_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $Z_0 = 1$, puis pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \begin{cases} X_{n,1} + \dots + X_{n,Z_{n-1}} & \text{si } Z_{n-1} \geq 1 \\ 0 & \text{si } Z_{n-1} = 0. \end{cases}$$

   Alors $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène. En effet, on a que les v.a. $(X_{n+1,j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$, puis si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n+1} = y | Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x) &= \frac{\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x, Z_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x, \sum_{j=1}^{x} X_{n+1,j} = y)}{\mathbb{P}(Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x)} \\ &= \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{x} X_{n+1,j} = y\Big), \text{ par indépendance} \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = y | Z_n = x).\end{aligned}$$

   Le noyau de transition est $Q(x, y) = \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{x} X_{n+1,j} = y) = \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{x} X_{1,j} = y)$, si $x \neq 0$; $Q(0, 0) = 1$, $Q(0, y) = 0$ si $y \neq 0$.

2.3.2 Arrêt optimal avec structure markovienne

En plus des hypothèses (H_1), dans la suite de cette section, on suppose que :

$$(\mathrm{H}_2)\begin{cases} \circ \quad (X_n)_{n\geq 0} \text{ est une chaîne de Markov à valeurs dans } E \text{ dénombrable. On note } (Q_n)_{n\geq 0} \text{ les} \\ \quad\ \text{matrices de transition de la chaîne de Markov.} \\ \circ \quad (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0} \text{ est la filtration canonique.} \\ \circ \quad \text{Pour tout } 0 \leq n \leq N,\ Y_n = \varphi_n(X_n),\ \text{où } \varphi_n : E \to \mathbb{R} \text{ est une fonction mesurable.} \end{cases}$$

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2.4. *Soit $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ l'enveloppe de Snell du processus $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$. Sous les hypothèses précédentes, il existe des fonctions mesurables $V_n : E \to \mathbb{R}$, $0 \leq n \leq N$, telles que*

1. *$Z_n = V_n(X_n)$, autrement dit Z_n est $\sigma(X_n)$-mesurable.*
2. *Le plus petit temps d'arrêt optimal $T^\star$ est égal à*

$$T^\star = \min\{0 \leq k \leq N : X_k \in D_k\} = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 : \varphi_k(X_k) \geq Q_k V_{k+1}(X_k)\} & \textit{si non vide} \\ N & \textit{sinon.} \end{cases}$$

où $D_k = \{x \in E : \varphi_k(x) = V_k(x)\}$.

Démonstration.

1. Il suffit de construire les $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ par récurrence descendante et d'appliquer les résultats vus dans le cadre général. On a

$$Z_N = Y_N = \varphi_N(X_N),$$

donc $V_N = \varphi_N$ convient. Supposons le résultat démontré pour $n+1$. Alors,

$$\begin{aligned} Z_n &= \max(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \\ &= \max(\varphi_n(X_n), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]),\ \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \max(\varphi_n(X_n), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n]),\ \text{d'après la propriété de Markov} \\ &= \max(\varphi_n(X_n), Q_n V_{n+1}(X_n)). \end{aligned}$$

Ainsi $V_n(X_n) = \max(\varphi_n(X_n), Q_n V_{n+1}(X_n))$ convient et est bien $\sigma(X_n)$-mesurable.

2. En appliquant ceci aux résultats généraux, on obtient

$$T^\star = \min\{0 \leq k \leq N : Y_k = Z_k\} = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 : Y_k \geq \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \min\{0 \leq k \leq N : \varphi_k(X_k) = V_k(X_k)\} = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 : \varphi_k(X_k) \geq Q_k V_{k+1}(X_k)\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Ce théorème donne une description plus explicite du temps d'arrêt optimal $T^\star$: il s'agit du temps d'entrée de la chaîne de Markov $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ dans un borélien de E (où le borélien dépend de n).

Corollaire 2.5. *Dans le contexte du théorème précédent, si les $(X_n)_{n\geq 0}$ sont de plus indépendantes (pas forcément identiquement distribuées), alors :*

$$T^\star = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 : \varphi_k(X_k) \geq \mathbb{E}[V_{k+1}(X_{k+1})]\} & \textit{si non vide} \\ N & \textit{sinon.} \end{cases}$$

2.4 Arrêt optimal : problèmes monotones

On se place dans le cadre général de l'arrêt optimal, c'est-à-dire sous les hypothèses (H_1).

Définition 2.10. On dit que le problème d'arrêt est *monotone* si, pour tout $0 \leq n \leq N-1$, les événements

$$A_n = \{Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$$

sont emboîtés : $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{N-1}$. Cela signifie que si le gain à un temps n est supérieur à l'espérance du gain obtenu en s'arrêtant au temps suivant $n+1$, ce sera le cas pour tous les temps suivants.

Définition 2.11. On appelle *règle d'anticipation à une étape* (1-step lookahead rule) le temps d'arrêt

$$T_{\text{1-sla}} = \begin{cases} \inf\{0 \leq k \leq N-1 : Y_k \geq \mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\} & \text{si non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, cette règle consiste à s'arrêter au premier instant où le gain est supérieur au gain moyen obtenu en s'arrêtant à l'étape suivante ; il n'est pas nécessaire de regarder plus loin.

Le théorème suivant montre que cette règle est optimale. L'avantage du temps d'arrêt $T_{\text{1-sla}}$ est que l'on n'a pas besoin de la fonction valeur $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$; l'inconvénient est qu'il faut montrer la monotonie du problème.

Théorème 2.6. *Si le problème d'arrêt est monotone, le temps d'arrêt $T_{\text{1-sla}}$ est optimal.*

Démonstration.

• Étape 1 : même sans l'hypothèse de monotonie, on a $T_{\text{1-sla}} \leq T^\star$. Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, $Y_{n+1} \leq Z_{n+1}$ p.s. donc $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ p.s., d'où

$$\{0 \leq n \leq N-1 : Y_n \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]\} \subset \{0 \leq n \leq N-1 : Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\},$$

donc si ces ensembles sont non-vides,

$$\inf\{0 \leq n \leq N-1 : Y_n \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]\} \geq \inf\{0 \leq n \leq N-1 : Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\},$$

Dans le cas où le premier sous-ensemble est vide, $T^\star = N \geq T_{\text{1-sla}}$, et dans le cas où le second est vide, alors $T^\star = N = T_{\text{1-sla}}$.

• Étape 2 : $T_{\text{1-sla}} \geq T^\star$. Si $T_{\text{1-sla}} = N$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc $T_{\text{1-sla}} < N$.

On a, pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\{T_{\text{1-sla}} = n\} \overset{\text{déf.}}{\subset} \{Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\} \overset{\text{monotonie}}{\subset} \bigcap_{n\leq k\leq N-1} \{Y_k \geq \mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}.$$

Montrons que $\cap_{n\leq k\leq N-1}\{Y_k \geq \mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\} \subset \cap_{n\leq k\leq N}\{Z_k = Y_k\}$. Supposons que, pour tout $n \leq k \leq N-1$, l'événement $\{Y_k \geq \mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$ est réalisé. Par définition, $Z_N = Y_N$, ainsi on a

$$Z_{N-1} = \max(Y_{N-1}, \mathbb{E}[Z_N|\mathcal{F}_{N-1}]) = \max(Y_{N-1}, \mathbb{E}[Y_N|\mathcal{F}_{N-1}]) = Y_{N-1}.$$

De manière analogue,

$$Z_{N-2} = \max(Y_{N-2}, \mathbb{E}[Z_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}]) = \max(Y_{N-2}, \mathbb{E}[Y_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}]) = Y_{N-2},$$

et donc par récurrence descendante, on montre que pour tout $n \leq k \leq N$, l'événement $\{Z_k = Y_k\}$ est réalisé, ce qui prouve l'inclusion cherchée.

On remarque de plus que, par définition du temps d'arrêt optimal $T^\star$,

$$\bigcap_{n\leq k\leq N}\{Z_k = Y_k\} \subset \{T^\star \leq n\}.$$

Nous avons donc montré que, pour tout $0 \leq n \leq N-1$, $\{T_{\text{1-sla}} = n\} \subset \{T^\star \leq n\}$, d'où l'on conclut que $T_{\text{1-sla}} \geq T^\star$. □

Chapitre 3

Compléments sur les martingales : uniforme intégrabilité et applications

3.1 Uniforme intégrabilité

Dans toute la suite, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 3.1. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$ est dite *uniformément intégrable*, abrégé *u.i.*, si

$$\lim_{a\to\infty}\Big(\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}]\Big) = 0.$$

On a la définition équivalente suivante.

Définition 3.2. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$ est *u.i.* ssi

1. La famille $(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans L^1.
2. $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \text{t.q. } \forall\,A \in \mathcal{F},\ \text{t.q. } \mathbb{P}(A) < \delta,$

$$\forall\, i \in I, \quad \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_A] < \varepsilon.$$

Preuve de l'équivalence des définitions.

• Déf. 3.1 $\Rightarrow$ Déf. 3.2. Soit $\varepsilon > 0$ et soit a suffisamment grand pour que

$$\forall\, i \in I, \quad \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons, $M = a + \frac{\varepsilon}{2}$ alors, pour tout $i \in I$,

$$\mathbb{E}[|X_i|] = \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|\le a\}}] \le \frac{\varepsilon}{2} + a = M,$$

et le point 1. est vérifié.

Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2a}$ et soit A t.q. $\mathbb{P}(A) < \delta$. Alors, pour tout $i \in I$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_A] &= \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_A\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_A\mathbb{I}_{\{|X_i|\le a\}}]\\ &\le \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] + a\mathbb{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre le deuxième point.

• Déf. 3.2 $\Rightarrow$ Déf. 3.1. On veut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, a_0$ t.q. $\forall\, a > a_0$,

$$\forall\, i \in I, \quad \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] < \varepsilon.$$

Comme les $(X_i)_{i\in I}$ sont dans L^1 on a, d'après l'inégalité de Markov, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, i \in I, \quad \mathbb{P}(|X_i| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{a} \leq \frac{M}{a}, \tag{3.1}$$

en utilisant le point 1. et en notant M la borne supérieure des $(\mathbb{E}[|X_i|])_{i\in I}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que le point 2. est vérifié. Alors d'après l'équation (3.1), pour tout $a > a_0 := \frac{M}{\delta}$, $\mathbb{P}(|X_i| > a) < \delta$, ainsi d'après le point 2.

$$\forall\, i \in I, \quad \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] < \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3.1. On a vu que si $(X_i)_{i\in I}$ est u.i. alors la famille est borné dans L^1. La réciproque est fausse. Par exemple, on pose $I = \mathbb{N}^*$, et on définit pour tout $n > 0$,

$$X_n = \begin{cases} n & \text{avec probabilité } \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = 1$ et la suite est bien bornée dans L^1. Par contre, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{E}[\,|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{I}_{\{X_n>a\}}] = n\mathbb{I}_{\{n>a\}}\mathbb{P}(X_n = n) + 0 = n\mathbb{I}_{\{n>a\}}\frac{1}{n} = \mathbb{I}_{\{n>a\}}.$$

Ainsi,

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[\,|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}] = 1, \text{ et } \lim_{a\to\infty}\Big(\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[\,|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}]\Big) = 1 \neq 0.$$

Exemple 3.1.

1. Une famille finie $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$ est u.i. En effet, pour tout $a > 0$,

$$0 \leq \sup_{1\leq i\leq n}\mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^n |X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}\Big].$$

De plus, $\lim_{a\to\infty}\sum_{i=1}^n |X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}} = 0$ p.s., $\forall\, a > 0$, $\sum_{i=1}^n |X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}} \leq \sum_{i=1}^n |X_i| \in L^1(\mathcal{F})$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{a\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^n |X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}\Big] = \mathbb{E}\Big[\lim_{a\to\infty}\sum_{i=1}^n |X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}\Big] = 0.$$

Avec la première inégalité on déduit alors

$$\lim_{a\to\infty}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}\mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}]\Big) = 0.$$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq Z$, où $Z \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z] < \infty$; alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est u.i. En effet, pour tout $a > 0$, pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>a\}}] \leq \mathbb{E}[Z\mathbb{I}_{\{Z>a\}}],$$
et on conclut de manière analogue à l'exemple 1.
3. Soit $p > 1$, alors une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a. bornées dans L^p est u.i. En effet, posons $M = \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^p]$ et notons que, pour tout $a > 0$,
$$|X_i|^{p-1} > a^{p-1}\mathbb{I}_{\{|X_i|^{p-1}>a^{p-1}\}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{I}_{\{|X_i|^{p-1}>a^{p-1}\}} \leq \frac{|X_i|^{p-1}}{a^{p-1}}.$$
Ainsi, pour tout $i \in I$,
$$\mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] = \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|^{p-1}>a^{p-1}\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|^p]}{a^{p-1}} \leq \frac{M}{a^{p-1}},$$
d'où
$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}] \leq \frac{M}{a^{p-1}}, \text{ et } \lim_{a\to\infty}\Big(\sup_{i\in I} \mathbb{E}[\,|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>a\}}]\Big) = 0.$$
Notons que d'après la remarque 3.1, on ne peut pas espérer descendre jusque $p = 1$.
4. Soit $X \in L^1(\mathcal{F})$. Alors $(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])_{\mathcal{G} \text{ ss-tribu de } \mathcal{F}}$ est u.i. On va montrer que la définition 3.1 est satisfaite. Tout d'abord, vu que X est dans L^1, d'après l'exemple 1., le singleton (X) est u.i. donc, d'après la définition 3.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. pour tout $A \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathbb{P}(A) < \delta$,
$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{I}_A] < \varepsilon.$$
De plus, pour tout $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in L^1(\mathcal{G})$, donc d'après l'inégalité de Markov, pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}(|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|]}{a} \leq \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{G}]]}{a} = \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a},$$
ainsi, pour tout $a > a_0 := \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\delta}$, $\mathbb{P}(|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| > a) < \delta$ et donc
$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|>a\}}] < \varepsilon.$$
Par ailleurs, pour tout $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$,
$$\mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\,\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|>a\}}\big] \leq \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\,|X|\,|\mathcal{G}]\,\mathbb{I}_{\underbrace{\{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| > a\}}_{\in\mathcal{G}}}\Big] \overset{\text{déf. esp. cond.}}{=} \mathbb{E}[|X|\mathbb{I}_{\{|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|>a\}}] < \varepsilon.$$
On conclut que la définition 3.1 est satisfaite en prenant le sup sur toutes les sous-tribus $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$.

Le théorème suivant motive l'introduction des familles de v.a. u.i. En effet, il donne un critère nécessaire et suffisant pour avoir équivalence entre convergence en probabilité et convergence dans L^1. Le théorème de convergence dominée, quant à lui, ne donne qu'un critère suffisant : si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X p.s. (donc aussi en probabilité) et si, pour tout $n \geq 1$ $|X_n| \leq Z$, où $Z \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z] < \infty$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans L^1. Notons que comme attendu, cette hypothèse de domination est plus forte que l'u.i., voir point 2. de l'exemple 3.1.

Théorème 3.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. dans $L^1(\mathcal{F})$. Alors, il y a équivalence entre :*

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge dans L^1 vers $X_\infty \in L^1$.*
2. $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge en probabilité vers X_∞ et la famille $(X_n)_{n\geq 0}$ est u.i.*

Démonstration.

• 1. $\Rightarrow$ 2. La convergence dans L^1 implique la convergence en probabilité (inégalité de Markov). Pour montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est u.i. utilisons la définition 3.2. On a que $(X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1. En effet, comme $X_n \stackrel{L^1}{\to} X_\infty$, il existe C tel que, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \leq C$; ainsi

$$\mathbb{E}[|X_n|] \leq \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] + \mathbb{E}[|X_\infty|] \leq C + \mathbb{E}[|X_\infty|].$$

Vérifions maintenant la deuxième condition. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $X_n \stackrel{L^1}{\to} X_\infty$, il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] < \frac{\varepsilon}{4}$; ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{E}[|X_n - X_N|] \leq \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] + \mathbb{E}[|X_N - X_\infty|] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part d'après le point 1. de l'exemple 3.1, la famille finie $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ de v.a. est u.i. Donc d'après le point 2. de la définition 3.2, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) < \delta$,

$$\forall\, 0 \leq n \leq N, \quad \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_A] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_A] \leq \mathbb{E}[|X_n - X_N|] + \mathbb{E}[|X_N|\mathbb{I}_A] \leq \varepsilon,$$

démontrant ainsi le point 2. de la définition 3.2.

• 2. $\Rightarrow$ 1. D'après le théorème de Riesz-Fisher l'espace $L^1(\mathcal{F})$ est complet. Ainsi, pour montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^1, il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy dans L^1.

En utilisant la définition 3.2, on remarque que $(X_n)_{n\geq 0}$ u.i. implique que $(X_n - X_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est aussi u.i. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a (suffisamment grand) tel que

$$\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{E}[|X_n - X_m|\mathbb{I}_{|X_n - X_m|>a}] < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Par ailleurs, puisque $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X_\infty$, il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\Big(\Big\{|X_n - X_\infty| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{|X_m - X_\infty| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big) < \frac{\varepsilon}{a}. \tag{3.3}$$

Ainsi, pour tout $n, m \geq N$,

$$\begin{aligned}\|X_n - X_m\|_1 &= \mathbb{E}[|X_n - X_m|] \\ &= \mathbb{E}[|X_n - X_m|\mathbb{I}_{\{|X_n - X_m|>a\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X_m|\mathbb{I}_{\{a\geq|X_n - X_m|>\varepsilon\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X_m|\mathbb{I}_{\{|X_n - X_m|\leq\varepsilon\}}] \\ &\leq \varepsilon + a\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) + \varepsilon, \text{ d'après (3.2)} \\ &\leq \varepsilon + a\frac{\varepsilon}{a} + \varepsilon = 3\varepsilon, \text{ d'après (3.3).}\end{aligned}$$

On a bien montré que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans L^1 ce qui clôt cette partie de preuve. □

3.2 Martingales, convergence L^1, théorème d'arrêt

3.2.1 Rappels

Vous avez vu les deux théorèmes suivants sur la convergence des martingales.

Théorème 3.2 (Convergence presque sûre)**.** *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale bornée dans* L^1*,* i.e. $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$*, alors il existe une v.a.* $X_\infty \in L^1$ *telle que*

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X_\infty.$$

Théorème 3.3 (Convergence dans L^p, $p > 1$)**.** *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale bornée dans* L^p *pour* $p > 1$*,* i.e., $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$*. Alors, il existe une v.a.* $X_\infty \in L^p$ *telle que*

$$X_n \xrightarrow[p.s.]{L^p} X_\infty,$$

et $\mathbb{E}[|X_\infty|^p] = \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^p]$.

Remarque 3.2. Ce théorème est faux si $p = 1$. Voici un contre-exemple. Soit $(Y_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. telle que $\mathbb{P}(Y_0 = 2) = \mathbb{P}(Y_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Posons, pour tout $n \geq 0$,

$$X_n = \prod_{k=0}^{n} Y_k.$$

On considère la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n))_{n\geq 0}$. Alors, pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. La famille $(X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1 car pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = (\mathbb{E}[Y_0])^{n+1} = 1.$$

C'est bien une martingale car

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

En effet, d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, comme X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et Y_{n+1} indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}[Y_{n+1}X_n|\mathcal{F}_n] = X_n\mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n$.

Montrons que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$. Soit $\varepsilon > 0$ petit, alors

$$\bigcup_{n\geq N} \{|X_n| > \varepsilon\} \subset \{Y_0 = 2, \ldots, Y_N = 2\},$$

ainsi,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\geq 0}\{|X_n| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\cap_{N\geq 0}\cup_{n\geq N}\{|X_n| > \varepsilon\}) \leq \mathbb{P}(\cap_{N\geq 0}\{Y_0 = 2, \ldots, Y_N = 2\}) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = 0,$$

où dans la dernière inégalité on a utilisé qu'il s'agit d'une intersection d'événements décroissants.

Pourtant $X_n \overset{L^1}{\nrightarrow} 0$, car $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = 1$.

3.2.2 Convergence dans L^1 des martingales

La question qui se pose est donc " Quand a-t-on convergence dans L^1 d'une martingale ? " La réponse est donnée par le théorème suivant qui donne des critères nécessaires et suffisants et utilise l'uniforme intégrabilité.

Théorème 3.4 (Convergence L^1)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale. Alors les 3 conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^1 vers une v.a. $X_\infty \in L^1$,*
2. *La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est u.i.*
3. *La martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ est* fermée*, c'est-à-dire qu'il existe une v.a. $Z \in L^1$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ p.s.*

Si la condition 1. est satisfaite, on peut prendre $Z = X_\infty$ dans 3.

Démonstration.

• 1. $\Rightarrow$ 2. D'après le théorème 3.1, on a que si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^1 alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est u.i.

• 2. $\Rightarrow$ 1. Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est u.i. alors, d'après la définition 3.2, la famille $(X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans L^1 ce qui, d'après le théorème 3.2, implique qu'elle converge p.s. donc en probabilité. Avec l'u.i. et le théorème 3.1 ceci implique la convergence en L^1.

• 1. $\Rightarrow$ 3. Supposons que $X_n \xrightarrow[\text{p.s.}]{L^1} X_\infty$. Pour montrer que, pour tout $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ p.s. nous allons prouver que $\mathbb{E}[|X_n - \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]|] = 0$. Comme $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, nous savons que pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

De plus, nous avons aussi que, pour tout $n \geq 0$, $X_{n+k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{p.s.},L^1} X_\infty$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}[|X_n - \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]|] &= \mathbb{E}[\,|\mathbb{E}[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]|\,] \\
&= \mathbb{E}[\,|\mathbb{E}[X_{n+k} - X_\infty|\mathcal{F}_n]|\,] \\
&\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_{n+k} - X_\infty|\,|\mathcal{F}_n]], \text{ propriété de l'espérance conditionnelle} \\
&= \mathbb{E}[|X_{n+k} - X_\infty|] \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

• 3. $\Rightarrow$ 2. D'après le point 4. de l'exemple 3.1, si $Z \in L^1$, alors la famille $(\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n])_{n\geq 0}$ est u.i., ce qui est exactement le point 2. □

3.2.3 Théorème d'arrêt

Définition 3.3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté qui converge p.s. vers X_∞. Pour tout temps d'arrêt T, fini ou non, on définit :

$$X_T = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbb{I}_{\{T=n\}} + X_\infty \mathbb{I}_{\{T=\infty\}}.$$

On peut montrer que X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Théorème 3.5. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale u.i. (elle converge donc p.s. et dans L^1 vers une v.a. $X_\infty \in L^1$). Alors pour tout temps d'arrêt T (fini ou non), on a*

$$X_T = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_T].$$

En particulier, $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_n]$, pour tout $n \geq 0$.

Si S, T sont deux temps d'arrêt (finis ou non), tels que $S \leq T$ p.s. alors

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S.$$

Remarque 3.3.

• Comme conséquence du point 4. de l'exemple 3.1, on a que la famille $(X_T = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T])_{T \text{ temps d'arrêt}}$ est u.i.

• Par rapport au théorème d'arrêt, on demande en plus la convergence p.s. et dans L^1 de la martingale. On gagne le fait que le processus arrêté soit fermé, et on peut enlever l'hypothèse de temps d'arrêt borné p.s.

Démonstration. Montrons d'abord que X_T est dans L^1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_T|] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{I}_{\{T=n\}}] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{I}_{\{T=\infty\}}], \text{ Fubini v.a. positives} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\,|\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]|\, \mathbb{I}_{\{T=n\}}] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{I}_{\{T=\infty\}}], \text{ point 3. du théorème 3.4} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\,|X_\infty|\,|\mathcal{F}_n] \mathbb{I}_{\{T=n\}}] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{I}_{\{T=\infty\}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{I}_{\{T=n\}}] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{I}_{\{T=\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}[|X_\infty|] < \infty.
\end{aligned}$$

D'après la remarque après la définition de X_T, nous savons que X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Pour montrer que $X_T = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T]$, il nous reste à montrer que pour tout $B \in \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}[X_T \mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_B].$$

On a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_T \mathbb{I}_B] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}}] + \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_{B\cap\{T=\infty\}}], \text{ Fubini } X_T \in L^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] \mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}}] + \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_{B\cap\{T=\infty\}}], \text{ point 3. du théorème 3.4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_{B\cap\{T=n\}}] + \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_{B\cap\{T=\infty\}}], \text{ définition e.c. et } B\cap\{T=n\} \in \mathcal{F}_n \\
&= \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{I}_B].
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance dans $X_T = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T]$, on obtient que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty]$. En prenant l'espérance dans $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$, on obtient que $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_\infty]$, pour tout $n \geq 0$.

La fin de la preuve est analogue à celle dans le cas où T, S sont bornés p.s. On a

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] \overset{\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T}{=} \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_S] = X_S. \qquad \square$$

3.3 Application de la convergence des martingales : la LFGN

Cette section n'utilise pas l'uniforme intégrabilité. On se donne une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Le but est de démontrer la loi forte des grands nombres en utilisant le théorème de convergence dans L^2 des martingales. Nous démontrons d'abord la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $X_0 = 0$ et*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty.$$

Alors, $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

Démonstration. Posons $M_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(X_k - X_{k-1}).$$

- Montrons que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
  - Pour tout $n \geq 0$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et dans L^1 comme somme finie de v.a. dans L^1, en utilisant le fait que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
  - Calculons, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n]\\ &= 0, \text{ car } \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0,\ (X_n)_{n\geq 0} \text{ étant une martingale.}\end{aligned}$$

- Montrons que M_n est bornée dans L^2, *i.e.*, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n^2] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k,k'=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{1}{k'}(X_k - X_{k-1})(X_{k'} - X_{k'-1})\Big]\\ &= \sum_{1\leq k\neq k'\leq n} \frac{1}{kk'}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(X_{k'} - X_{k'-1})] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2].\end{aligned}$$

Si $k \neq k'$, supposons sans perte de généralité que $k' > k$. Alors, d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(X_{k'} - X_{k'-1})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(X_{k'} - X_{k'-1})|\mathcal{F}_{k'-1}]]\\ &= \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})\mathbb{E}[X_{k'} - X_{k'-1}|\mathcal{F}_{k'-1}]], \text{ car } k' > k \Rightarrow \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_{k'-1}\\ &= 0, \text{ car } (X_n)_{n\geq 0} \text{ est une martingale.}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n^2] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] < \infty, \text{ par hypothèse.}\end{aligned}$$

Le membre de droite étant indépendant de n, ceci conclut cette partie de la preuve.

En conséquence du théorème 3.3 (cas $p = 2$), on sait que la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. (et dans L^2) vers une v.a. M_∞ dans L^2.

• Conclusion. On a $\forall\, k \geq 1$, $M_k - M_{k-1} = \frac{1}{k}(X_k - X_{k-1}) \Leftrightarrow X_k - X_{k-1} = k(M_k - M_{k-1})$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}X_n = X_n - X_0 &= \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k(M_k - M_{k-1}), \text{car } X_0 = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(kM_k - (k-1)M_{k-1} - M_{k-1}\big) \\ &= nM_n - 0M_0 - \sum_{k=0}^{n-1} M_k, \text{ (changement d'indice),}\end{aligned}$$

et ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{X_n}{n} = M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k.$$

On a $M_n \overset{\text{p.s.}}{\to} M_\infty$ ce qui implique, d'après le théorème de Cesarò, que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \overset{\text{p.s.}}{\to} M_\infty$, et finalement que $\frac{X_n}{n} \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. □

Théorème 3.6 (Loi forte des grands nombres)**.** *Soit* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. i.i.d. telle que* $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$. *Alors,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}[Y_1].$$

Démonstration. Quitte à poser $\tilde{Y}_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$, on peut supposer $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, ce que l'on va faire dans la suite.

Posons $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(Y_k \mathbb{I}_{\{|Y_k|\leq k\}} - \mathbb{E}[Y_k \mathbb{I}_{\{|Y_k|\leq k\}}]\Big).$$

• Montrons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $(\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))_{n\geq 1}$.

- ◦ Pour tout $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et dans L^1 comme somme finie de v.a. dans L^1, en utilisant l'hypothèse $Y_1 \in L^1$.

- ◦ Calculons, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Y_{n+1}\mathbb{I}_{\{|Y_{n+1}| \leq n+1\}} - \mathbb{E}[Y_{n+1}\mathbb{I}_{\{|Y_{n+1}| \leq n+1\}}] | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1}\mathbb{I}_{\{|Y_{n+1}| \leq n+1\}}] - \mathbb{E}[Y_{n+1}\mathbb{I}_{\{|Y_{n+1}| \leq n+1\}}] = 0,\end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on utilise le fait que les $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et que l'espérance est constante.

- • Montrons que $(X_n)_{n\geq 0}$ satisfait à l'hypothèse de la proposition précédente, c'est-à-dire que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] < \infty$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] &= \mathbb{E}\big[(Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}} - \mathbb{E}[Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}])^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[Y_k^2\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}\big] - \mathbb{E}\big[Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}\big]^2 \\ &\leq \mathbb{E}\big[Y_k^2\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}\big] = \mathbb{E}\big[Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}}\big].\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$, puisque $\frac{1}{k^2} \leq 2\big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}} &\leq \frac{2}{k}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}} - \frac{2}{k+1}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}} \\ &= \frac{2}{k}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}} - \frac{2}{k+1}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k+1\}} + \frac{2}{k+1}\mathbb{I}_{\{k < |Y_1| \leq k+1\}}.\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant la somme sur $k \in \{1, \ldots, n\}$ et en remarquant le télescopage, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] \leq \mathbb{E}\Big[2Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq 1\}} - \frac{2}{n+1}Y_1^2\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq n+1\}}\Big] + 2\sum_{k=1}^{m}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{k+1}Y_1^2\mathbb{I}_{\{k < |Y_1| \leq k+1\}}\Big]$$

Ensuite, nous bornons Y_1^2 par 1 dans le premier terme, le deuxième terme par 0, et $\frac{1}{k+1}$ par $\frac{1}{|Y_1|}$ dans la dernière somme, ce qui nous donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] \leq 2 + 2\sum_{k=1}^{m}\mathbb{E}[|Y_1|\mathbb{I}_{\{k < |Y_1| \leq k+1\}}] = 2 + 2\mathbb{E}[|Y_1|\mathbb{I}_{\{1 < |Y_1| \leq n+1\}}].$$

En utilisant le théorème de convergence monotone, on déduit finalement que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] \leq 2 + 2\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty,$$

car Y_1 est supposée dans L^1.

Ainsi d'après la proposition précédente, $\frac{X_n}{n} \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$, *i.e.*,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}} - \mathbb{E}[Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}]\Big) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0.$$

- • Vu que Y_1 est dans L^1, on a d'après le théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k| \leq k\}}] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[Y_1\mathbb{I}_{\{|Y_1| \leq k\}}] = \mathbb{E}[Y_1] = 0.$$

En conséquence d'après le théorème de Cesarò, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k|\le k\}}] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k|\le k\}} \overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4}$$

• Application de Borel-Cantelli. On considère la suite d'événements $(\{|Y_k|>k\})_{k\ge 1}$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|Y_k|>k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|Y_1|>k) \le \int_0^{\infty}\mathbb{P}(|Y_1|>t)dt = \mathbb{E}[|Y_1|].$$

Ainsi d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_k\{|Y_k|>k\}) = \mathbb{P}\Big(\cap_{N\ge 1}\cup_{k\ge N}\{|Y_k|>k\}\Big) = 0,$$

donc $\mathbb{P}\Big(\cup_{N\ge 1}\cap_{k\ge N}\{|Y_k|\le k\}\Big) = 1$, autrement dit, p.s. il existe $N\ge 1$ tel que $\forall\, k\ge N$, $|Y_k|\le k$.

• Conclusion. On écrit, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} Y_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} Y_k$$

Vu que $Y_1<\infty$ p.s., le premier terme tend vers 0 p.s. lorsque n tend vers l'infini. Pour le deuxième, on a p.s.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} Y_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k|\le k\}}, \text{ d'après notre utilisation du lemme de Borel-Cantelli}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k|\le k\}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} Y_k\mathbb{I}_{\{|Y_k|\le k\}};\end{aligned}$$

le premier tend vers 0 p.s. d'après l'identité (3.4), le deuxième tend vers 0 p.s. car $Y_1<\infty$ p.s. En conclusion, on a montré la loi des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Chapitre 4

Contrôle des chaînes de Markov

La théorie des systèmes dynamiques contrôlés existe à la fois en temps discret et en temps continu, dans un cadre déterministe ou stochastique (aléatoire). Ce cours est consacré au cas stochastique discret. Le cas déterministe est plus simple (il s'agit d'un cas particulier), par contre le cas stochastique continu est plus complexe et fait appel aux EDS rétrogrades.

4.1 Processus et chaînes de Markov contrôlés

Le contexte est donné par :

- Le *temps discret*, $\mathbb{N}$.
- L'*espace des états*, S : ensemble dénombrable, muni de la tribu $\mathcal{P}(S)$ des parties de S. On note $\mathrm{Proba}\,(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{P}(S))$.
- L'*espace des actions*, A : ensemble quelconque.

Définition 4.1. Un *système dynamique contrôlé, stochastique et en temps discret, avec espace des états S et espace des actions A*, est la donnée d'une application

$$P : \mathbb{N} \times S \times A \longrightarrow \mathrm{Proba}\,(S).$$

L'interprétation est que si à l'instant $n \in \mathbb{N}$ on est dans l'état $x \in S$ et si on choisit l'action $a \in A$, alors on bouge dans l'état $y \in S$ avec probabilité $P(n, x, a)(y)$.

Notation. Pour toute fonction $F : \mathbb{N} \times S \to \mathbb{R}$, on note PF la fonction de $\mathbb{N} \times S \times A \to \mathbb{R}$ définie par

$$PF(n, x, a) = \sum_{y \in S} P(n, x, a)(y) F(n + 1, y) = \mathbb{E}[F(n + 1, Y)],$$

où $Y \sim P(n, x, a)$, à condition que la somme dans le membre de droite soit bien définie.

Souvent P sera homogène en temps et pourra être vu comme une fonction $P : S \times A \to \mathrm{Proba}\,(S)$. Dans ce cas, pour toute fonction $F : S \to \mathbb{R}$,

$$PF(x, a) = \sum_{y \in S} P(x, a)(y) F(y).$$

Définition 4.2. Un *contrôle* est une politique de choix des actions. Formellement, soit $k \in \mathbb{N}$, on appelle *contrôle partant de* k, une application

$$u : S_k^* \longrightarrow A,$$

où $S_k^* = \{(n,(x_k,\dots,x_n)) : n \in \mathbb{N},\ n \geq k,\ (x_k,\dots,x_n) \in S^{n-k+1}\}$. L'application u représente le choix, pour tout $n \geq k$, d'une action $a \in A$ à l'instant présent n en fonction des états observés $(x_k,\dots,x_n)$ entre les temps k et n. On note $u_n(x_k,\dots,x_n) := u(n,(x_k,\dots,x_n))$ et $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des contrôles partant de k.

Définition 4.3. Étant donnés : un instant et un état initial $(k,x) \in \mathbb{N} \times S$, un contrôle $u \in \mathcal{C}_k$ partant de k, une système dynamique contrôlé P, on définit de manière récursive un processus $(X_n)_{n\geq k}$ à valeurs dans S, appelé *processus* ou *chaîne contrôlée par u et d'état initial* (k,x), en posant

- $X_k = x$,
- pour tout $n \geq k$, pour tout $(x_k,\dots,x_n) \in S^{n-k+1}$ tel que $x_k = x$ et $\mathbb{P}(X_k = x_k,\dots,X_n = x_n) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_k = x_k,\dots,X_n = x_n) = P(n,x_n,u_n(x_k,\dots,x_n))(x_{n+1}),$$

En mots cette définition se reformule de la manière suivante : sachant qu'à l'instant k on est dans l'état x, et qu'entre les instants k et n on a visité les états $(x_k = x,\dots,x_n)$, à l'instant n on choisit le contrôle $u_n(x_k,\dots,x_n)$ pour déterminer la distribution de l'état suivant X_{n+1}.

Remarque 4.1. Cette définition détermine la loi du processus $(X_n)_{n\geq k}$; en effet, pour tout $n \geq k$, pour tout $(x_k,\dots,x_n) \in S^{n-k+1}$, on a

$$\mathbb{P}(X_k = x_k,\dots,X_n = x_n)\delta_{x,x_k} P(k,x_k,u_k(x_k))(x_{k+1})\dots P(n-1,x_{n-1},u_{n-1}(x_k,\dots,x_{n-1}))(x_n).$$

Réalisation de systèmes dynamiques contrôlés. Voici une manière de réaliser un système dynamique contrôlé. En plus de l'espace des états S et de l'espace des actions A, on se donne une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E})$, appelées *innovations*, et une application $G : \mathbb{N} \times S \times A \times E \to S$. On définit alors le système dynamique contrôlé P par

$$\forall\,(n,x,a) \in \mathbb{N} \times S \times A, \quad P(n,x,a) \text{ est la loi de } G(n,x,a,Z_{n+1}).$$

La paire $(G,(Z_n)_{n\geq 0})$ s'appelle une *réalisation d'un système dynamique contrôlé.*

Étant donné un instant et un état initial $(k,x) \in \mathbb{N} \times S$, un contrôle $u \in \mathcal{C}_k$, on peut réaliser le processus contrôlé $(X_n)_{n\geq k}$ associé en le définissant par

- $X_k = x$,
- pour tout $n \geq k$, $X_{n+1} = G(n,X_n,U_n,Z_{n+1})$ avec $U_n = u_n(X_k,\dots,X_n)$.

Remarque 4.2. Tout système dynamique contrôlé peut être réaliser de cette manière ; parfois cela est naturel parfois ça ne l'est pas.

Cas markovien. Soit $k \in \mathbb{N}$, le contrôle $u \in \mathcal{C}_k$ est dit *markovien* si u ne dépend de la trajectoire passée qu'à travers l'instant n. On peut alors voir u comme une application de $\mathbb{N} \times S \to A$ et on note $u_n(x_n) = u_n(x_k,\dots,x_n)$.

Dans ce cas, le processus contrôlé $(X_n)_{n\geq k}$ est markovien, de matrice de transition

$$(\, P(n, x, u_n(x))(y)\,)_{(x,y)\in S^2}.$$

On parle de *processus* ou *chaîne de Markov contrôlée.*

Si le contrôle markovien u est de plus *homogène*, on peut le voir comme une fonction de $S \to A$ et on note $u(x_n) = u_n(x_n)$. Si *de plus*, le système dynamique contrôlé est homogène en temps, la chaîne contrôlée markovienne est alors homogène, de matrice de transition

$$(\, P(x, u(x))(y)\,)_{(x,y)\in S^2}.$$

On parle de *processus* ou *chaîne de Markov contrôlée homogène.*

4.2 Équations de la programmation dynamique

4.2.1 Le problème

Notre objectif est de déterminer le "meilleur" contrôle pour un système dynamique aléatoire contrôlé donné. Pour cela nous introduisons une fonction de coût. Notons que dans la suite, l'application G (ou P) est fixée.

Définition 4.4.

- La *fonction de coût* est une application $c : \mathbb{N} \times S \times A \to \mathbb{R}$.
- Pour tout temps et état initial $(k, x) \in \mathbb{N} \times S$, pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}_k$, on définit le *coût moyen* du processus $(X_n)_{n\geq k}$ contrôlé par u d'état initial (k, x), par

  $$V^u(k, x) = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k}^{\infty} c(n, X_n, U_n)\Big],$$

  avec $U_n = u_n(X_k, \ldots, X_n)$; sous réserve que cette expression ait un sens, ce qui est bien le cas lorsque c est une fonction positive ou négative, ou lorsque $\sup_{(x,a)\in S\times A} |c(n, x, a)|$ est sommable sur $\mathbb{N}$. Dans la suite on supposera être dans un de ces trois cas.
  Pour tout $n \geq k$, $c(n, X_n, U_n)$ représente le coût de faire le contrôle U_n à l'instant n lorsqu'on se trouve en X_n.

Nous cherchons à minimiser ce coût sur tous les contrôles, ce qui amène naturellement aux définitions suivantes.

Définition 4.5.

- On définit la *fonction valeur* du système, $V : \mathbb{N} \times S \to \mathbb{R}$, par

  $$\forall\, (k, x) \in \mathbb{N} \times S, \quad V(k, x) = \inf_{u\in\mathcal{C}_k} V^u(k, x).$$

- Un contrôle $u \in \mathcal{C}^k$ est *optimal pour* (k, x) si $V^u(k, x) = V(k, x)$.

Précisément, nos objectifs sont de déterminer la fonction valeur V et d'identifier le(s) contrôle(s) optimal(aux) lorsqu'il(s) existe(nt).

En pratique, on ne peut pas faire de recherche sur tous les contrôles car il y a trop de cas. La solution est donnée par le théorème fondamental de la section suivante qui introduit aussi les équations de Bellman.

4.2.2 La fonction valeur : équations de Bellman

Pour déterminer la fonction valeur V on utilise le théorème fondamental suivant.

Théorème 4.1. *La fonction valeur V satisfait l'équation suivante, appelée* équation de Bellman *ou* équation de la programmation dynamique*,*

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times S, \quad V(k,x) = \inf_{a \in A} \{(c + PV)(k,x,a)\},$$

où on rappelle que $PV(k,x,a) = \sum_{y \in S} P(k,x,a)(y)V(k+1,y) = \mathbb{E}[V(k+1,Y)]$, avec $Y \sim P(k,x,a)$.

Remarque 4.3. Le théorème ne dit rien sur l'unicité des solutions à l'équation de Bellman. On verra plus tard, dans le cas où l'horizon de temps est fini, comment cela se passe.

Démonstration.

• Préliminaire. Montrons que

$$V^u(k,x) = c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y \in S} P(k,x,u_k(x))(y)V^{\tilde{u}}(k+1,y) = (c + PV^{\tilde{u}})(k,x,u_k(x)), \quad (4.1)$$

où le contrôle $\tilde{u} \in \mathcal{C}_{k+1}$ est défini en (4.2). Comme $X_k = x$ p.s., on a, pour tout $u \in \mathcal{C}_k$,

$$\begin{aligned} V^u(k,x) &= c(k,x,u_k(x)) + \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} c(n,X_n,U_n)\Big] \\ &= c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y \in S} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} c(n,X_n,U_n)\mathbb{I}_{\{X_{k+1}=y\}}\Big], \end{aligned}$$

où on rappelle que $U_n = u_n(X_k, \ldots, X_n)$.

On utilise le point de vue de la réalisation de systèmes dynamiques contrôlés : soit $(G,(Z_n)_{n\geq 0})$ une telle réalisation. Alors, pour le temps et l'état initial (k,x), pour le contrôle $u \in \mathcal{C}_k$, une réalisation du processus contrôlé $(X_n)_{n \geq k}$ est donnée par :

- ∘ $X_k = x$,
- ∘ $\forall n \geq k, \quad X_{n+1} = G(n, X_n, U_n, Z_{n+1})$.

À partir du contrôle $u \in \mathcal{C}_k$, on définit un contrôle $\tilde{u} \in \mathcal{C}_{k+1}$:

$$\forall n \geq k+1, \forall (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in S^{n-k}, \quad \tilde{u}_n(x_{k+1}, \ldots, x_n) = u_n(x, x_{k+1}, \ldots, x_n). \quad (4.2)$$

Pour le temps et l'état initial $(k+1,y)$, en utilisant la réalisation $(G,(Z_n)_{n\geq 0})$ du système dynamique contrôlé et le contrôle $\tilde{u} \in \mathcal{C}_{k+1}$, on définit le processus contrôlé $(\tilde{X}_n)_{n \geq k+1}$ par

- ∘ $\tilde{X}_{k+1} = y$;
- ∘ $\forall n \geq k+1, \quad \tilde{X}_{n+1} = G(n, \tilde{X}_n, \tilde{U}_n, Z_{n+1})$.

Alors, si l'événement $\{X_{k+1} = y\}$ est réalisé on a, pour tout $n \geq k+1$, $\tilde{X}_n = X_n$ et $\tilde{U}_n = U_n$. En effet, par récurrence sur n,

- ∘ $n = k+1$: $\tilde{X}_{k+1} = y = X_{k+1}$ et

$$\tilde{U}_{k+1} \overset{\text{def. } \tilde{U}}{=} \tilde{u}_{k+1}(\tilde{X}_{k+1}) \overset{\text{def. } \tilde{u}}{=} u_{k+1}(x, \tilde{X}_{k+1}) = u_{k+1}(X_k, X_{k+1}) \overset{\text{def. } U}{=} U_{k+1}.$$

- Supposons le résultat démontré pour tout $k+1 \leq \ell \leq n$:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{n+1} &= G(n, \tilde{X}_n, \tilde{U}_n, Z_{n+1}), \text{par définition de } \tilde{X}_{n+1} \\
&= G(n, X_n, U_n, Z_{n+1}), \text{ hypothèse de récurrence} \\
&= X_{n+1}, \text{ définition de } X_n,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{n+1} &= \tilde{u}_{n+1}(\tilde{X}_{k+1}, \ldots, \tilde{X}_{n+1}), \text{ par définition de } \tilde{U}_n \\
&= u_{n+1}(x, \tilde{X}_{k+1}, \ldots, \tilde{X}_{n+1}), \text{ par définition de } \tilde{u} \\
&= u_{n+1}(x, X_{k+1}, \ldots, X_{n+1}), \text{ hypothèse de récurrence + ci-dessus} \\
&= u_{n+1}(X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{n+1}) = U_{n+1}, \text{ définition de } X_k \text{ et de } U_n.
\end{aligned}$$

Remarquons de plus que, $\tilde{X}_{k+1}$ est constante donc indépendante de X_{k+1}, et que pour tout $n \geq k+2$, $\tilde{X}_n$ est $\sigma(Z_{k+2}, \ldots, Z_n)$-mesurable, donc indépendante de X_{k+1} qui est $\sigma(Z_{k+1})$-mesurable (par indépendance des $(Z_n)_{n\geq 0}$). De la première identité ci-dessus, on déduit aussi que pour tout $n \geq k+1$, $\tilde{U}_n$ est indépendante de X_{k+1}.

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} c(n, X_n, U_n)\mathbb{I}_{\{X_{k+1}=y\}}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} c(n, \tilde{X}_n, \tilde{U}_n)\mathbb{I}_{\{X_{k+1}=y\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k+1}^{\infty} c(n, \tilde{X}_n, \tilde{U}_n)\Big]\mathbb{P}(X_{k+1}=y) \\
&= V^{\tilde{u}}(k+1, y)\mathbb{P}(X_{k+1}=y),
\end{aligned}$$

où dans la première égalité on utilise l'égalité presque sûre des variables aléatoires, dans la deuxième l'indépendance et dans la troisième le fait que la réalisation $(G, (Z_n)_{n\geq 1})$ du système dynamique est la même pour $(\tilde{X}_n)_{n\geq k+1}$ et $(X_n)_{n\geq k}$; seuls le contrôle et la condition initiale sont différents.

La preuve de l'identité (4.1) est conclue en remarquant que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1}=y) &= \mathbb{P}(X_{k+1}=y|X_k=x), \text{ car } X_k = x \\
&= P(k, x, u_k(x))(y), \text{ définition du processus contrôlé.}
\end{aligned}$$

- Montrons que $V(k,x) \geq \inf_{a\in A}(c+PV)(k,x,a)$. D'après (4.1), on a pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}_k$,

$$\begin{aligned}
V^u(k,x) &= c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y\in S} P(k,x,u_k(x))(y)V^{\tilde{u}}(k+1,y) \\
&\geq c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y\in S} P(k,x,u_k(x))(y)V(k+1,y), \text{ par définition de } V(k+1,y) \\
&\geq \inf_{a\in A}\big\{c(k,x,a) + \sum_{y\in S} P(k,x,a)(y)V(k+1,y)\big\} \\
&= \inf_{a\in A}\{(c+PV)(k,x,a)\}.
\end{aligned}$$

• Montrons que $V(k,x) \leq \inf_{a\in A}(c+PV)(k,x,a)$.

Par définition de $V(k+1,y)$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $y \in S$, il existe un contrôle $u^y \in \mathcal{C}_{k+1}$ tel que

$$V^{u^y}(k+1,y) < V(k+1,y) + \varepsilon.$$

À partir du contrôle $u^y \in \mathcal{C}_{k+1}$, on définit un contrôle $u \in \mathcal{C}_k$ de la manière suivante :

- ∘ $\forall\, x \in S$, $u_k(x)$ quelconque,
- ∘ $\forall\, n \geq k+1,\ (x_{k+1},\dots,x_n) \in S^{n-k}$, $u_n(x,x_{k+1},\dots,x_n) = u_n^{x_{k+1}}(x_{k+1},\dots,x_n)$.

Alors on remarque que le contrôle $\tilde{u} \in \mathcal{C}_{k+1}$ associé à u par (4.2) satisfait, $\forall\, n \geq k+1, \forall\,(x_{k+1},\dots,x_n) \in S^{n-k}$,

$$\tilde{u}_n(x_{k+1},\dots,x_n) = u_n(x,x_{k+1},\dots,x_n) = u_n^{x_{k+1}}(x_{k+1},\dots,x_n).$$

Ainsi d'après l'équation (4.1) appliquée avec le contrôle $u \in \mathcal{C}_k$ défini ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} V(k,x) \leq V^u(k,x) &= c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y\in S} P(k,x,u_k(x))(y) V^{\tilde{u}}(k+1,y) \\ &= c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y\in S} P(k,x,u_k(x))(y) V^{u^y}(k+1,y) \\ &< c(k,x,u_k(x)) + \sum_{y\in S} P(k,x,u_k(x))(y) V(k+1,y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $u_k(x)$, on peut prendre l'infimum sur les $a \in A$ à droite, ce qui nous donne,

$$V(k,x) \leq \inf_{a\in A}\Big\{c(k,x,a) + \sum_{y\in S} P(k,x,a)(y)V(k+1,y)\Big\} + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la preuve est terminée. □

Remarque 4.4.

1. On peut définir une fonction de gain $r : \mathbb{N} \times S \times A \to \mathbb{R}$ au lieu d'une fonction de coût. On cherche alors,
$$V(k,x) = \sup_{u\in\mathcal{C}_k} V^u(k,x).$$
On pose $c = -r$ et on retrouve le problème précédent. Ainsi, la fonction valeur satisfait à l'équation de Bellman
$$V(k,x) = \sup_{a\in A}\{(r+PV)(k,x,a)\}.$$

2. Lorsque la fonction de coût c et le système dynamique P sont homogènes, la fonction valeur est homogène et l'équation de Bellman devient
$$V(x) = \inf_{a\in A}\{(c+PV)(x,a)\}.$$
Notons que la politique de contrôle u n'a pas besoin d'être homogène en temps (ceci se voit à travers l'équation de Bellman où l'homogénéité en temps des contrôles n'est plus nécessaire vu que l'on prend l'infimum sur tous les $a \in A$).

4.3 Contrôle stochastique à horizon fini

On se donne :

- un système dynamique contrôlé $P : \mathbb{N} \times S \times A \to \text{Proba}(S)$
- un horizon de temps $N \in \mathbb{N}$ et une fonction de coût $c : \mathbb{N} \times S \times A \to \mathbb{R}$ tels que

$$c(n,x,a) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq N+1 \\ C(x) & \text{si } n = N, \text{ pour une fonction } C : S \to \mathbb{R} \text{ donnée.} \end{cases}$$

- un temps et un état initial $(k,x) \in \mathbb{N} \times S$ et un contrôle partant de k, $u \in \mathcal{C}_k$.

Alors, le coût moyen du processus $(X_n)_{n\geq k}$ contrôlé par u et d'état initial (k,x) est

- $\forall\, k \geq N+1,\ \ V^u(k,x) = 0$,
- $V^u(N,x) = \mathbb{E}[C(X_N)] = C(x)$ car $X_N = x$ p.s. si le temps et l'état initial sont (N,x),
- $\forall\, 0 \leq k \leq N-1,\ \ V^u(k,x) = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=k}^{N-1} c(n,X_n,U_n) + C(X_N)\Big]$.

Notons que pour tout contrôle u, $V(N,x) = V^u(N,x) = C(x)$ car le membre de droite est indépendant de u. Ainsi, en utilisant l'équation de Bellman

$$V(k,x) = \inf_{a\in A}\Big(c(k,x,a) + \sum_{y\in S} V(k+1,y)P(k,x,a)(y)\Big) \tag{4.3}$$

on peut construire par une récurrence rétrograde, $V(N-1,x),\ldots,V(0,x)$. La solution est donc unique.

Il reste encore à déterminer un contrôle optimal. Dans le cadre markovien, ceci est donné par la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit $0 \leq k_0 \leq N$. Supposons que $u \in \mathcal{C}_{k_0}$ est un contrôle markovien tel que, pour tout $k_0 \leq k \leq N-1$, pour tout $x \in S$,*

$$V(k,x) = (c + PV)(k,x,u_k(x)).$$

Alors, u est optimal pour (k_0,x), pour tout $x \in S$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_{k_0}$ un tel contrôle markovien et soit $(X_n)_{n\geq k_0}$ le processus contrôlé associé de temps et état initial (k_0,x). Définissons,

$$M_k = \begin{cases} V(k_0,x) & \text{si } k = k_0 \\ \sum_{j=k_0}^{k-1} c(j,X_j,U_j) + V(k,X_k) & \text{si } k_0+1 \leq k \leq N. \end{cases}$$

Calculons, pour tout $k_0 \leq k \leq N-1$,

$$M_{k+1} - M_k = V(k+1,X_{k+1}) - V(k,X_k) + c(k,X_k,U_k),$$

d'où, pour tout $y \in S$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{k+1} - M_k | X_k = y] &= PV(k,y,u_k(y)) - V(k,y) + c(k,y,u_k(y)),\ \text{car } u \text{ est markovien} \\ &= 0,\ \text{par hypothèse,} \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\mathbb{E}[V(k+1, X_{k+1})|X_k = y] = \sum_{z\in S} V(k+1, z)P(k, y, u_k(y))(z) = PV(k, y, u_k(y))$. Ceci étant vrai pour tout $y \in S$, on déduit que pour tout $k_0 \le k \le N-1$, $\mathbb{E}[M_k] = \mathbb{E}[M_{k+1}]$. Ainsi,

$$V(k_0, x) = \mathbb{E}[M_{k_0}] = \mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=k_0}^{N-1} c(j, X_j, U_j) + V(N, X_N)\Big] = V^u(k_0, x).$$

□

En conclusion : dans le cas horizon fini, il suffit de trouver à chaque étape l'action qui minimise (4.3), si elle existe, pour construire une politique de contrôle optimal.

Lien avec l'arrêt optimal dans le cadre markovien. On se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\ge 0}$ à valeurs dans un espace E. Alors, pour tout $n \ge 0$,

$$X_{n+1} = G(n, X_n, \varepsilon_{n+1}),$$

où $(\varepsilon_n)_{n\ge 0}$ est une suite de v.a. i.i.d. Soit $(Y_n)_{0\le n\le N} = (\varphi_n(X_n))_{0\le n\le N}$ le processus de grain associé. Alors la fonction valeur satisfait :

- $Z_N = Y_N = \varphi_N(X_N)$
- $\forall$, $0 \le k \le N-1$, $Z_k = \max(Y_k, \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k])$.

Dans le cadre markovien, on peut écrire, $Z_k = V_k(X_k)$ (voir cours) et

- $Z_N = V_N(X_N) = \varphi_N(X_N)$
- $\forall\, 0 \le k \le N-1$, $V_k(X_k) = \max(\varphi_k(X_k), \mathbb{E}[V_{k+1}(G(k, X_k, \varepsilon_{k+1}))|X_k])$. Ainsi,

$$\forall\, x \in E, \quad V_k(x) = \max(\varphi_k(x), \mathbb{E}[V_{k+1}(G(k, x, \varepsilon_{k+1}))])$$

Traduisons maintenant ceci en contrôle optimal. On se donne

- Espace des états $S = E \cup \{\Delta\}$ (l'espace de la chaîne de Markov avec un cimetière).
- Espace des action $A = \{0, 1\}$, où 0 signifie "on continue" et 1 "on arrête".
- Une réalisation du système dynamique contrôlé

$$\tilde{G}(n, x, a, \varepsilon_{n+1}) = \begin{cases} G(n, x, \varepsilon_{n+1}) & \text{si } x \in E \text{ et } a = 0 \text{ (on continue)} \\ \Delta & \text{sinon (càd } x \in E \text{ et } a = 1\text{, ou } x = \Delta \text{ et } a \in \{0, 1\}). \end{cases}$$

- Le processus contrôlé associé $(\tilde{X}_n)_{n\ge 0}$ avec $\tilde{X}_{n+1} = \tilde{G}(n, X_n, U_n, \varepsilon_{n+1})$.
- La fonction de gain r :

$$r(N, x, a) = R(x) = \begin{cases} \varphi_N(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x = \Delta \end{cases}$$

Pour tout $0 \le k \le N-1$,

$$r(k, x, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \text{ (on continue) ou } x = \Delta \\ \varphi_k(x) & \text{si } x \in E \text{ et } a = 1 \text{ (on s'arrête).} \end{cases}$$

On peut montrer que pour tout $0 \le k \le N$, $V(k, \Delta) = 0$. On a aussi, $\forall\, x \in E$, $V(N, x) = \varphi_N(x)$. De plus, pour $a \in \{0, 1\}$, $PV(k, x, a) = \mathbb{E}[V(k+1, Y)]$ avec $Y \sim P(k, x, a)$. Ainsi, en utilisant la formulation avec $\tilde{G}$, pour tout $x \in E$,

$$PV(k, x, a) = \mathbb{E}[V(k+1, \tilde{G}(k, x, a, \varepsilon_{k+1}))] = \begin{cases} \mathbb{E}[V(k+1, G(k, x, \varepsilon_{k+1}))] & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Donc, pour tout $0 \leq k \leq N-1$, $\forall\, x \in E$, d'après les équations de Bellman,

$$V(k,x) = \max(\varphi_k(x), \mathbb{E}[V(k+1, G(k,x,\varepsilon_{k+1}))]).$$

Les quantités $V_k(\,\cdot\,)$ et $V(k,\,\cdot\,)$ satisfont à la même récurrence rétrograde, ce sont donc les mêmes quantités.