

**MODÈLES EXACTEMENT SOLUBLES DE  
MÉCANIQUE STATISTIQUE EN DIMENSION DEUX :  
MODÈLE D'ISING, DIMÈRES ET ARBRES COUVRANTS**

Béatrice de Tilière  
Université Pierre et Marie Curie, Paris

Soutenance d'habilitation à diriger des recherches  
25 Novembre 2013

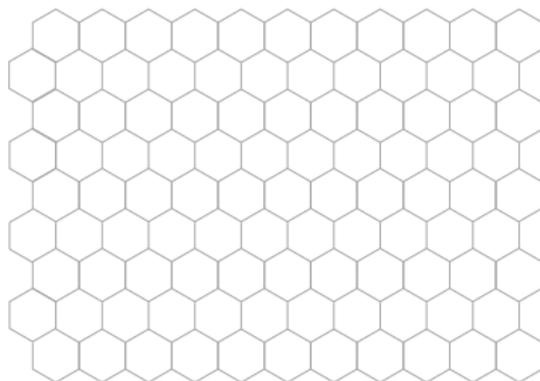
# I. INTRODUCTION

# MÉCANIQUE STATISTIQUE

*Compréhension des propriétés macroscopiques d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Modèle :

- ▶ Structure représentée par un **graphe**  $G = (V, E)$ , fini.

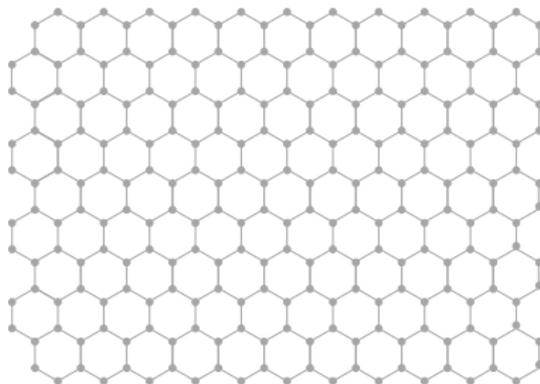


# MÉCANIQUE STATISTIQUE

*Compréhension des propriétés macroscopiques d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Modèle :

- ▶ Structure représentée par un **graphe**  $G = (V, E)$ , fini.

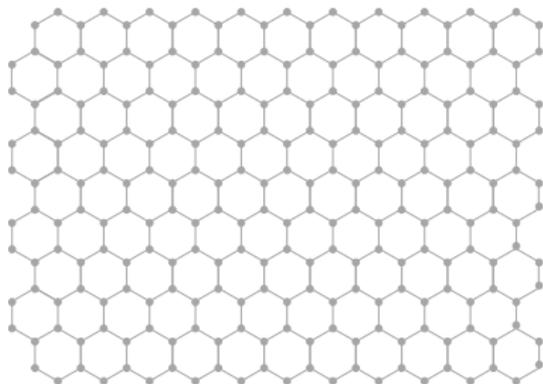


# MÉCANIQUE STATISTIQUE

*Compréhension des propriétés macroscopiques d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Modèle :

- ▶ Structure représentée par un **graphe**  $G = (V, E)$ , fini.

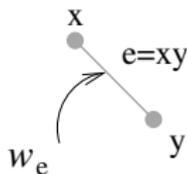


- ▶ Ensemble de configurations sur  $G$  :  $\mathcal{C}(G)$ .

# MÉCANIQUE STATISTIQUE

- ▶ **Paramètres** : intensité des interactions entre les composants microscopiques, température extérieure.

Fonction de poids  $w = (w_e)_{e \in E}$  positive sur les arêtes.



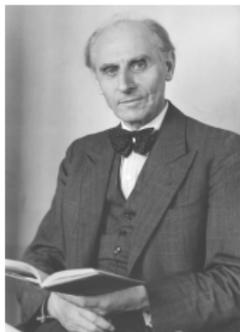
- ▶ À une configuration  $C$ , on associe une **énergie**  $\mathcal{E}_w(C)$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann** sur les configurations :

$$\forall C \in \mathcal{C}(G), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(G, w)},$$

où  $Z(G, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} e^{-\mathcal{E}_w(C)}$  est la **fonction de partition**.

# LE MODÈLE D'ISING

*Modèle de ferromagnétisme, d'alliages binaires*



Wilhelm Lenz (1888-1957)

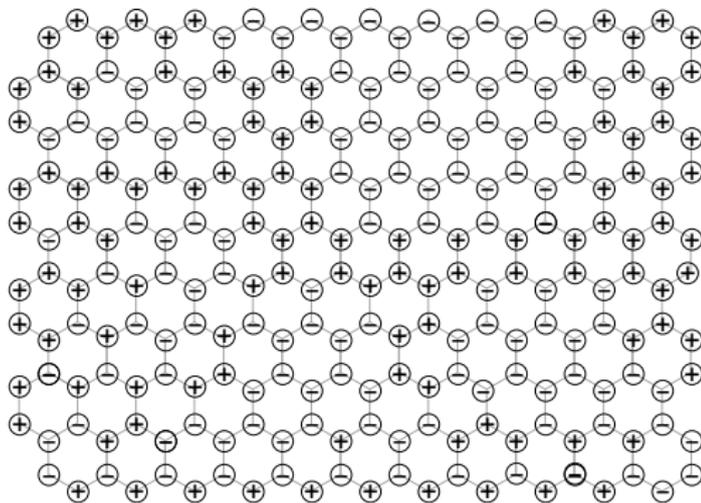


Ernst Ising (1900-1998)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Une **configuration de spins**  $\sigma$  associe à chaque sommet  $x$  du graphe  $G$  un spin  $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ .  
 $\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{-1, 1\}^V =$  ensemble des configurations de spins.

# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins

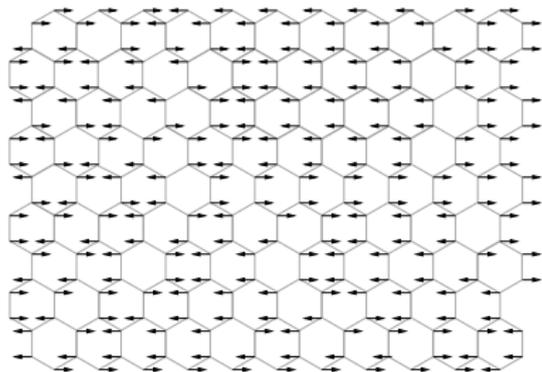


# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins / deux interprétations.

Moments magnétiques :

$+1/\rightarrow$ ,  $-1/\leftarrow$

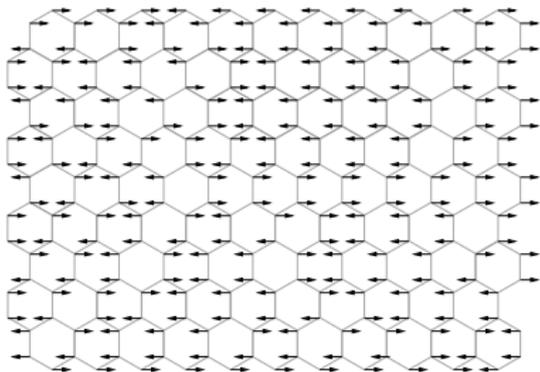


# LE MODÈLE D'ISING

- Une configuration de spins / deux interprétations.

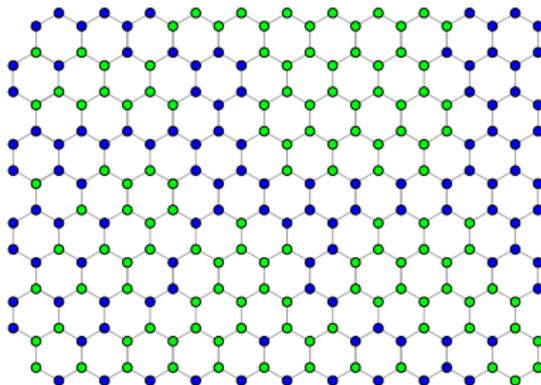
Moments magnétiques :

$+1/\rightarrow$ ,  $-1/\leftarrow$



Mélange de deux matériaux :

$+1/\bullet$ ,  $-1/\bullet$



# MODÈLE D'ISING

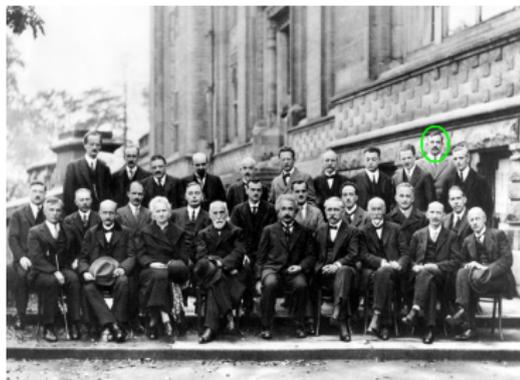
- ▶ Fonction de poids positive : **constantes de couplage**  $J = (J_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Énergie d'une configuration de spins :  $\mathcal{E}_J(\sigma) = - \sum_{e=xy \in E} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann d'Ising** :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^V, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J)}.$$

- ▶ Deux spins voisins  $\sigma_x, \sigma_y$  ont tendance à s'aligner.
- ▶ Plus le couplage  $J_{xy}$  est élevé, plus cette tendance est forte.

# LE MODÈLE DE DIMÈRES

*Répartition de molécules di-atomiques sur la surface d'un cristal*



Sir Ralph H. Fowler (1889-1944)  
Congrès Solvay 1927.

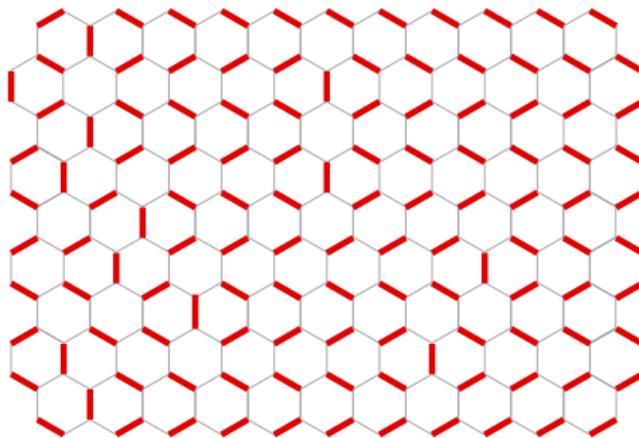


George S. Rushbrooke (1915-1995)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Une **configuration de dimères** ou **couplage parfait** : sous-ensemble d'arêtes tel que chaque sommet touche exactement une arête.  
⇒  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{M}(G)$  = ensemble des configurations de dimères.

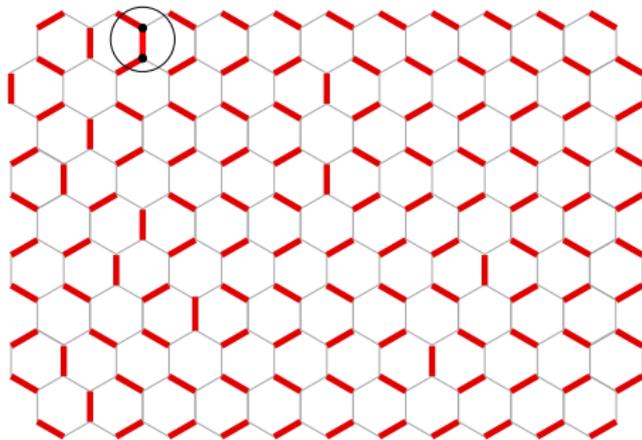
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



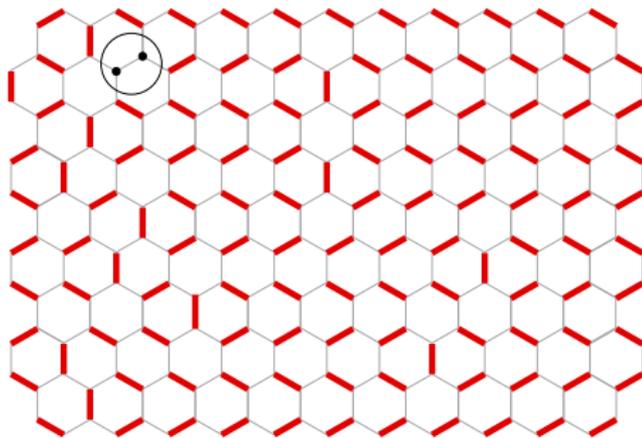
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



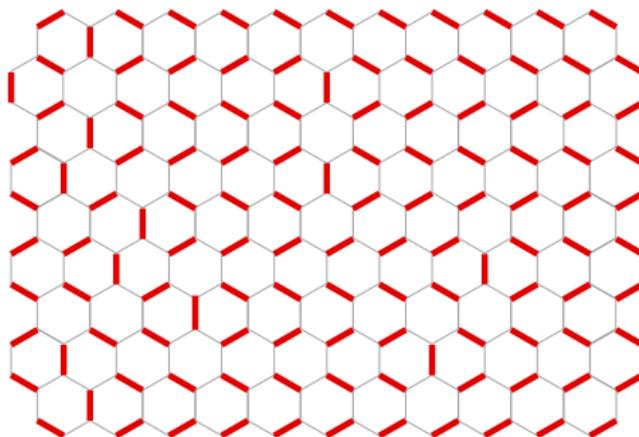
# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



# LE MODÈLE DE DIMÈRES

- ▶ Une configuration de dimères.



- ▶ Fonction de poids positive :  $\nu = (\nu_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Énergie d'une configuration  $M$  :  $\mathcal{E}_\nu(M) = - \sum_{e \in M} \log \nu_e$ .
- ▶ **Probabilité de Boltzmann des dimères** :

$$\forall M \in \mathcal{M}(\mathbb{G}), \quad \mathbb{P}_{\text{dimère}}(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dimère}}(\mathbb{G}, \nu)}.$$

- ▶ Les arêtes avec un poids élevé ont plus de chance d'être présentes.

# ARBRES COUVRANTS

*Liés aux réseaux électriques*

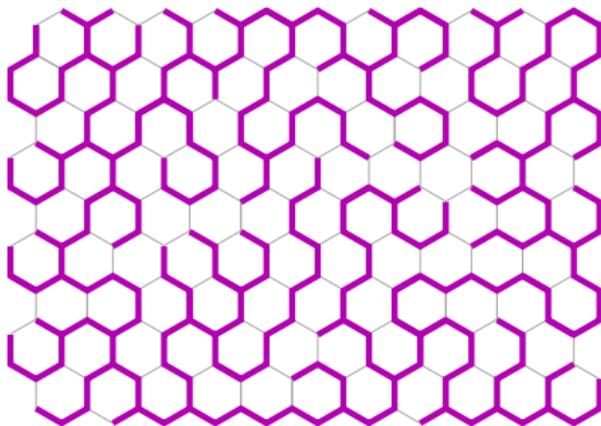


Gustav Kirchhoff (1824-1887)

- ▶ Graphe  $G = (V, E)$ .
- ▶ Un **arbre couvrant** : sous-ensemble d'arêtes touchant tous les sommets du graphe, connexe et ne contenant pas de cycle.  
⇒  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{T}(G) =$  ensemble des arbres couvrants.

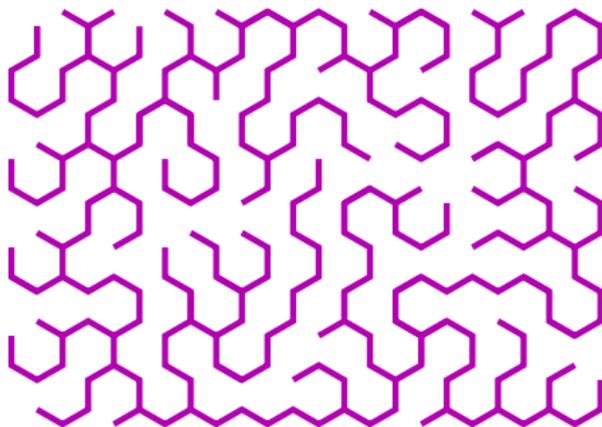
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



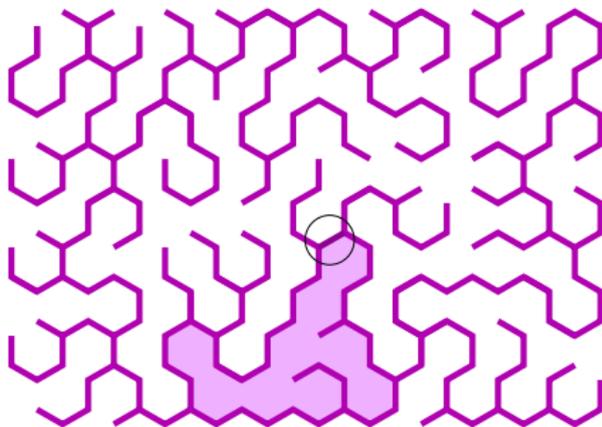
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



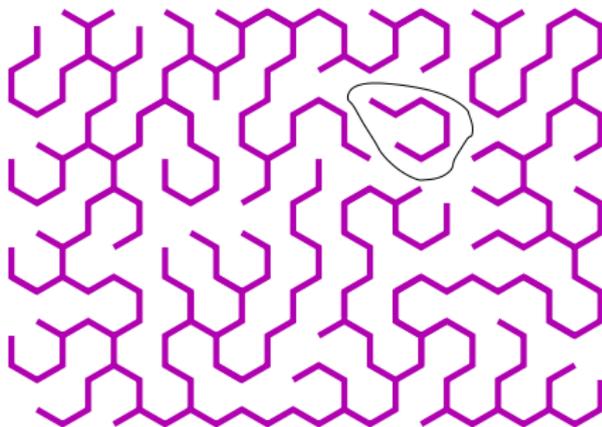
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



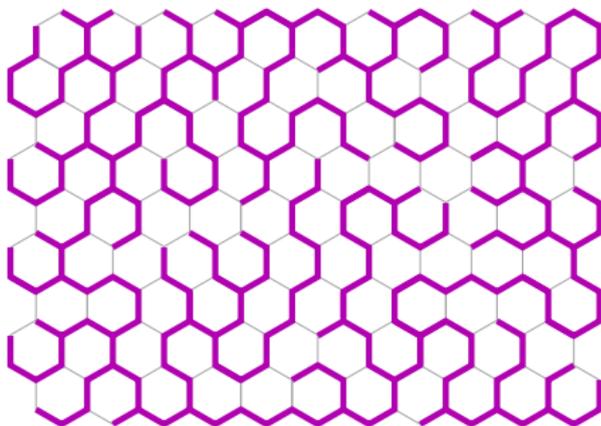
# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



# ARBRES COUVRANTS

- ▶ Un arbre couvrant



- ▶ Fonction de poids positive :  $\rho = (\rho_e)_{e \in E}$ .
- ▶ Energie d'un arbre  $T$  :  $\mathcal{E}_\rho(T) = -\sum_{e \in T} \log \rho_e$ .
- ▶ Probabilité de Boltzmann des arbres :

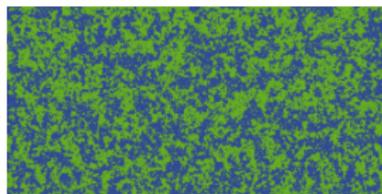
$$\forall T \in \mathcal{T}(G), \quad \mathbb{P}_{\text{arbre}}(T) = \frac{\prod_{e \in T} \rho_e}{Z_{\text{arbre}}(G, \rho)}.$$

- ▶ Les arêtes avec un poids élevé ont plus de chance d'être présentes.

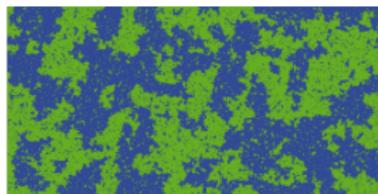
# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

*Faire tendre la longueur des arêtes vers zéro  
Regarder une configuration “typique”.*

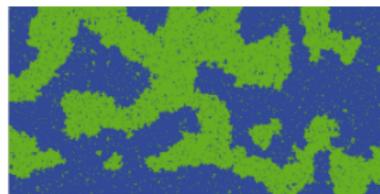
- ▶ Modèle d'Ising (Illustrations de R. Cerf)



$J$  petit



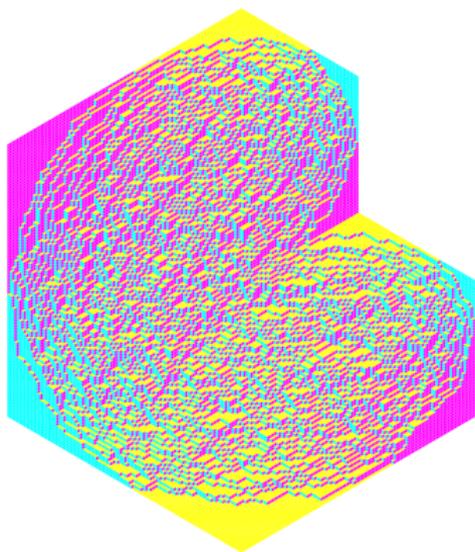
$J$  critique



$J$  grand

# COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

- ▶ Modèle de dimères (Illustration de R. Kenyon)



# MODÈLES EXACTEMENT SOLUBLES

- ▶ Probabilité de Boltzmann sur les configurations :

$$\forall C \in \mathcal{C}(\mathbf{G}), \quad \mathbb{P}(C) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(C)}}{Z(\mathbf{G}, w)},$$

où  $Z(\mathbf{G}, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathbf{G})} e^{-\mathcal{E}_w(C)}$  est la fonction de partition.

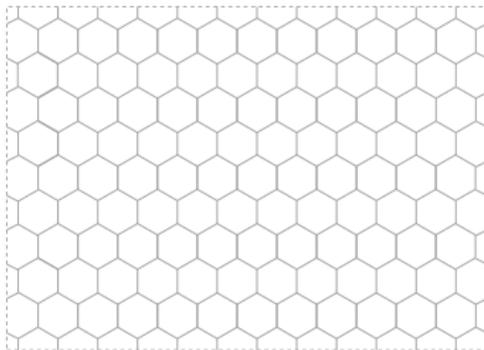
- ▶ Le modèle est **exactement soluble** s'il existe une formule exacte, explicite pour la fonction de partition.
- ▶ Trois modèles exactement solubles :
  - ▶ Ising-2d : Onsager (1944) - Fisher (1966) :  $Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, J) = \sqrt{\det(K_{\mathbf{G}^F})}$ .
  - ▶ Dimères-2d : Kasteleyn, Temperley-Fisher (1961) :
$$Z_{\text{dimère}}(\mathbf{G}, \nu) = \sqrt{\det(K_{\mathbf{G}})}$$
  - ▶ Arbres couvrants : Kirchhoff (1848) :  $Z_{\text{arbre}}(\mathbf{G}, \rho) = \det(\Delta_{\mathbf{G}}^{(r)})$ .

## II. BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- ▶ *Des boucles apparaissent naturellement dans le modèle de dimères.*
- ▶ *Étude de la distribution de l'enroulement des boucles sur le tore.*

# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- ▶ Soit  $G$  un graphe hexagonal plongé sur le tore.



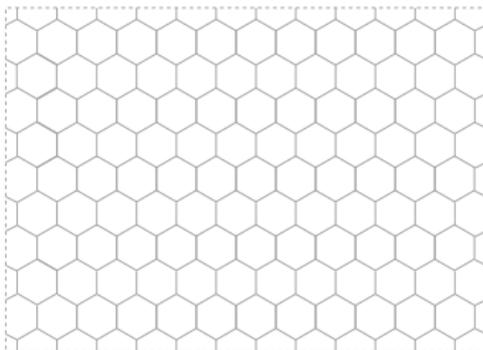
# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- ▶ Soit  $G$  un graphe hexagonal plongé sur le tore.

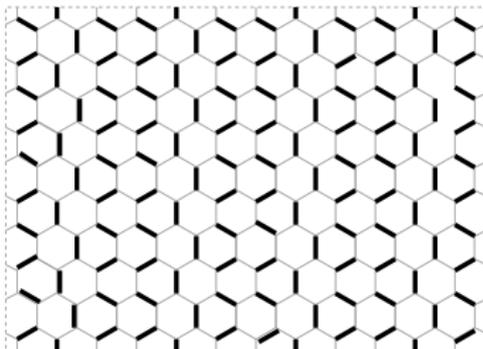


## BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- ▶ Soit  $G$  un graphe hexagonal plongé sur le tore.

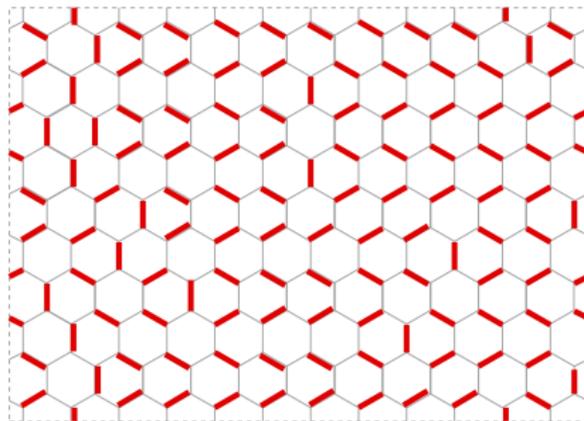


- ▶ Configuration de dimères de base  $M_0$  fixée.



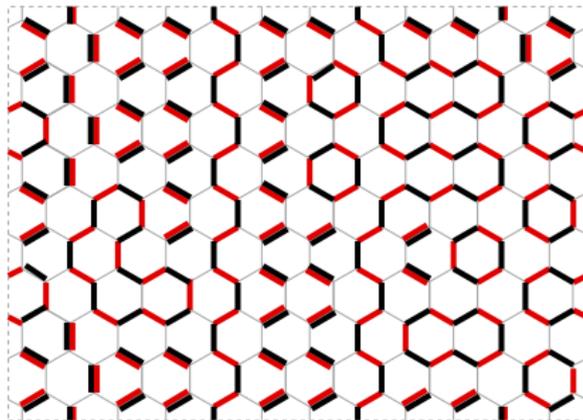
# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- Configuration de dimères  $M$  prise au hasard dans  $\mathcal{M}(G)$ .



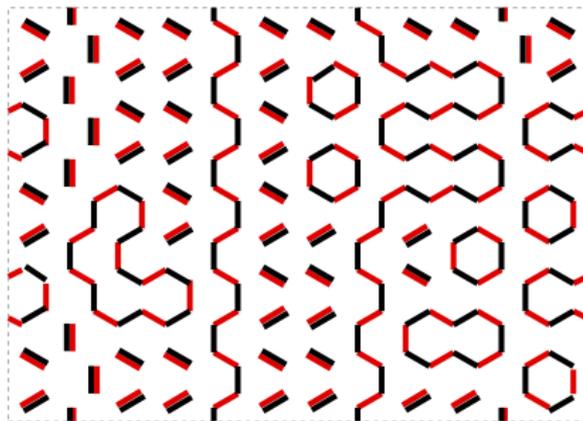
# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- Superposition  $M_0 \cup M$  des configurations  $M_0$  et  $M$  :



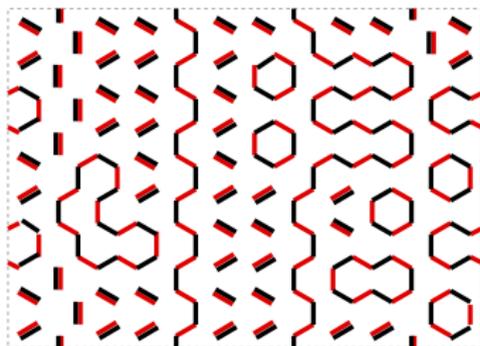
# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

- ▶ Superposition  $M_0 \cup M$  des configurations  $M_0$  et  $M$  :



# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE

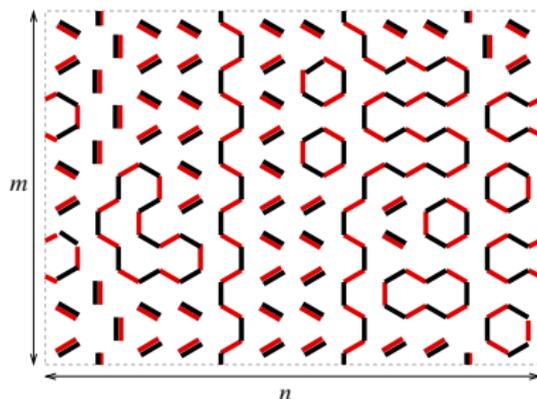
- ▶ Superposition  $M_0 \cup M$  des configurations  $M_0$  et  $M$  :



$$\text{Wind}(M) = (2, 0).$$

- ▶ Le **nombre d'enroulements** de la configuration de dimères  $M$ , noté  $\text{Wind}(M)$ , est le nombre de tours (signés) de la superposition  $M_0 \cup M$  dans les directions horizontales et verticales du tore.

# BOUCLES DANS LE MODÈLE DE DIMÈRES SUR LE TORE



$(\text{Wind}_{m,n})$

## THÉORÈME (BOUTILLIER, dT (2006))

Lorsque  $n, m \rightarrow \infty$  et  $\frac{n}{\sqrt{3m}} \rightarrow \rho$ , avec  $\rho > 0$ , la suite de variables aléatoires  $(\text{Wind}_{m,n})$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne discrète  $\text{Wind}_\rho$  dont la loi est donnée par :

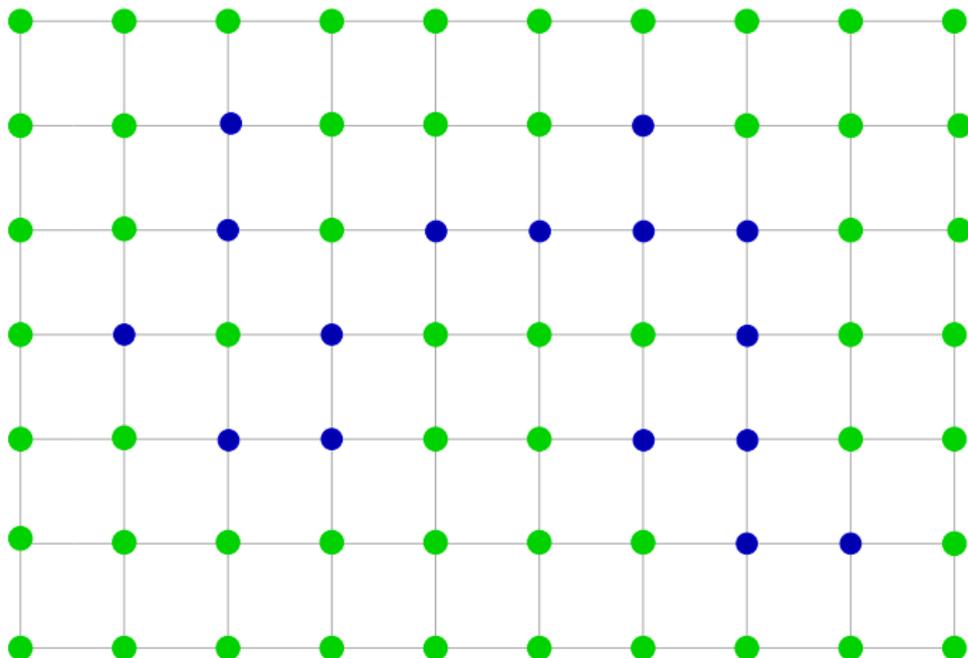
$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2, \quad \mathbb{P}[\text{Wind}_\rho = (k, \ell)] = \frac{1}{Z_\rho} e^{-\frac{\pi}{2}(\frac{k^2}{\rho} + \rho \ell^2)}.$$

### III. LE MODÈLE D'ISING $Z$ -INVARIANT CRITIQUE VIA LES DIMÈRES

- ▶ *Fisher établit une correspondance entre le modèle d'Ising sur un graphe  $G$  et le modèle de dimères sur un graphe décoré  $G^F$ .*  
⇒ *Outils puissants des dimères pour étudier le modèle d'Ising.*
- ▶ *Étude du modèle de dimères correspondant au modèle d'Ising  $Z$ -invariant critique.*

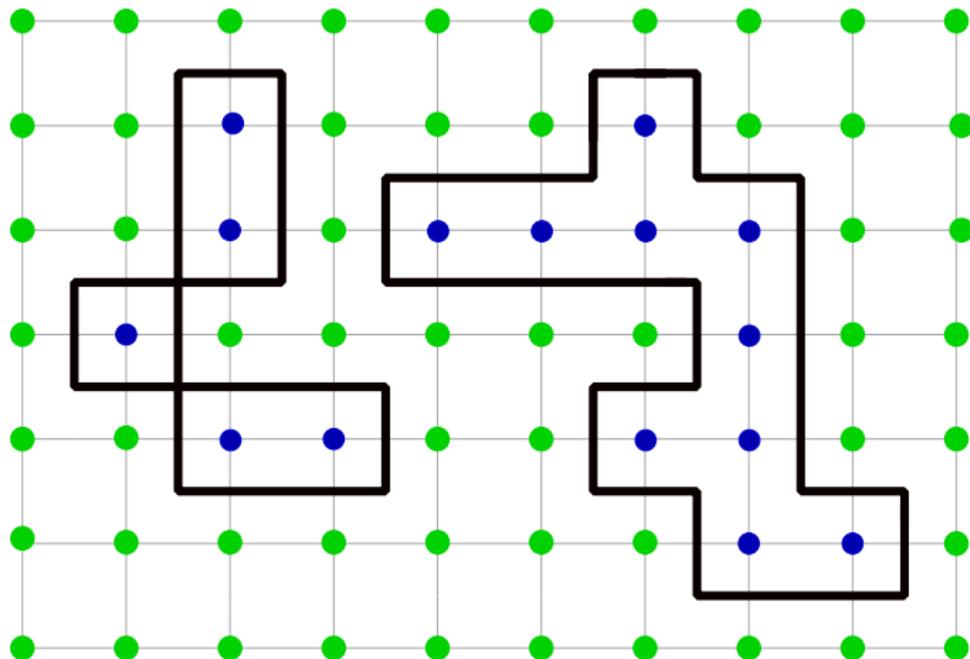
# CORRESPONDANCE DE FISHER

- Modèle d'Ising sur graphe  $G$ .



# CORRESPONDANCE DE FISHER

- ▶ Représentation en contours : développement basse température (Kramers-Wannier).



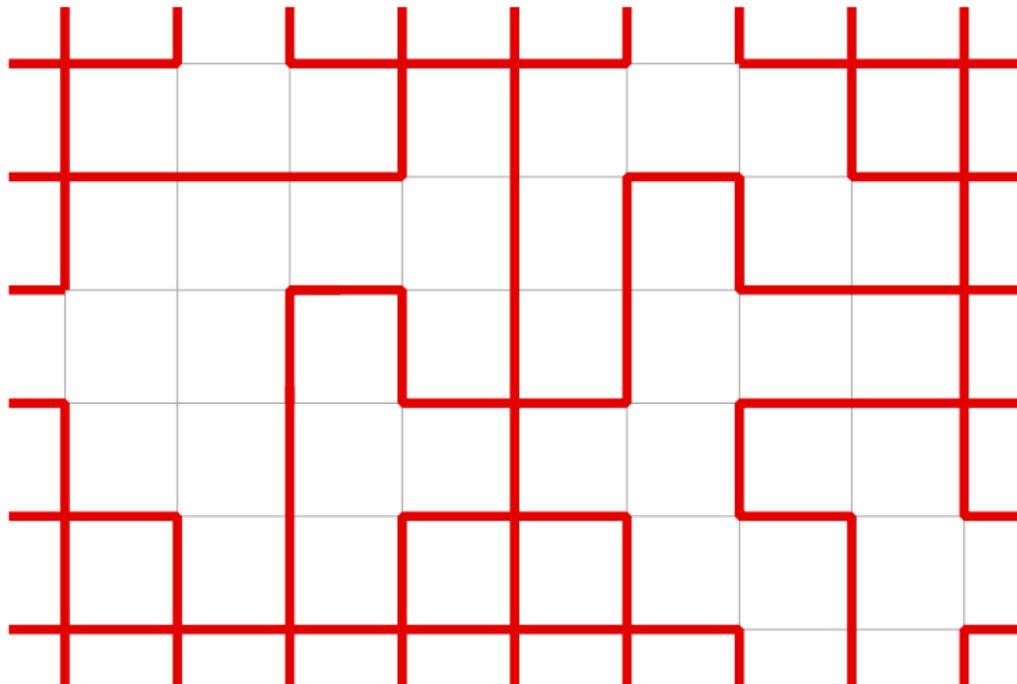






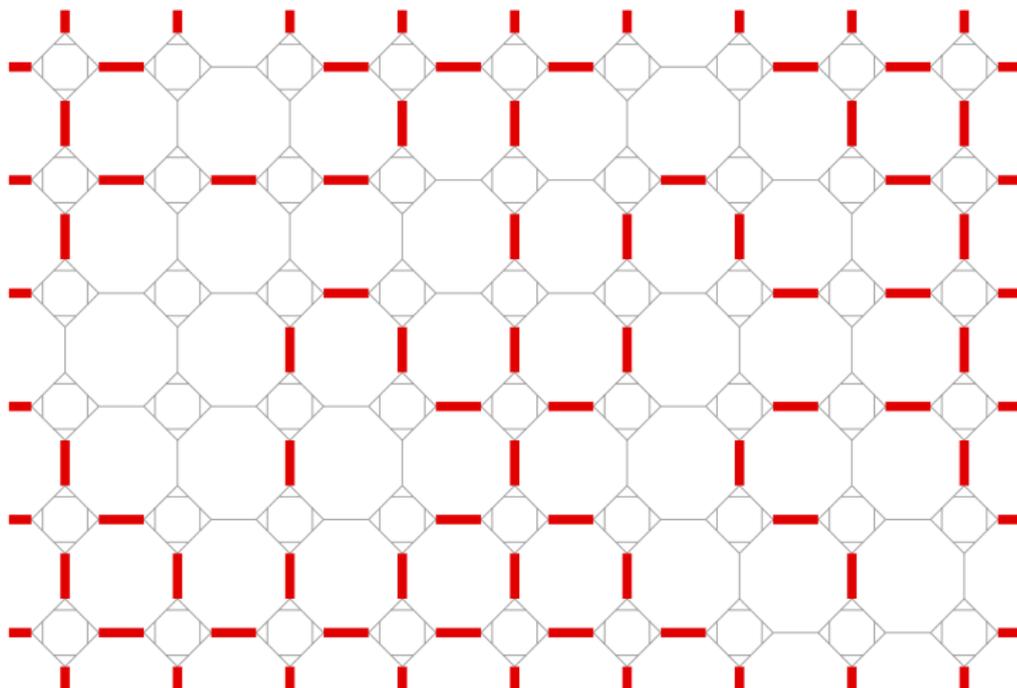
# CORRESPONDANCE DE FISHER

- ▶ Des contours aux configurations de dimères : prendre le complémentaire.



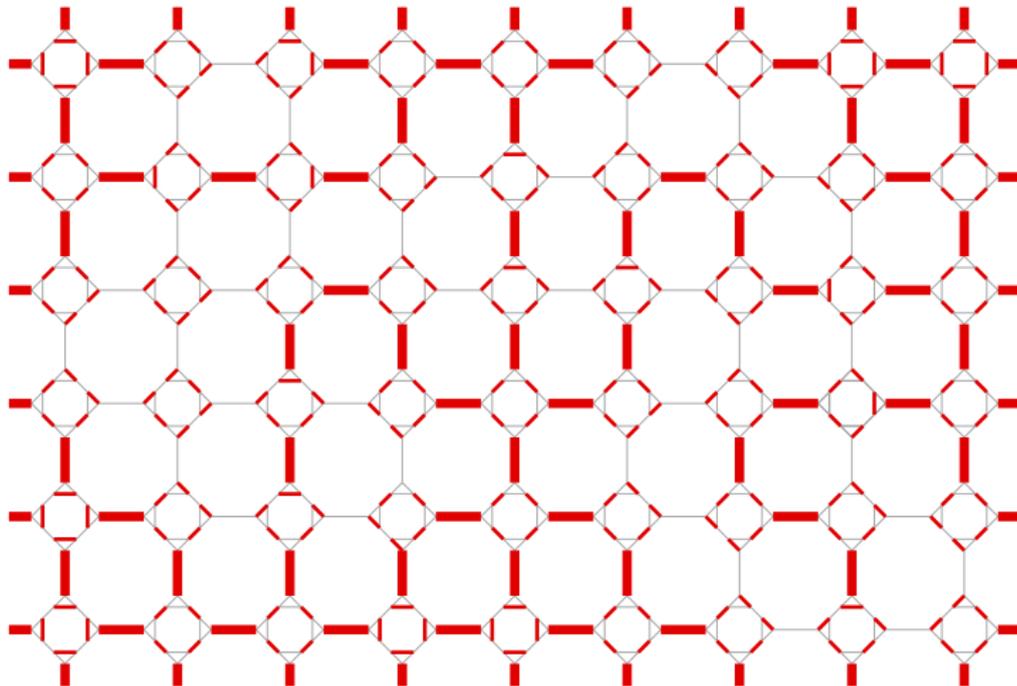
# CORRESPONDANCE DE FISHER

- Décorer le graphe  $\rightarrow$  graphe de Fisher  $G^F$ . Garder le négatif.



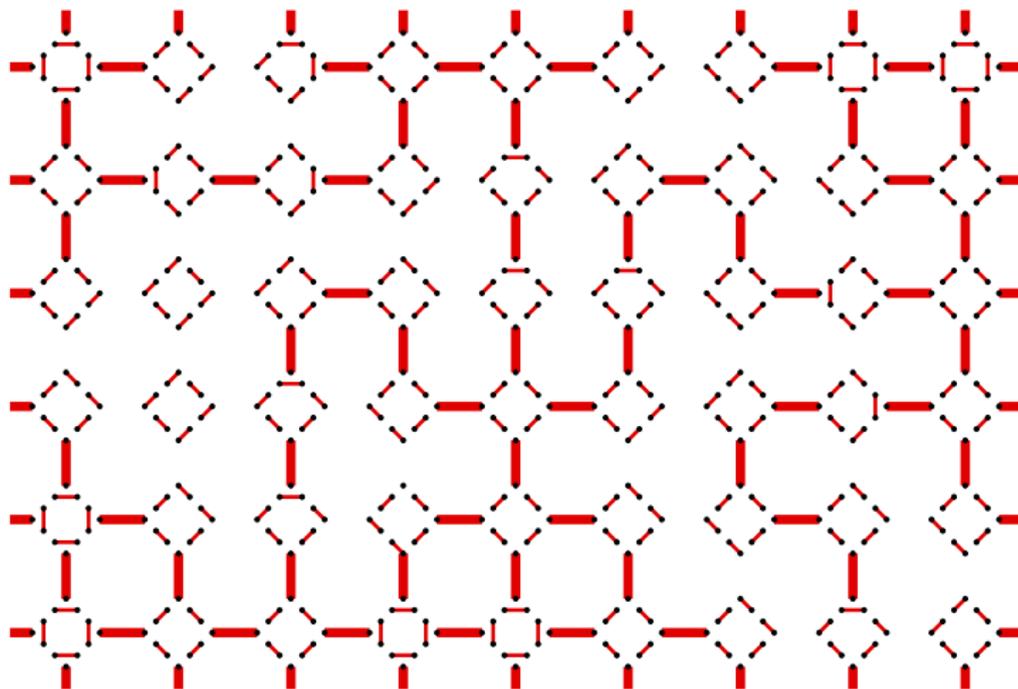
# CORRESPONDANCE DE FISHER

- Compléter en une configuration de dimères :  $2^{|V^*|}$  manières.



# CORRESPONDANCE DE FISHER

- Compléter en une configuration de dimères :  $2^{|V^*|}$  manières.



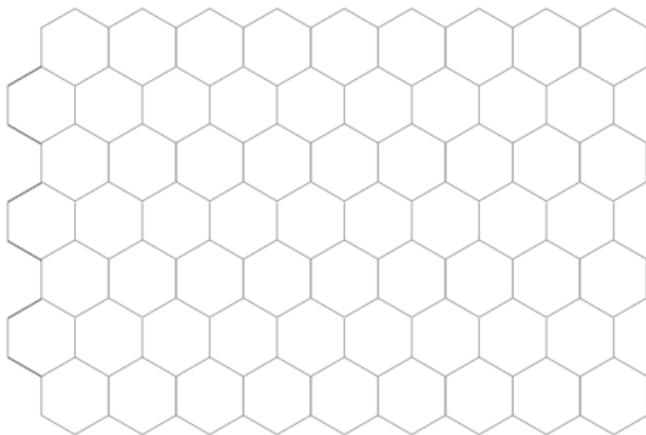
- ▶ *En fonction des constantes de couplage, le comportement du modèle d'Ising évolue :*
  - *J petit : spins mélangés,*
  - *J grand : majorité de spins + ou -,*
  - *J critique : transition de phase.*
- ▶ *Si le graphe  $\mathbf{G}$  est  $\mathbb{Z}^2$ , Kramers et Wannier déterminent les constantes de couplage critiques :*

$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

- ▶ *Baxter généralise le modèle d'Ising critique sur  $\mathbb{Z}^2$  à une grande famille de graphes : les graphes isoradiaux.*

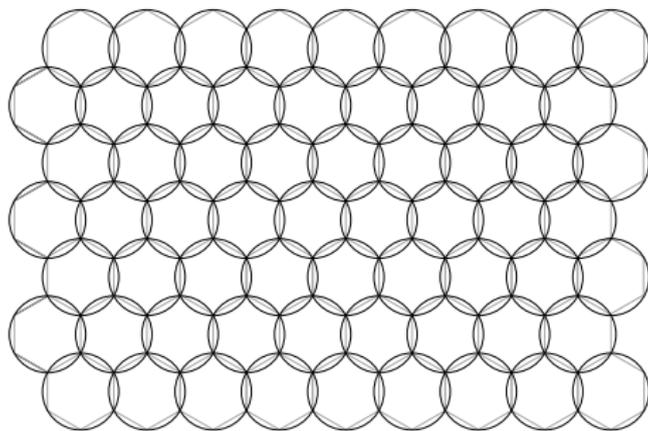
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



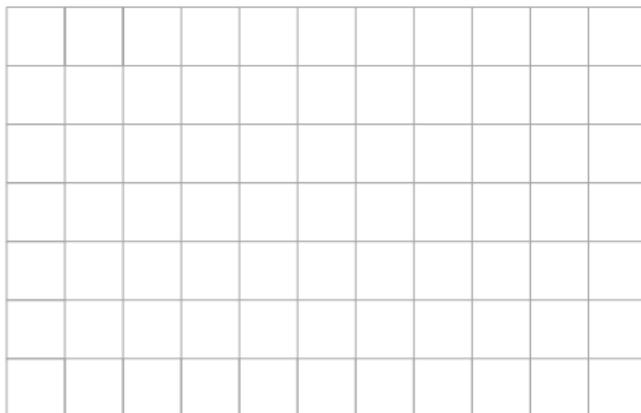
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



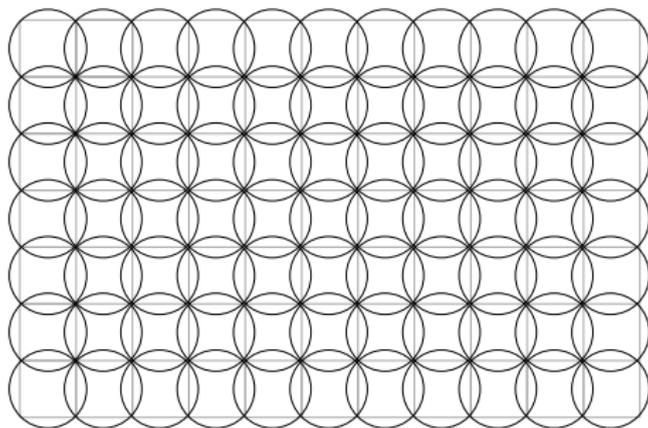
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



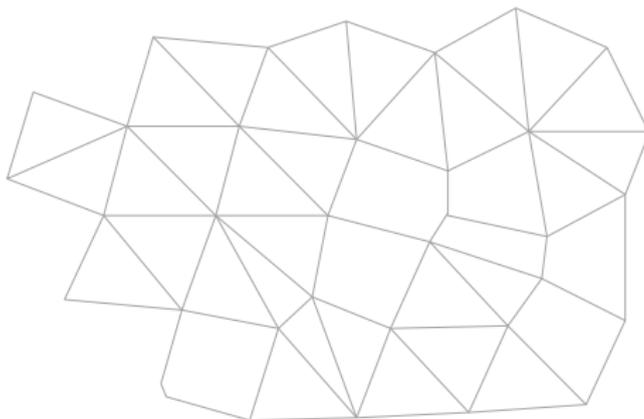
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



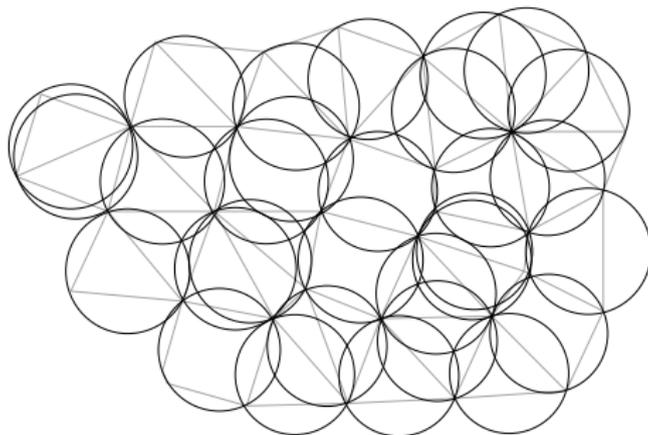
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



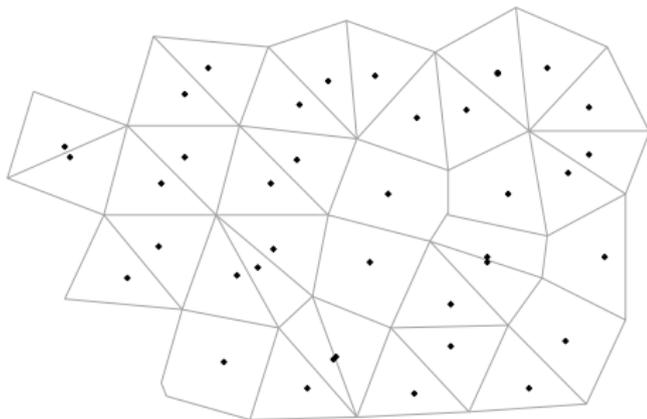
# GRAPHES ISORADIAUX

- ▶ Un graphe  $G$  est **isoradial** s'il est planaire et s'il peut être plongé dans le plan de sorte que toutes ses faces soient inscrites dans un cercle de rayon 1 et que les centres des cercles soient à l'intérieur des faces (Duffin-Mercat-Kenyon).



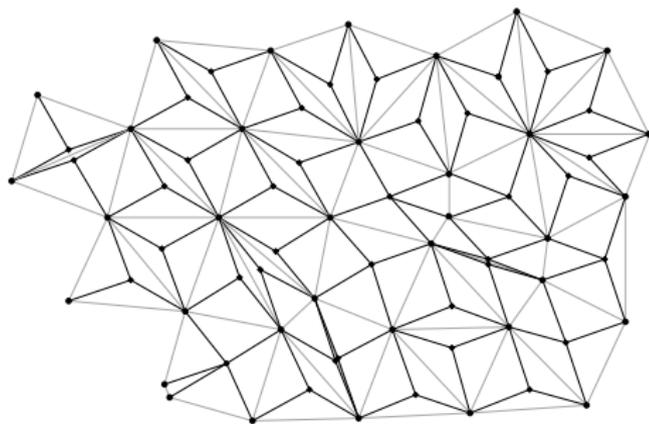
# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On prend les centres des cercles circonscrits.



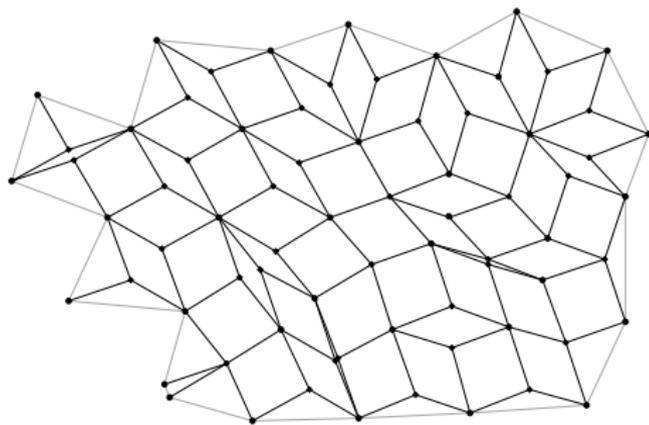
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



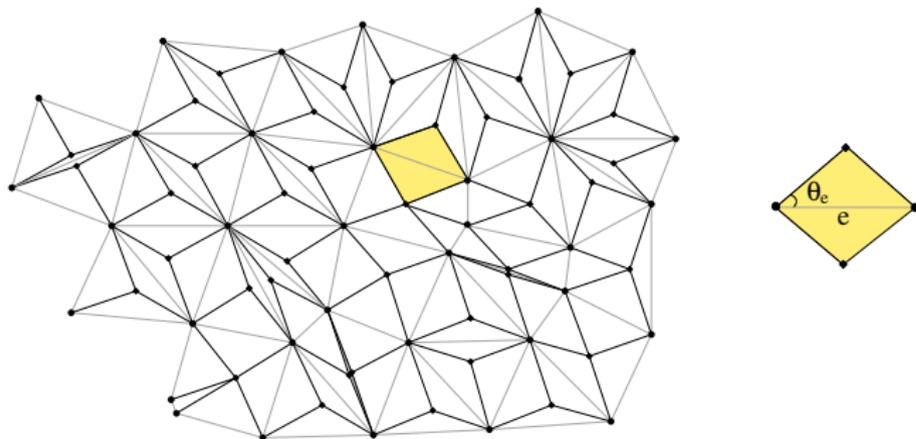
## GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On relie les centres des cercles aux sommets du graphe  $G$ .  
⇒ Graphe de losanges associé  $G^\diamond$ .



# GRAPHE DE LOSANGES ASSOCIÉ, ANGLES

- ▶ On associe à chaque arête  $e$ , le demi-angle  $\theta_e$  du losange correspondant.



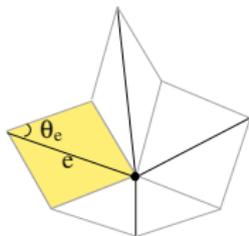
## MODÈLE D'ISING $Z$ -INVARIANT CRITIQUE

- ▶ Le modèle d'Ising est  $Z$ -invariant critique si les constantes de couplage sont égales à :

$$\forall e \in E, \quad J_e = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right).$$

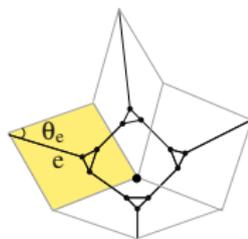
- ▶ Baxter les déterminent en utilisant :
  - ▶ la  $Z$ -invariance (invariance par transformation  $\Delta - Y$ ),
  - ▶ une forme généralisée d'auto-dualité,
  - ▶ l'hypothèse d'unicité du point critique.
- ▶ Li et Duminil-Copin - Cimasoni, montrent que le modèle est bien critique.
- ▶ Si  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $\forall e \in E$ ,  $\theta_e = \frac{\pi}{4}$ , d'où  $J_e = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ .

- ▶ On considère donc le modèle de dimères sur un graphe de Fisher  $\mathbf{G}^F$ , correspondant à un modèle d'Ising Z-invariant critique défini sur un graphe isoradial  $\mathbf{G}$ .
- ▶ La correspondance de Fisher nous donne aussi la transformation des poids.



Ising critique :  $\forall e \in E,$

$$J_e = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \sin \theta_e}{\cos \theta_e} \right).$$



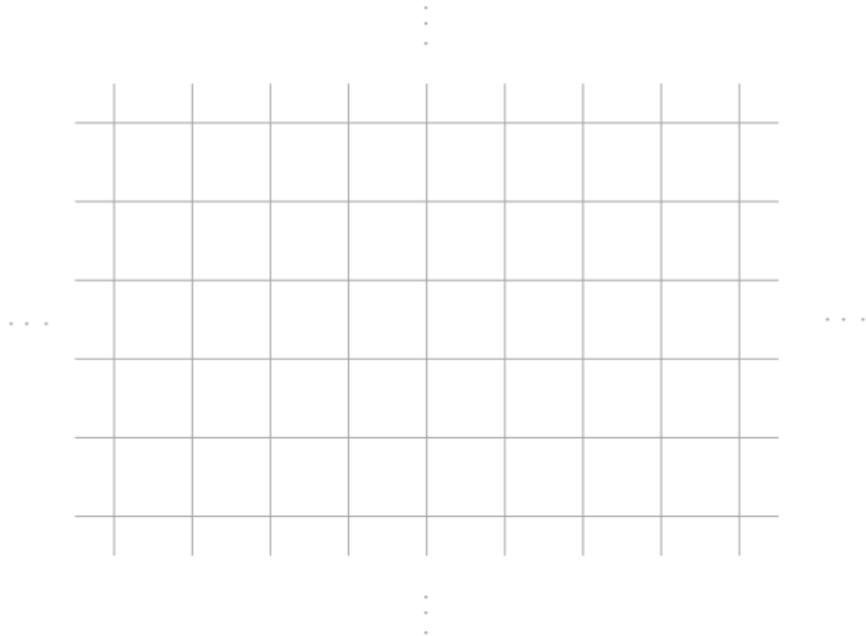
Dimères correspondant :  $\forall e \in E^F$

$$v_e = \begin{cases} \cot \frac{\theta_e}{2} & \text{si arête commune,} \\ 1 & \text{si nouvelle arête.} \end{cases}$$

- ▶ On souhaite déterminer le comportement macroscopique du modèle de dimères critique.

# MODÈLE DE DIMÈRES CRITIQUE SUR UN GRAPHE DE FISHER $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE

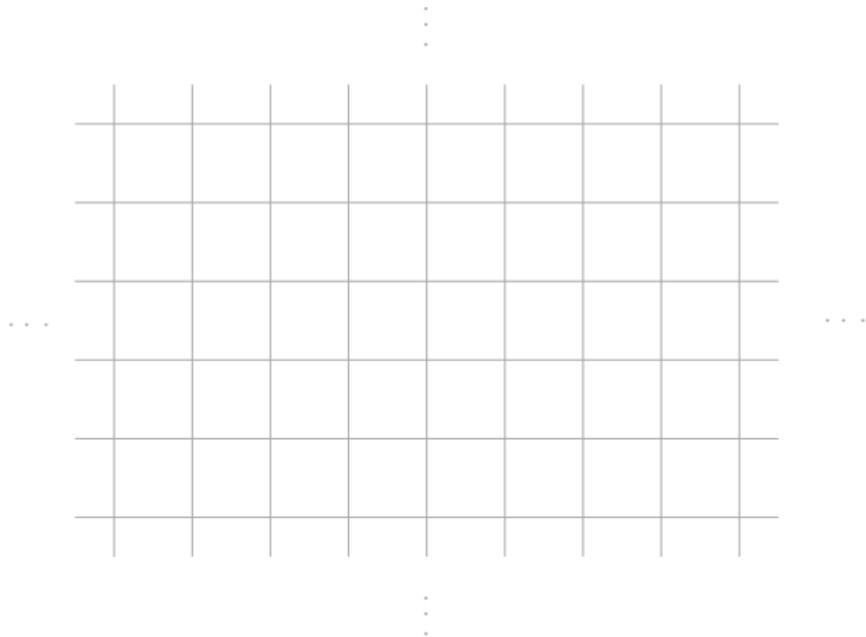
- ▶ Soit  $G$  un graphe isoradial infini,  $\mathbb{Z}^2$ -périodique.



- ▶ Constantes de couplage  $(J_e)_{e \in E}$  critiques sur les arêtes de  $G$ .

# MODÈLE DE DIMÈRES CRITIQUE SUR UN GRAPHE DE FISHER $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE

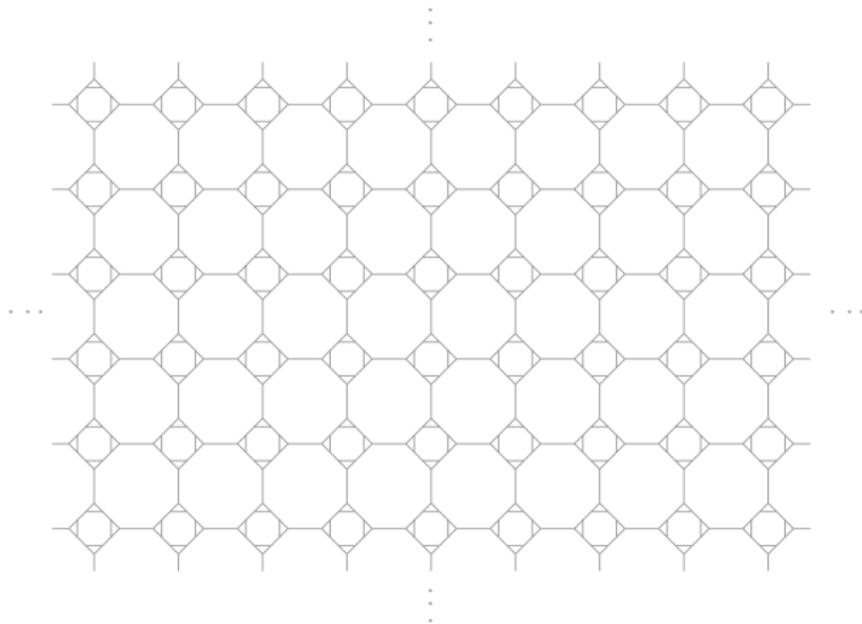
- ▶ Soit  $G$  un graphe isoradial infini,  $\mathbb{Z}^2$ -périodique.



- ▶ Constantes de couplage  $(J_e)_{e \in E}$  critiques sur les arêtes de  $G$ .

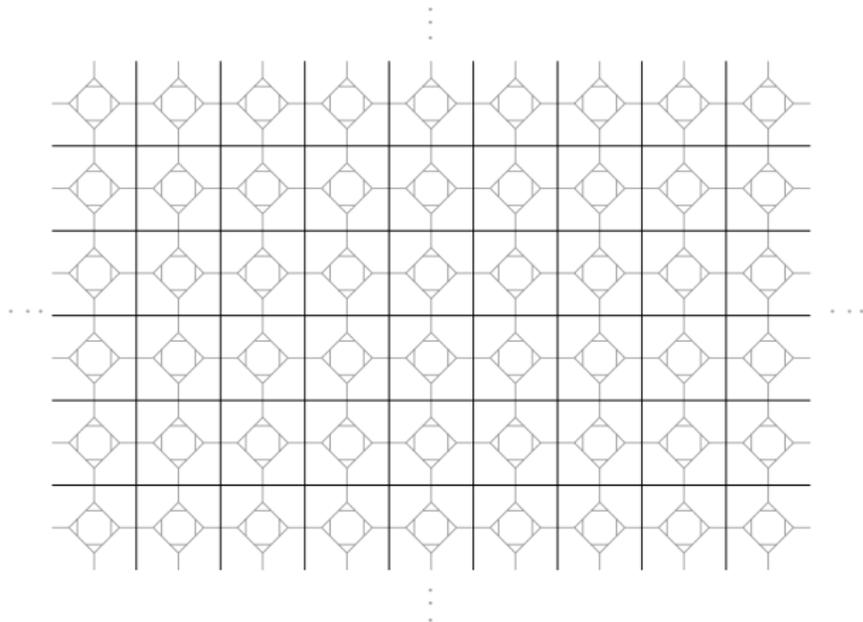
# MODÈLE DE DIMÈRES CRITIQUE SUR UN GRAPHE DE FISHER $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE

- Soit  $G^F$  le graphe de Fisher correspondant, aussi  $\mathbb{Z}^2$ -périodique.



# MODÈLE DE DIMÈRES CRITIQUE SUR UN GRAPHE DE FISHER $\mathbb{Z}^2$ -PÉRIODIQUE

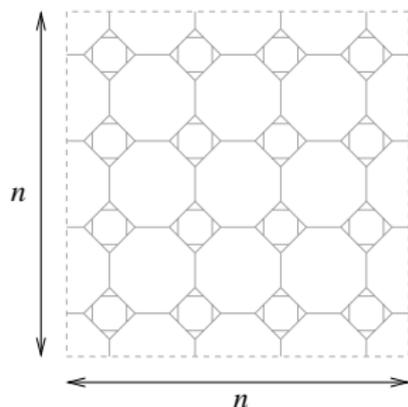
- Soit  $G^F$  le graphe de Fisher correspondant, aussi  $\mathbb{Z}^2$ -périodique.



- Poids critiques  $(v_e)_{e \in E^F}$  correspondants, sur les arêtes de  $G^F$ .

# EXHAUSTION DE $G^F$ PAR DES GRAPHES TORIQUES

- ▶ Exhaustion de  $G^F$  par des graphes toriques :  $(G_n^F) = (G^F/n\mathbb{Z}^2)$ .



$n=4$



$n=1$

$G_1^F$  : Domaine fondamental

- ▶ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , modèle de dimères sur  $G_n^F$  :

$$\forall M \in \mathcal{M}(G_n^F), \quad \mathbb{P}_n(M) = \frac{\prod_{e \in M} \nu_e}{Z_{\text{dimère}}(G_n^F, \nu)}.$$

# LES QUESTIONS QUE L'ON SE POSE

- ▶ Calcul de l'énergie libre :

$$f = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{\text{dimère}}(\mathbf{G}_n^F, \nu).$$

- ▶ Obtenir une expression explicite pour une mesure de Gibbs naturelle, qui est une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  telle que :
  - ▶ si l'on fixe un couplage parfait dans une région annulaire, les couplages parfaits à l'intérieur et à l'extérieur de l'anneau sont indépendants,
  - ▶ si  $M$  est un couplage parfait à l'intérieur de l'anneau,

$$\mathbb{P}(M) \propto \prod_{e \in M} \nu_e.$$

(Conditions DLR)

## THÉORÈME (BOUTILLIER, DT (2010-2011))

- ▶ L'énergie libre du modèle de dimères critique sur  $\mathbb{G}^F$  est égale à :

$$f = -\frac{1}{2(2\pi i)^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \log(\det K_1(z, w)) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}, \text{ et aussi à}$$

$$f = \mathbb{C}^+ \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}_1} \left[ \frac{\pi - 2\theta_{\mathbf{e}}}{2\pi} \log \tan \theta_{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \log \cot \frac{\theta_{\mathbf{e}}}{2} - \frac{1}{\pi} (L(\theta_{\mathbf{e}}) + L(\frac{\pi}{2} - \theta_{\mathbf{e}})) \right],$$

où  $L$  est la fonction de Lobatchevski,  $L(x) = -\int_0^x \log 2 \sin t \, dt$ .

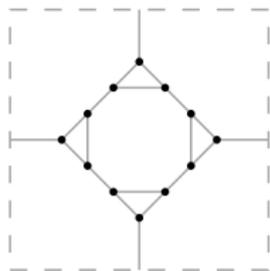
- ▶ La limite faible des mesures de Boltzmann  $\mathbb{P}_n$  définit une mesure de Gibbs  $\mathbb{P}$  sur  $\mathbb{G}^F$ . La probabilité qu'un sous-ensemble d'arêtes  $\{\mathbf{e}_1 = x_1 y_1, \dots, \mathbf{e}_k = x_k y_k\}$ , appartienne à une configuration de dimères de  $\mathbb{G}^F$  est donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \left( \prod_{i=1}^k v_{x_i y_i} \right) \text{Pf}((K^{-1})_{\{x_1 y_1, \dots, x_k y_k\}}), \quad \text{où}$$

$$K^{-1}_{(x,n,m)(y,n',m')} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\text{Com}(K_1(z,w))_{x,y}^t}{\det K_1(z,w)} z^{n'-n} w^{m'-m} \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

## POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE : $\det K_1(z, w)$

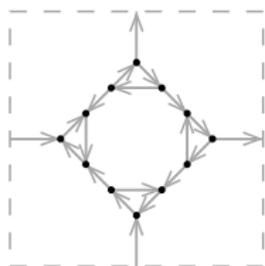
- Soit le domaine fondamental  $G_1^F$ , contenant  $k$  sommets.



$k=12$

# POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE : $\det K_1(z, w)$

- ▶ Soit le domaine fondamental  $G_1^F$ , contenant  $k$  sommets.



$k = 12$

- ▶ Orientation des arêtes
- ▶ Soit  $K_1$  la matrice définie par :

$$\forall x, y \in V^F, \quad (K_1)_{x,y} = \begin{cases} v_{xy} & \text{si } x \sim y, x \rightarrow y, \\ -v_{xy} & \text{si } x \sim y, y \rightarrow x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

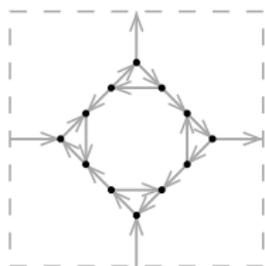


$$\text{Pf}(K_1) = \sum_{\{\pi: \text{appariement de } \{1, \dots, k\}\}} \underbrace{\text{sgn}(\sigma_\pi)}_{\pm 1} \underbrace{K_{1\pi(1), \pi(2)} \cdots K_{1\pi(k-1), \pi(k)}}_{\pm 1 \text{ contribution config. dimères}}$$

$$= \sqrt{\det(K_1)}.$$

# POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE : $\det K_1(z, w)$

- ▶ Soit le domaine fondamental  $G_1^F$ , contenant  $k$  sommets.



$k = 12$

- ▶ Orientation des arêtes : **orientation de Kasteleyn**.
- ▶ Soit  $K_1$  la matrice définie par :

$$\forall x, y \in V^F, \quad (K_1)_{x,y} = \begin{cases} v_{xy} & \text{si } x \sim y, x \rightarrow y, \\ -v_{xy} & \text{si } x \sim y, y \rightarrow x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

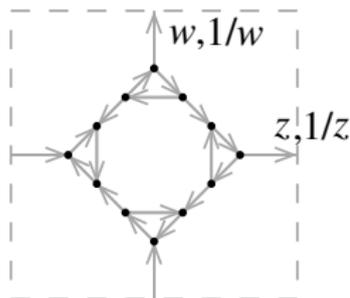


$$\text{Pf}(K_1) = \sum_{\{\pi: \text{appariement de } \{1, \dots, k\}\}} \underbrace{\text{sgn}(\sigma_\pi)}_{\pm 1} \underbrace{K_{1\pi(1), \pi(2)} \cdots K_{1\pi(k-1), \pi(k)}}_{\pm 1 \text{ contribution config. dimères}}$$

$$= \sqrt{\det(K_1)}.$$

## POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

- ▶ Ne suffit pas. On rajoute des poids  $z, w \rightarrow K_1(z, w)$ .



Le polynôme caractéristique est :  $\det(K_1(z, w))$ .

THÉORÈME (KASTELEYN, T., G.-L., C.-R.)

$$Z_{\text{dimère}}(\mathbf{G}_1^F) = \frac{1}{2} \sum_{(z,w) \in \{-1,1\}^2} \pm \sqrt{\det(K_1(z, w))}.$$

- ▶ Pour  $\mathbf{G}_n^F$ , grâce à l'invariance par translation, tout s'exprime en fonction de  $K_1(z, w)$  et  $\det K_1(z, w)$  [Cohn-Kenyon-Propp].
- ▶ Problèmes de convergence.
- ▶ Analyse des zéros de  $\det K_1(z, w)$ .

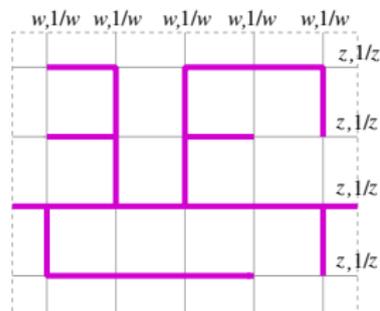
# IV. DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET FORÊTS COUVRANTES ENRACINÉES SUR DES CYCLES<sup>1</sup>

- ▶ *Analyse des zéros du polynôme caractéristique  $\det K_1(z, w)$  en le reliant au polynôme caractéristique du Laplacien critique  $\det(\Delta_1(z, w))$  de  $\mathbf{G}_1$ .*

# DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET CRSFs

$$\det K_1(z, w) \stackrel{[B, d^T]}{=} \mathcal{C} \det \Delta_1(z, w)$$

# DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET CRSFs

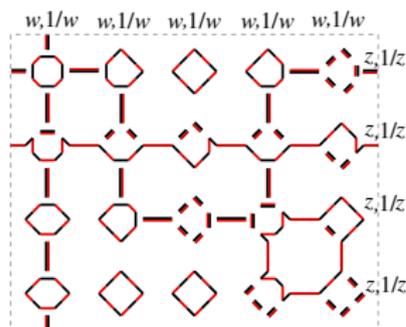


$$\det K_1(z, w) \stackrel{[\text{B}, \text{dT}]}{=} \mathcal{C} \det \Delta_1(z, w)$$

## THÉORÈME (FORMAN)

$$\det \Delta_1(z, w) = \sum_{F \in \mathcal{F}(G_1)} \left( \prod_{e \in F} \tan \theta_e \right) \prod_{T \in F} (1 - z^{h(T)} w^{v(T)}).$$

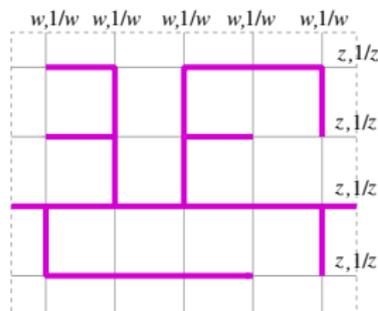
# DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET CRSFs



$$\det K_1(z, w)$$

$$\stackrel{[B, dT]}{=} \mathcal{C}$$

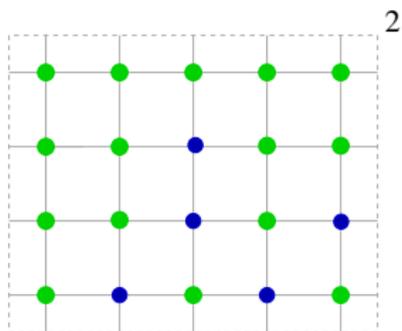
$$\det \Delta_1(z, w)$$



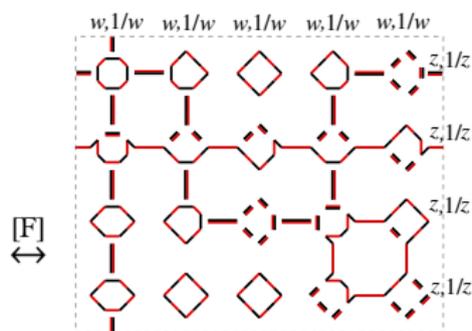
## THÉORÈME (FORMAN)

$$\det \Delta_1(z, w) = \sum_{F \in \mathcal{F}(G_1)} \left( \prod_{e \in F} \tan \theta_e \right) \prod_{T \in F} (1 - z^{h(T)} w^{v(T)}).$$

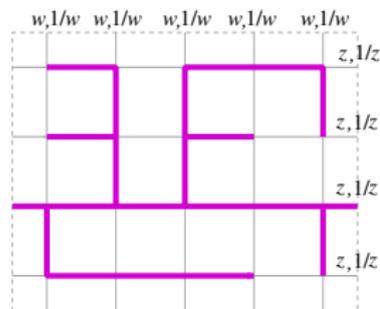
# DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET CRSFs



$$[Z_{\text{Ising}}(\mathbf{G}_1^F, J)]^2$$



$$\det K_1(z, w)$$



$$\stackrel{[B, dT]}{=} \mathcal{C} \det \Delta_1(z, w)$$

## THÉORÈME (FORMAN)

$$\det \Delta_1(z, w) = \sum_{F \in \mathcal{F}(\mathbf{G}_1)} \left( \prod_{e \in F} \tan \theta_e \right) \prod_{T \in \mathcal{F}} (1 - z^{h(T)} w^{v(T)}).$$



# DOUBLE MODÈLE D'ISING CRITIQUE ET CRSFs

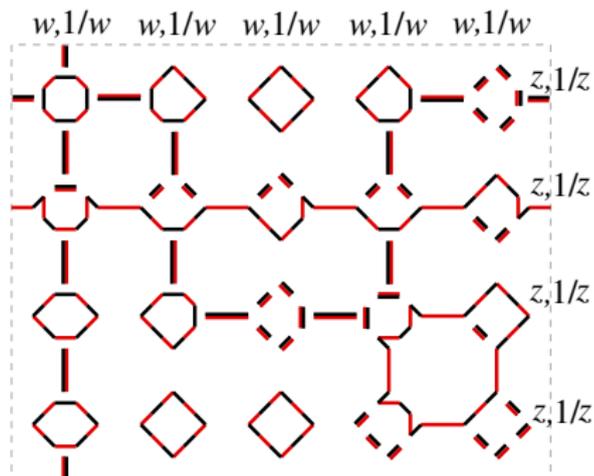
## THÉORÈME (dT (2013))

*Soit un modèle d'Ising critique défini sur un graphe  $G$  isoradial, infini,  $\mathbb{Z}^2$ -périodique. Alors, il existe une “correspondance” explicite entre les configurations de “doubles dimères” de  $G_1^F$  avec poids critiques, comptées par le polynôme caractéristique  $\det(K_1(z, w))$  et les CRSFs de  $G_1$  avec poids critiques, comptés par le polynôme caractéristique du Laplacien  $\det(\Delta_1(z, w))$ .*

Ceci démontre une “correspondance” explicite et inattendue entre deux modèles classiques de mécanique statistique au point critique.

# CORRESPONDANCE EXPLICITE

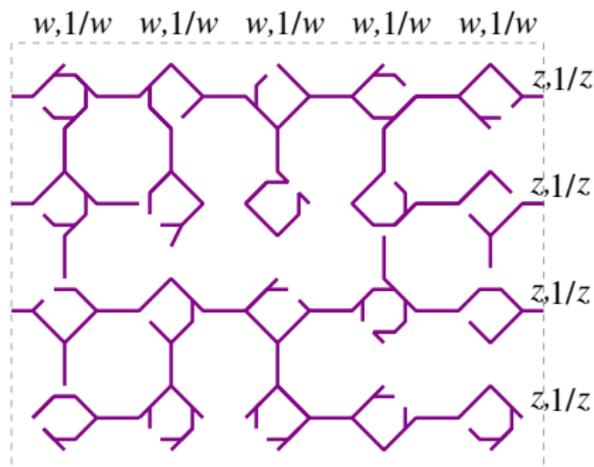
I. Théorème “matrix-tree” pour le polynôme caractéristique :



Le polynôme caractéristique des dimères  $\det(K_1(z, w)) \dots$

# CORRESPONDANCE EXPLICITE

## 1. Théorème “matrix-tree” pour le polynôme caractéristique :

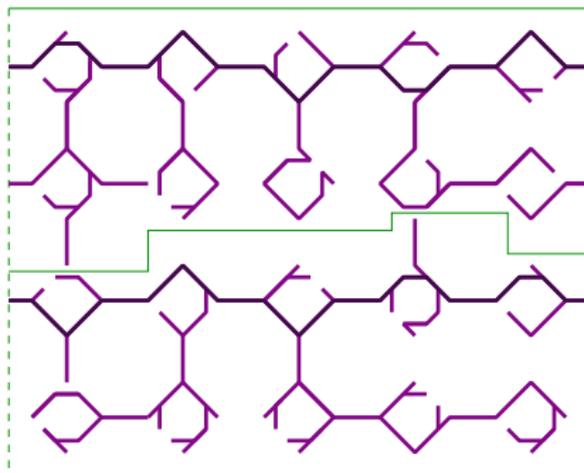


Le polynôme caractéristique des dimères  $\det(K_1(z, w)) \dots$  compte des CRSFs de  $G_1^F$  :

$$\det K_1(z, w) = \sum_{F \in \mathcal{F}(G_1^F)} \left( \prod_{e=(x,y) \in F} v_{xy} \right) \prod_{T \in F} (1 - z^{h(T)} w^{v(T)}).$$

# CORRESPONDANCE EXPLICITE

1. Théorème “matrix-tree” pour le polynôme caractéristique :



Le polynôme caractéristique des dimères  $\det(K_1(z, w)) \dots$  compte des CRSFs de  $G_1^F$  :

$$\det K_1(z, w) = \sum_{F \in \mathcal{F}(G_1^F)} \left( \prod_{e=(x,y) \in F} v_{xy} \right) \prod_{T \in \mathcal{F}} (1 - z^{h(T)} w^{v(T)}).$$

# CORRESPONDANCE EXPLICITE

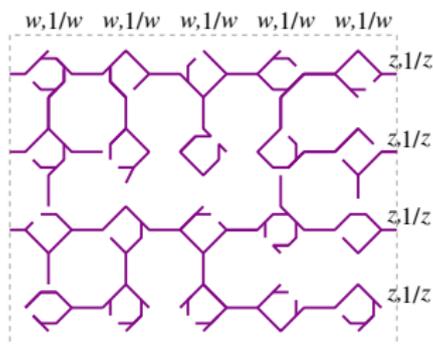
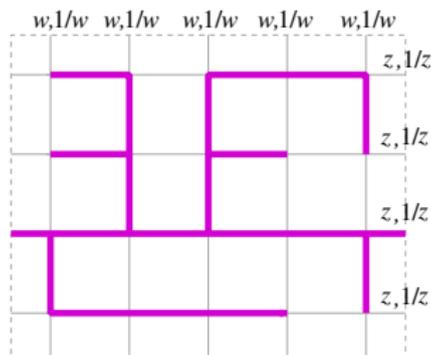
- ▶ Rentre dans le cadre général du théorème “matrix-tree” (Tutte, Forman), car le modèle est au point critique.
- ▶ Preuves classiques n’expliquent pas comment les CRSFs sont construits à partir des doubles dimères.

Comment construire des demi-arbres à partir de configurations de dimères ?

- ▶ **PFAFFIAN HALF-TREE THEOREM (DT, 2012)**

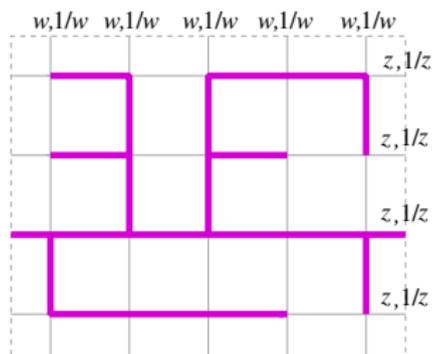
# CORRESPONDANCE EXPLICITE

2. Caractérisation des CRSFs de  $G_1^F$  qui contribuent à  $\det(K_1(z, w))$ .
3. “Correspondance” entre les CRSFs de  $G_1$  et les CRSFs de  $G_1^F$  :

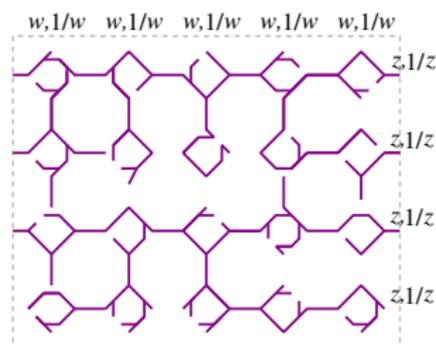


# CORRESPONDANCE EXPLICITE

2. Caractérisation des CRSFs de  $G_1^F$  qui contribuent à  $\det(K_1(z, w))$ .
3. “Correspondance” entre les CRSFs de  $G_1$  et les CRSFs de  $G_1^F$  :



CRSF  $F$  de  $G_1$



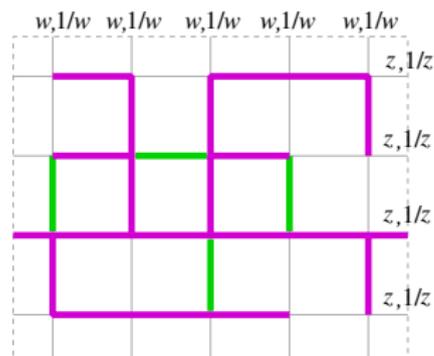
Famille  $S(F)$  de CRSFs de  $G_1^F$

- ▶ si  $F_1 \neq F_2$ , alors  $S(F_1) \cap S(F_2) = \emptyset$ ,
- ▶  $\bigcup_{F \in \mathcal{F}(G_1)} S(F) = \{ \text{CRSFs qui contribuent à } \det(K_1(z, w)) \}$ ,
- ▶ Contrib. de  $F$  à  $\det(\Delta_1(z, w)) = \mathcal{C} \cdot \text{Contrib. de } S(F) \text{ à } \det(K_1(z, w))$ .

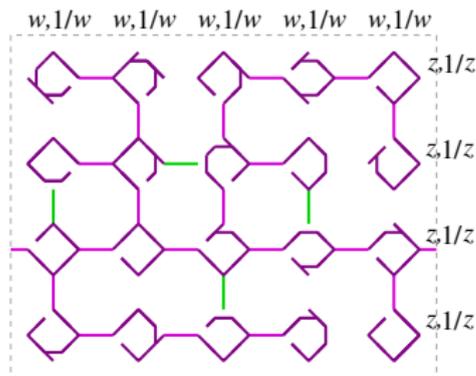




# CONSTRUCTION DE $\mathcal{S}(\mathbf{F})$



$$\mathcal{E} \subset E_1 \setminus \mathbf{F}$$



Famille  $\mathcal{F}(\mathbf{F}, \mathcal{E})$  de CRSFs de  $G_1^{\mathbf{F}}$  qui,

- ▶ contiennent les arêtes  $\mathbf{F} \cup \mathcal{E}$ ,
  - ▶ ont la même classe d'homol. que  $\mathbf{F}$ ,
  - ▶ contribuent à  $\det K_1(z, w)$ .
- ▶ Construction de  $\mathcal{F}(\mathbf{F}, \mathcal{E})$  par récurrence sur  $\text{Card}(\mathcal{E})$  avec des mouvements licites.

$$\mathcal{S}(\mathbf{F}) = \bigcup_{\mathcal{E} \subset E_1 \setminus \mathbf{F}} \mathcal{F}(\mathbf{F}, \mathcal{E}).$$

# PERSPECTIVES

- ▶ Modèle d'Ising dans le plan et arbres/forêts couvrantes :
  - ▶ Fonction de partition,
  - ▶ Corrélations de spins.
- ▶ Extension au “Random cluster model”.
- ▶ Invariance conforme de la fonction de hauteur du modèle de dimères correspondant au double modèle d'Ising.
- ▶ Modèle d'Ising  $Z$ -invariant en dehors du point critique : localité ?